ОГЛАВЛЕНИЕ

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

BY

ALONZO CHURCH

Volume I

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1956

А. ЧЁРЧ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

I

Перевод с английского
В. С. Чернявского

Под редакцией
В. А. Успенского

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1960

АННОТАЦИЯ

Эта монография принадлежит перу одного из самых известных современных специалистов в области математической логики. Она задумана автором в качестве учебника для студентов, а также в известной мере в качестве справочника. Предполагая у читателя только общую математическую культуру, книга с первых же страниц вводит его в глубокую проблематику, связанную с основными понятиями математической логики. Изложенный в ней материал представляет ценность для всякого математика, в том числе и для специалиста по математической логике. В качестве справочника ею могут пользоваться также и нематематики.

Содержащееся в этом томе Введение (стр. 15—63) по существу представляет собой самостоятельное литературное произведение, которое с интересом и пользой может читаться самыми широкими кругами научных работников, интересующихся вопросами математической логики.

Редакция литературы
по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

I

В течение долгого времени математическая логика оставалась глубинной областью математики и логики, обслуживавшей внутренние потребности этих наук. Эхо больших естественно-научных приложений математики докатывалось до этой области лишь через проблематику оснований математики. Что же касается логики, то она не имела и, казалось, не могла иметь никаких конкретных приложений; только в самые последние годы стало осознаваться ее прикладное значение.

Разумеется, и роль „внутренней науки" является почтенной и необходимой. К тому же именно в этой роли математическая логика добилась выдающихся успехов (по крайней мере один из ее результатов достоин того, чтобы быть известным каждому, кого интересуют возможности человеческого мышления: это так называемая теорема Гёделя о неполноте, утверждающая невозможность полной формализации процесса логического вывода).

Однако в течение последнего пятнадцатилетия установились новые связи между науками и открылись новые области приложений наук. Этот процесс, сопровождающийся одновременным проникновением математических методов во все более широкие области знания, затронул и математическую логику. Можно указать по меньшей мере четыре обстоятельства, делающих математическую логику особенно актуальной в наши дни:

1. Одну из новых областей приложения математики составляют вопросы анализа и синтеза конечных автоматов. Важными представителями конечных автоматов являются релейно-контактные и электронные схемы, идеализированные „нервные сети" и т. п. При анализе и синтезе этих схем, сетей и т. п. с успехом используется разработанный в математической логике для ее собственных нужд формальный аппарат*).

---

*) См. *Синтез электронных вычислительных и управляющих схем*, перевод с английского, ИЛ, М., 1954; *Автоматы*, сборник статей под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, перевод с английского, ИЛ, М., 1956; „Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики", *Труды Математического института им. Стеклова*, том 51, 1958.

2. Пожалуй, наиболее „прикладной" отраслью математики является сейчас вычислительная математика. Существует глубокая связь между математической логикой и вычислительной математикой, основанная прежде всего на аналогии между процессами формального логического вывода и вычислительными процессами*).

3. Происходящий сейчас „кибернетический переворот" ставит машины на места, которые ранее в системе обмена информацией занимали люди и их объединения (подобно тому как промышленный переворот поставил машины на места, которые занимали ранее люди и их объединения в системе промышленного производства). Общепризнано, что замена людей машинами, способными воспринимать, перерабатывать, хранить и выдавать информацию, будет происходить во все возрастающих масштабах. Чтобы успешно возложить на машины функции, долгое время считавшиеся исключительной привилегией человеческого интеллекта, необходим, очевидно, формально-логический анализ этих функций. Очевидно также, что при передаче машинам все более и более сложных функций потребуется создание специального языка, или языков, машин, на котором информация будет храниться в машинах и передаваться от машины к машине. Целесообразно, по-видимому, чтобы этот язык был лишен неправильностей естественных языков и следовал бы логической форме, т. е. был бы „формализованным языком" в том смысле, как он описан на стр. 16—17 настоящей книги. Создание такого языка и тем более логический анализ возлагаемых на машины функций не есть, конечно, задача только математической логики, но математическая логика — понимаемая автором книги как „предмет формальной логики, изучаемый посредством построения формализованных языков", — может оказать тут существенную помощь.

4. Человечество накопило и продолжает со все возрастающей быстротой накапливать огромные запасы информации в виде печатных текстов. Вопросы эффективного использования этой информации уже сейчас приобрели характер важной самостоятельной научной задачи. Для ее успешного решения необходимо провести логический анализ накопленной информации, что, в свою очередь, требует создания общих методов анализа логической структуры выраженной в виде печатного текста информации. На повестку дня встает и задача создания рациональных систем записи накапливаемой информации. (Все эти вопросы теснейшим образом связаны с вопросами автоматической обработки печатных текстов, тем более, что некоторые виды человеческой деятельности — перевод, реферирование, соз-

*) Эта связь подробно рассмотрена в статье А. А. Маркова „Математическая логика и вычислительная математика" в журнале *Вестник Академии наук СССР*, № 8, 1957.

дание справочников, каталогов, энциклопедий — сводятся по существу к преобразованию одних текстов в другие.) Решающая роль принадлежит здесь (наряду с лингвистикой) логике, и не в последнюю очередь — математической.

II

Выдающийся математик и логик, профессор математики Принстонского университета (США) Алонзо Чёрч известен своим вкладом в математическую логику и теорию алгоритмов. Следующие два результата Чёрча оказали особенно сильное влияние на развитие этих дисциплин.

1. Построение в 1935 г. (опубликовано в 1936 г.) первого примера неразрешимой массовой проблемы*).

2. Доказательство неразрешимости проблемы разрешения для узкого исчисления предикатов (или, по принятой в этой книге терминологии, для чистого функционального исчисления первого порядка), т. е. доказательство того, что не существует алгоритма, который по виду формулы этого исчисления — описывающего значительный фрагмент логики — определял бы, выражает эта формула общелогическую истину или нет**).

Алонзо Чёрч известен также как крупный знаток мировой литературы по математической логике. Им составлена знаменитая „Библиография математической логики"***), ставящая себе целью дать свод всей литературы по математической логике от времени зарождения этой науки до 1935 г. включительно.

Естественно, что появление монографии столь авторитетного автора было встречено с большим интересом. Изданный в качестве 17-го выпуска известной серии „Princeton Mathematical Series" первый том „Введения в математическую логику" быстро завоевал широкое признание и стал необходимой книгой для всякого, кто желает серьезно изучить предмет. Том содержит описание метода математической логики и ее первичных понятий (категорий математической логики, таких, как „имя", „переменная", „форма" и т. п.) и изложение пропозиционального исчисления (в другой терминологии — исчисления высказываний) и функциональных исчислений двух первых порядков (в другой терминологии — исчислений предикатов двух первых ступеней). Он может быть использован как в качестве систематического курса, причем не

*) Массовая проблема состоит в требовании найти алгоритм для решения некоторой серии (для каждой массовой проблемы своей) „единичных" проблем. Массовая проблема неразрешима, если ее решения, т. е. требуемого алгоритма, не существует. Пример Чёрча опубликован в *American Journal of Mathematics*, том 58, 1936, стр. 345—363.

**) *The Journal of Symbolic Logic*, том 1, 1936, стр. 40—41, 101—102.

***) „A bibliography of Symbolic Logic" в *The Journal of Symbolic Logic*, том 1, 1936, стр. 121—128, том 3, 1938, стр. 178—212.

требующего никаких специальных знаний, хотя и предполагающего довольно высокую математическую культуру, так и в качестве справочника, причем наиболее полного и удобного из существующих.

III

Первый том „Введения в математическую логику" Чёрча (второй том пока не опубликован) отличается тщательным отбором материала. Все подчинено основной задаче — изучению формальной логики путем построения формализованных языков. При этом каждый формализованный язык рассматривается в книге в соотнесении с другими формализованными языками — либо с языками, эквивалентными рассматриваемому и описывающими тот же, что и рассматриваемый язык, фрагмент формальной логики (так, автор говорит о различных формулировках пропозиционального исчисления), либо с языками, хотя и не эквивалентными рассматриваемому, но входящими вместе с ним в одно семейство близких друг другу языков (так, автор говорит о различных функциональных исчислениях первого порядка). Тем самым удается избежать утомительного параллелизма; одновременно делаются ясными основные черты языков, описывающих данный фрагмент логики, и не создается ложного впечатления, что пропозициональное или функциональное исчисление — это то, что жестко описано на такой-то странице такого-то сочинения.

Книга Чёрча посвящена именно математической логике, а не основаниям математики, что отличает ее от *Principia Mathematica* Уайтхеда и Рассела, от *Grundlagen der Mathematik* Гильберта и Бернайса и от *Introduction to Metamathematics* Клини; последняя книга вышла сравнительно недавно в русском переводе (С. К. Клини, *Введение в метаматематику*, 1957). Из имеющихся на русском языке книг к 1-му тому „Введения в математическую логику" ближе всего примыкают *Основы теоретической логики* Д. Гильберта и В. Аккермана (перевод с немецкого, 1947). Однако „Введение в математическую логику" значительно превосходит „Основы теоретической логики" как современностью и полнотой изложения, так и внимательностью к чисто логическим вопросам и четкостью в употреблении основных понятий (не говоря уже о том, что во втором томе будут изложены такие совершенно не затронутые в книге Гильберта и Аккермана темы, как конструктивная логика, аксиоматическая арифметика и аксиоматическая теория множеств).

Изложение автора отличается необычайной полнотой — как в смысле полноты рассмотрения каждого вопроса, так и в смысле полноты круга рассматриваемых вопросов (с единственной оговоркой, что вовсе не рассматриваются вопросы модальной логики).

В книге собран огромный материал, распыленный до этого по журнальным статьям, подчас в трудно доступных изданиях. Кажется, нет в литературе такой детали, относящейся к какому-либо из рассматриваемых в книге построений, которая не была бы соответствующим образом отмечена.

Чтобы не перегружать основной текст, автор относит значительную часть фактов в упражнения, разбитые на 30 циклов. Существенную часть содержания книги составляют 550 нумерованных (1—372, 400—486, 500—590) примечаний, служащих для примеров, сравнений, ссылок, дополнений, терминологических и исторических справок и т. д. (исторические вопросы освещаются также в двух специальных параграфах). В английском оригинале эти примечания были подстрочными, в русском издании они перенесены в конец книги. Возможны различные способы использования этих примечаний — от чтения их параллельно основному тексту до полного их игнорирования при первом чтении. При намерении серьезно проработать книгу лучше всего, пожалуй, читать каждый параграф по два раза — сперва один основной текст без примечаний, затем и основной текст, и примечания.

Наиболее замечательным разделом 1-го тома является Введение, содержащее систематическое описание основных первичных понятий математической логики и ее метода. Ясность и последовательность, с которыми дается это описание, вызывают восхищение. Выглядит, в частности, очень естественным, что первым рассматривается понятие имени (ведь дальнейшее изложение, каково бы оно ни было, неизбежно будет употреблять имена упоминаемых объектов; значит, надо прежде всего объяснить, что такое имя).

Введение можно рассматривать как самостоятельное литературное произведение и читать само по себе, без установки на чтение дальнейших глав. Оно может оказаться полезным и доступным и такому читателю, которому нет особой нужды или затруднительно читать всю книгу. Основные понятия и факты теории имен, прежде всего различение между предметом, обозначаемым именем, и смыслом, выражаемым именем, необходимо знать каждому научному работнику, заинтересованному в уточнении терминологии своей науки.

Характерные для Введения стремление к максимально отчетливому изложению и внимание к семантическим вопросам сохраняются на протяжении всей книги. Строя формализованные языки (даже такой простой, как пропозициональное исчисление), автор каждый раз четко указывает его интерпретацию, не предполагая (как это сплошь и рядом делается в руководствах по математической логике) ее саму собой разумеющейся или „постепенно выявляющейся". Там, где не было уверенности, передает ли русский перевод те же логические оттенки, что и английский текст, подлинный текст приводится в угловых скобках после русского перевода (подобная предосторожность тем более необходима, что автор нередко пользуется таким специфическим для английского языка приемом, как терминологическое употребление определенного артикля).

IV

Русская математико-логическая терминология, к сожалению, еще не устоялась, поэтому при выборе русских переводов английских терминов встречались иногда трудности. Английские прообразы для русских терминов, входящих в предметный указатель (стр. 461—477), могут быть восстановлены по этому указателю. В необходимых случаях английский термин, взятый в угловые скобки, следует за своим русским переводом непосредственно в тексте. Тем не менее представляется уместным обратить уже сейчас внимание читателя на употребление и перевод отдельных терминов.

1. В заключительной части § 07 термины „символическая логика", „математическая логика" и „логистика" объявляются синонимами (не смешивать логистику с логицизмом — направлением в философии математики!).

2. В самом начале § 08 проводится различие между синтаксисом в узком смысле (или просто *синтаксисом*) и синтаксисом в широком смысле (или *логическим синтаксисом*) и между *элементарным синтаксисом* и *теоретическим синтаксисом*.

3. Английский термин „sentence", понимаемый сперва как единица выражения в естественных языках и затем распространенный на формализованные языки, переводится русским термином „предложение" (употребляемом согласно с принятым в грамматике значением „слово или сочетание слов, выражающее законченную мысль"; см. Толковый словарь русского языка под ред. проф. Д. Н. Ушакова, т. III, М., 1939, стр. 715).

4. Английский термин „proposition", означающий в этой книге тó, что может быть смыслом предложения, являющегося истинным или ложным, переводится русским термином „суждение". При этом, очевидно, принимается расширительное истолкование термина „суждение" по сравнению с истолкованием этого термина в отечественных руководствах по логике, где, как правило, рассматриваются лишь суждения, имеющие субъектно-предикатную структуру. Новое истолкование лишь расширяет старое, но не противоречит ему, поскольку всякое суждение в старом понимании является суждением в новом понимании. Совместное употребление терминов „суждение" и „предложение" — так, как это получилось в русском издании книги Чёрча в результате принятого перевода терминов „proposition" и „ sen-

tence", — согласуется, по-видимому (с учетом указанной расширительности истолкования), с употреблением этих терминов в отечественной литературе.

5. Термин „высказывание" имелось в виду оставить для того неопределенного случая, когда не уточняется, идет ли речь о предложении или о суждении (в разъясненном только что понимании этих терминов). Именно с такой ситуацией сталкивается читатель книги Гильберта и Аккермана (с этой точки зрения употребление в русском переводе этой книги термина „высказывание" следует признать удачным).

6. Английский термин „decision problem" переводится русским термином „проблема разрешения", что является терминологическим новшеством. Раньше (см., например, русское издание книги Клини) это же понятие по навязчивой традиции неудачно обозначалось термином „проблема разрешимости". Представляется целесообразным отказаться, наконец, от этой традиции и проблему поиска разрешающей процедуры назвать проблемой разрешения. Проблемой разрешимости (данной проблемы A) естественно называть следующую проблему: „узнать, разрешима ли проблема A".

В. Успенский

31 марта 1959 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга является исправленным и значительно расширенным изданием *Введения в математическую логику, часть* I ⟨*Introduction to Mathematical Logic, Part* I⟩, которое было опубликовано в 1944 г. в серии Annals of Mathematics Studies*). Несмотря на обширные добавления, она остается введением, а не всеобъемлющим исследованием. Эта книга задумана в качестве учебника для студентов-математиков, а также, в известных пределах, и в качестве справочника. В качестве учебника она содержит начальный курс математической логики, но предполагает у читателя существенную математическую подготовку.

Отличительной чертой нового издания является наличие большого числа упражнений для студентов. Некоторые из этих упражнений имеют элементарный характер и являются просто иллюстрациями; другие представляют собой по существу краткие наброски сложных проблем, изложению которых можно было бы посвятить целые параграфы основного текста; наконец, имеются упражнения, занимающие различные промежуточные положения. Мы не пытались систематически классифицировать упражнения по их трудности. Однако начинающему в качестве основы для выбора мы рекомендуем следующий примерный список: 12.3—12.9, 14.0—14.8, 15.0—15.3, 15.9, 15.10, 18.0—18.3, 19.0—19.7, 19.9, 19.10, 23.1—23.6, 24.0—24.5, 30.0—30.4 (если потребуется — с посторонней помощью), 34.0, 34.3—34.6, 35.1, 35.2, 38.0—38.5, 39.0, 41.0, 43.0, 43.1, 43.4, 45.0, 45.1, 48.0—48.11, 52.0, 52.1, 54.2—54.6, 55.1, 55.2, 55.22, 56.0—56.2, 57.0—57.2.

Для того чтобы опубликовать том I, книга была довольно случайным образом разделена на две части, так что во многих случаях пришлось сделать ссылки на различные места еще не написанного тома II. Чтобы читатель мог себе хотя бы в общих чертах представить, о чем в соответствующих местах идет речь, в конце оглавления настоящего, первого тома добавлено пред-

*) Издание 1944 г. представляет собой тонкую книжку небольшого формата. В нем отсутствуют весьма существенные разделы настоящего тома, в том числе Введение и упражнения. По справедливости настоящий том можно считать не переизданием, а новым самостоятельным сочинением. — *Прим. ред.*

полагаемое содержание тома II, в свете чего и следует понимать эти ссылки.

Том I автор писал в течение ряда лет, начиная с 1947 г., и по мере того, как завершались отдельные части работы, они становились доступными в форме рукописи в библиотеке Принстонского университета. Работа выполнялась в течение отпуска в Принстонском университете с сентября 1947 г. по 1 февраля 1948 г., а затем по соглашению между Принстонским университетом и Управлением военно-морских исследований США с 1 февраля по 30 июня 1948 г. За этот период были написаны введение и главы I и II, хотя в этот материал в дальнейшем и были внесены некоторые незначительные изменения; в частности, были добавлены упражнения 15,4, 18.3, 19.12, 24.10, 26.3(2), 26.3(3), 26.8, 29.2, 29.3, 29.4, 29.5, а также исправлены ошибки и приняты во внимание новейшие публикации. Остальная часть работы была выполнена в течение 1948—1951 гг. по субсидии от Фонда научных исследований Принстонского университета и фонда треста Юджина Хиггинса; именно эти два фонда сделали возможным написание второй половины настоящего тома.

Что касается персональной помощи, то я по-прежнему благодарен лицам, перечисленным в предисловии к изданию 1944 г., за оказанное ими содействие, и в особенности С. А. Трусделу, чьи замечания относительно лекций 1943 г. сохранили большое значение и были полезными как при написании тома I, так и в предварительной работе, проделанной над материалом тома II, несмотря на значительные отклонения от содержания и построения первоначальных лекций. Я также благодарен всем тем, кто прочел новую рукопись или ее части и сделал ценные замечания или исправления, и среди них особенно Е. Адлеру, А. Ф. Баушу, У. У. Буну, Леону Хенкину, Дж. Кемени, Морису Л'Аббэ, Е.А. Мейеру, Паулю Майеру, И. Л. Новаку и Ралону Уэллсу.

Алонзо Чёрч

Принстон, Нью-Джерси

31 августа 1951 г.

(Добавлено 28 ноября 1955 г.) Я, далее, благодарен за указания, которые могли быть учтены только в корректурах, А. Н. Прайору, Т. Т. Робинсону, Хартли Роджерсу младшему, Дж. Шепердсону, Ф. О. Уайзу и Г. Зубиетта Русси и за помощь в чтении самих корректур Майклу Рэбину и Зубиетта; за ценное участие в составлении указателей я особенно благодарен Робинсону и Зубиетта.

ВВЕДЕНИЕ

Это введение содержит некоторые предварительные пояснения, которые представляется наиболее уместным поместить вначале, хотя многие из них приобретут полную ясность лишь в свете дальнейшего формального изложения. Читателю, не знакомому с предметом, рекомендуется прочесть это введение, а затем вновь вернуться к нему после изучения нескольких первых глав книги. Подстрочные примечания при первом чтении могут быть, как правило, опущены.

00. Логика. Предмет нашего изучения есть *логика*, или, говоря более точно, чтобы отличить этот предмет от других теорий и учений, которые (к сожалению) тоже назывались этим именем, — *формальная логика*.

Обычно (формальная) логика занимается анализом предложений или суждений[1] и доказательств[2]; при этом основное внимание обращается на *форму* в отвлечении от *содержания* ⟨*matter*⟩. Сейчас было бы нелегко точно определить различие между формой и содержанием, но его можно пояснить на примерах.

В качестве примера возьмем следующее сравнительно простое рассуждение.

I. Братья носят одну и ту же фамилию; Ричард и Стенли — братья; Стенли носит фамилию Томсон; следовательно, Ричард носит фамилию Томсон.

В повседневном обиходе первая из трех посылок ⟨premisses[3]⟩ этого рассуждения не была бы, вероятно, явно сформулирована, по крайней мере до тех пор, пока не возникли бы сомнения в правильности рассуждения; но для целей логического анализа все посылки должны быть сформулированы явно. Это рассуждение верно, так сказать, в силу одной своей формы, независимо от содержания, независимо, в частности, от того, истинны ли или ложны взятые сами по себе посылки и заключение. Рассуждение может быть верным несмотря на то, что утверждения, из которых оно построено, ложны, и как раз тогда, когда мы констатируем эту независимость, мы и отделяем форму от содержания.

Для сравнения с предыдущим примером рассмотрим еще такой.

II. Комплексные числа, отношение которых есть действительное положительное число, имеют один и тот же аргумент; $i-\sqrt{3}/3$ и ω суть комплексные числа, отношение которых есть положительное действительное число; аргумент ω равен $2\pi/3$; следовательно, аргумент $i-\sqrt{3}/3$ равен $2\pi/3$.

Про рассуждение II можно сказать, что форма его совпадает с формой рассуждения I, хотя содержание этих рассуждений различно, и что II, подобно I, истинно в силу одной только своей формы.

Текстуальное сходство в формулировках примеров I и II, достигнутое, правда, за счет некоторой неестественности языка, подчеркивает тождественность их формы. Однако в общем случае такой словесный параллелизм не может (по крайней мере в обычных языках) служить надежным свидетельством тождественности логической формы. Это и понятно: все обычные языки на протяжении длительных исторических периодов развивались под влиянием практических потребностей легкости общения, а это не всегда совместимо с точностью и надежностью логического анализа.

Для иллюстрации этого приведем два следующих примера.

III. Я видел портрет Джона Уилкиса Буса*); Джон Уилкис Бус убил Авраама Линкольна; следовательно, я видел портрет убийцы Авраама Линкольна.

IV. Я видел портрет кого-то ⟨somebody⟩; кто-то ⟨somebody⟩ изобрел телегу; следовательно, я видел портрет изобретателя телеги.

Рассуждение III несомненно правильно и притом, по-видимому, в силу одной своей логической формы; рассуждение же IV неверно. Внешнее языковое сходство этих двух рассуждений оказалось обманчивым. В данном случае ошибка быстро обнаруживается, когда мы, не ограничиваясь этим внешним сходством, обращаемся к содержанию, но можно привести более тонкие примеры, когда более правдоподобна возможность возникновения действительных недоразумений. По этой причине желательно, даже практически необходимо, употреблять для логических целей специально созданный язык — *формализованный язык*, как мы его будем называть, — который, в противоположность обычному языку, будет следовать за логической формой и воспроизводить ее даже в ущерб краткости и легкости общения, если это будет необходимо. Введение особого формализованного языка означает,

*) Бус (Booth, John Wilkes) (1839—1865) — американский актер, убивший Линкольна. — *Прим. ред.*

следовательно, принятие и особой теории, или системы, логического анализа. (Это и нужно считать главной отличительной чертой формализованного языка, а вовсе не то, что оказалось удобным заменить отдельными буквами и различными специальными символами слова, которые в письменности большинства обычных языков составляются из многих букв. Эта замена, хотя она и бросается сразу в глаза, теоретически менее важна.)

01. Имена. В формализованные языки мы перенесем из языков обычных один широко распространенный там тип выражений, а именно *собственные имена* ⟨*proper names*⟩. К их числу мы относим не только собственные имена, по произволу предназначаемые для непосредственного обозначения предмета (такие, например, как „Рембрандт", „Каракас", „Сириус", „Миссисипи", „Одиссея", „восемь"), но и такие имена, которые обладают строением, отражающим тот способ, которым они обозначают предмет[4)]. В качестве примера для имен второго рода возьмем „пятьсот девять". Это имя, обозначающее некоторое простое число и притом таким способом, который выражается в языковом строении имени: „предмет, являющийся пятью сотнями плюс девять". Еще пример: „автор *Вэверлея*". Это имя, обозначающее известного шотландского писателя — сэра Вальтера Скотта. Специфический способ обозначения предмета, отраженный в языковом строении этого имени, состоит в указании на то, что предмет написал *Вэверлея*. „Родина Рембрандта", „столица Венецуэлы", „куб числа два" служат дальнейшими примерами имен этого рода.

В обычных языках не всегда легко различить эти два рода имен: с одной стороны, имен, которым произвольно приписано определенное значение (в формализованных языках мы их будем называть исходными собственными именами), и, с другой стороны, имен, построенных из осмысленных элементов. Так, например, в греческом языке „Одиссея" есть производное от имени „Одиссей", и неясно, принадлежит ли эта этимология целиком прошлому или мы должны считать, что и в современном языке „Одиссея" обладает строением, включающим имя „Одиссей". Эта неопределенность устраняется в формализованном языке тем, что правила конструирования имен точно фиксируются и явно формулируются (§ 07).

До сих пор нет общепризнанной теории содержания ⟨meaning⟩ собственных имен. Подробное рассмотрение этого вопроса вывело бы нас далеко за предполагаемые рамки книги, но все же необходимо, хотя бы в общих чертах, обрисовать теорию, которую мы примем. Эта теория принадлежит в основном Фреге[5)].

Наиболее важным ее положением является то, что собственное имя всегда есть или, по крайней мере, всегда считается *чьим-то именем*. Мы будем говорить, что собственное имя *обозначает*[6)], или *называет*[7]), то, чьим именем оно является. Отношение между собственным именем и тем, что оно обозначает, будет называться *отношением называния*[8]), а вещь[9]), обозначаемая этим именем, будет называться *денотатом* ⟨*denotation*⟩, или *предметом имени*. Так, например, мы будем говорить, что собственное имя „Рембрандт" обозначает, или называет, голландского художника Рембрандта, а сам он будет называться денотатом имени „Рембрандт". Аналогично имя „автор *Вэверлея*" обозначает, или называет, шотландского автора, а он есть денотат как этого имени, так и имени „сэр Вальтер Скотт".

На примерах собственных имен, имеющих один и тот же денотат, но в некотором смысле различное содержание, можно видеть, что содержание собственного имени не исчерпывается его денотатом. Так, имена „сэр Вальтер Скотт" и „автор *Вэверлея*" имеют один и тот же денотат, однако в содержании первого имени в отличие от второго заключено, что обозначаемое лицо было рыцарем или баронетом, что оно носило имя Вальтер и фамилию Скотт[10]), в содержании же второго, в отличие от первого, заключено, что названное лицо написало *Вэверлея**). Для того чтобы еще резче выявить различие в содержании двух рассматриваемых имен, заметим, что если два имени являются *синонимами* (имеют во всех отношениях одно и то же содержание), то всегда можно одно заменить другим, не меняя содержания целого. Однако предложения „сэр Вальтер Скотт является автором *Вэверлея*" и „сэр Вальтер Скотт является сэром Вальтером Скоттом" имеют совершенно различное содержание: первое предложение сообщает важный факт литературной истории, на который во втором нет никакого намека. Это различие в содержании может в некоторых случаях привести к нарушению истинности при замене одного имени другим[11]). Так, например, верно, что „Георг IV однажды хотел узнать, является ли Скотт автором *Вэверлея*", и ложно, будто бы „Георг IV однажды хотел узнать, является ли Скотт Скоттом"[12]).

Поэтому мы припишем каждому собственному имени, помимо денотата, еще другой род содержания — его *смысл* ⟨*sense*[13])⟩ и будем, к примеру, говорить, что „сэр Вальтер Скотт" и „автор *Вэверлея*" имеют один и тот же денотат, но различный смысл[14]). Грубо говоря, смысл — это то, что бывает усвоено, когда понято имя[15]), так что возможно понимать смысл имени, ничего не зная о его денотате, кроме того, что он определяется этим смыслом. В частности, для того чтобы вопрос „является ли сэр Вальтер Скотт автором *Вэверлея*" был разумной просьбой о новой инфор-

* В подлиннике далее следует (приводим в переводе): „И является даже единственным автором ввиду определенного артикля ⟨„автор Вэверлея" — по-английски „*the author of Waverly*"⟩ и того обстоятельства, что эта фраза введена как собственное имя". — *Прим. перев.*

мации, нужно, чтобы спрашивающий понимал смысл имен „сэр Вальтер Скотт" и „автор *Вэверлея*" и не был осведомлен об их денотатах достаточно для того, чтобы с уверенностью отождествить их.

Мы будем говорить, что имя *обозначает*, или *называет*, свой денотат и *выражает* его смысл[16]. Мы можем сказать и короче, что имя *имеет* данный денотат и *имеет* данный смысл. О смысле мы говорим, что он *определяет* денотат или что он есть *концепт*[17] этого денотата.

В одном или различных языках различные имена могут быть синонимами и выражать один и тот же смысл, или концепт. С другой стороны, одно имя в различных языках или даже в одном языке (при омонимии) может выражать разный смысл. Поэтому мы представляем себе *концепты* имеющими неязыковую природу[17]. Мы даже готовы допустить существование концептов таких вещей, которые не имеют имени ни в одном из ныне существующих языков. Но каждый концепт некоторой вещи есть или, по крайней мере, может быть смыслом некоторого ее имени в некотором (быть может, только мыслимом) языке.

Мы должны признать возможным существование концептов, которые не являются концептами никакой реально существующей вещи, и существование имен, которые выражают смысл, но не имеют денотата. Такие имена (или, по крайней мере, имена, допускающие соответствующую достаточно правдоподобную интерпретацию) существуют в большинстве обычных языков: например „Пегас"[18], „король, правивший во Франции в 1905 году". Но, как заметил Фреге, при построении формализованного языка можно избежать введения подобных имен[19], и часто это действительно удобно сделать.

Мы будем предполагать, что полное понимание языка требует знания смыслов всех слов языка, но не требует обязательного знания того, какие смыслы определяют один и тот же денотат, или даже того, какие смыслы вообще определяют какой-либо денотат.

Во всяком хорошо построенном языке каждое имя должно было бы, конечно, иметь точно один смысл, и мы намерены обеспечить эту однозначность в формализованных языках. В обычных же языках дело обстоит вовсе не так. В частности, как отметил Фреге, в обычных языках, как правило, наряду с *прямым* ⟨*ordinary*, нем. *gewöhnlich*⟩ употреблением имени возможно еще и *косвенное* ⟨*oblique*, нем. *ungerade*⟩, когда денотатом имени становится то, что было смыслом при прямом употреблении имени[20].

Предполагая однозначность в употреблении имен достигнутой (это в конечном счете потребует отказа от косвенного употребления имен за счет введения специальных имен для обозначения смысла, выражаемого другими именами[21]), мы вместе с Фреге сделаем следующие допущения о составных именах, являющихся языковыми конструкциями и содержащих другие имена в качестве составляющих частей: (1) смысл составного имени не меняется, если одно из входящих в него составляющих имен заменить другим с тем же, что у заменяемого, смыслом; (2) денотат составного имени не меняется, если одно из входящих в него составляющих имен заменить другим с тем же, что у заменяемого, денотатом (хотя смысл может и измениться)[22].

Мы сделаем явно также следующее допущение, имеющееся у Фреге, которое, подобно (1) и (2), было неявным в предшествующем рассмотрении: (3) если имя имеет денотат, то этот денотат *есть функция* смысла имени (см. ниже § 03), т. е. если дан смысл, то этим определяется существование и единственность денотата, хотя он и не обязательно должен быть известен каждому знающему смысл.

02. Константы и переменные. В математике принято называть собственные имена чисел *константами*. Мы перенесем этот термин в формализованные языки, не ограничивая его, однако, числами: термин *константа* будет синонимом для выражения „*собственное имя, имеющее денотат*".

Но термин *константа* будет часто употребляться и при построении неинтерпретированных исчислений (логистических систем в смысле § 07), когда некоторые символы и выражения будут выделяться в качестве констант единственно для того, чтобы рассматривать их отдельно от остальных при задании правил исчисления. В действительности символы или выражения, выделенные таким образом в качестве констант, будут обычно оказываться собственными именами (имеющими денотат) хотя бы в одной из возможных интерпретаций исчисления.

Как и обычно в математике, *переменная* есть символ, содержание которого совпадает с содержанием собственного имени, или константы, за исключением лишь того, что единственный денотат константы заменен здесь возможностью различных *значений* переменной.

Так как обычно необходимо ограничивать значения, которые может принимать переменная, то мы будем считать, что с переменной связана непустая *область* ее возможных *значений*. Поэтому к содержанию переменной относится в некотором смысле и содержание собственного имени области ее значений[23]. Однако переменную нельзя отождествлять с собственным именем области ее значений, так как между их содержаниями имеются и различия[24].

Что такое переменная, выясняется легче всего, если прибегнуть к рассмотрению составных имен, которые содержат другие имена в качестве составляющих частей. Пусть в таком имеющем денотат составном имени одно или несколько (не обязательно все) вхождения какого-либо составляющего имени заменены некоторой переменной, скажем x. Чтобы избежать усложнений, допустим, что иных вхождений x не имеет[25] и что денотат заменяемого имени входит в область значений переменной x. Выражение, получаемое из составного имени при такой замене одного из составляющих имен на переменную, мы будем называть *формой*[26]. Для каждого или, по крайней мере, для некоторых значений переменной x из области ее значений такая форма имеет, или принимает, какое-то *значение*. Значением формы для некоторого значения переменной x является денотат того выражения, которое получается из формы при подстановке имени данного значения переменной x вместо всех ее вхождений в форму. (Если же получающееся при этом выражение не имеет денотата, то для данного значения x форма значения не имеет.)[27]

Переменная, входящая в выражение (форму) только что описанным образом, называется *свободной переменной*[28] этого выражения (формы).

Теперь предположим, что составное имя, имеющее денотат, содержит два составляющих имени, из которых ни одно не является частью другого, и пусть одно или несколько (не обязательно все) вхождения каждого из этих составляющих имен заменены переменными, скажем x и y соответственно. Для простоты будем считать, что переменные x и y не входят в исходное составное имя и что в области значений этих переменных входят соответственно денотаты тех составляющих имен, которые заменяются этими переменными. Выражение, получающееся при такой подстановке, называется *формой* с двумя *свободными переменными* x и y. Для определенных пар значений x и y, взятых соответственно из их областей значений, форма имеет, или принимает, некоторое *значение*. Значение формы для данных значений x и y — это то же самое, что денотат того выражения, которое получается из формы при подстановке в нее имен данных значений x и y соответственно вместо всех их вхождений. (Если же получаемое таким образом выражение не имеет денотата, то для данных значений x и y форма не имеет значения.)

Тем же путем могут быть получены формы трех, четырех и большего числа переменных. Если форма содержит одну-единственную свободную переменную, то мы будем называть ее *сингулярной* ⟨*singulary*[29]⟩, если точно две — *бинарной*, если три — *тернарной* и т. д. Форма, содержащая точно n свободных переменных, есть *n-арная* форма.

Две формы будут называться *равносильными*, если они согласованы по значению для любого распределения значений по свободным переменным, т. е. если для любого распределения значений по свободным переменным эти формы либо принимают одно и то же значение, либо обе не имеют значения. (Так как эти две формы могут иметь и различные свободные переменные, то нужно объединить все переменные, имеющие свободные вхождения хотя бы в одну из форм, и рассматривать всевозможные распределения значений по этой совокупности переменных. Если значения форм при этом оказываются согласованными, то формы называются равносильными.) Форма называется *равносильной* константе, если при любом задании значений ее свободных переменных ее значение совпадает с денотатом константы. Две константы называются *равносильными*, если они имеют один и тот же денотат.

Используя понятие равносильности, мы можем к допущениям (1)—(3) двух последних абзацев § 01 добавить еще четвертое допущение, или „принцип содержания", которое является распространением (2) на случай форм: (4) если в составной константе или форме заменить входящую в нее составляющую константу или форму на другую, равносильную с ней, то получающаяся при этом составная константа или форма равносильна исходной[30]. Значение этого принципа станет яснее в связи с употреблением операторов и связанных переменных, которое будет рассмотрено в § 06. На этот принцип, подобно (2), надо смотреть как на часть наших разъяснений отношения называния и поэтому как на часть теории содержания.

Как и в случае *константы*, мы будем употреблять термины *переменная* и *форма* при построении неинтерпретированных исчислений, вводя их специальными определениями для каждого такого исчисления, в связи с которым они должны будут употребляться. Обычно именно выделенные таким образом символы и выражения будут переменными и формами в нашем прежнем смысле в одной из главных интерпретаций исчисления как языка (см. § 07).

Нужно особо подчеркнуть, что переменная, в нашем употреблении этого термина, есть определенного рода символ[31], а не вещь (например, число), которую этот символ обозначает или как-либо иначе указывает. Математики говорят о „переменных действительных числах" или чаще о „переменных величинах", но эти выражения, видимо, лучше не понимать буквально. Фреге[32] убедительно сформулировал возражения против идеи, согласно которой действительные числа должны быть подразделены на два класса, или сорта: „постоянные действительные числа" и „переменные действительные числа" — и их незачем повторять здесь[33]. Во всяком случае, никогда еще на этой основе не была построена удовлетворительная теория, и нелегко представить себе, как это можно было бы сделать.

Математическая теория действительных чисел представляет собой удобный источник примеров в хорошо разработанной системе обозначений[34]. Обращаясь к этой теории для иллюстрации рассмотренного материала, приведем в качестве примеров констант следующие десять выражений:

$$0,\ -\frac{1}{2},\ e,\ -\frac{1}{2\pi},\ \frac{1-4+1}{4\pi},\ 4e^4,\ e^e,\ e-e,\ -\frac{\pi}{2\pi},\ \frac{\sin(\pi/7)}{\pi/7}.$$

Пусть областью значений переменных x и y будут действительные числа, а областью значений переменных m, n, r — положительные целые числа[35]. Следующие выражения дают примеры форм.

$$y,\ -\frac{1}{y},\ -\frac{1}{x},\ -\frac{1}{2x},\ \frac{1-4+1}{4x},\ 4e^x,\ xe^x,\ x^x,$$

$$x-x,\ n-n,\ -\frac{x}{2x},\ -\frac{r}{2r},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\sin r}{r},$$

$$ye^x,\ -\frac{y}{xy},\ -\frac{r}{xr},\ \frac{x-m+1}{m\pi}.$$

Формы первых двух строк сингулярны, так как каждая содержит одну свободную переменную y, x, n или r. Формы третьей строки бинарны, так как первые две из них содержат в качестве свободных переменных x и y, третья x и r, четвертая x и m[36].

Константы

$$-\frac{1}{2\pi} \text{ и } \frac{1-4+1}{4\pi}$$

не тождественны, однако они равносильны, так как обозначают одно и то же число[37]. Аналогично этому константы $e-e$ и 0 хотя и не тождественны, но равносильны, так как тождественны числа $e-e$ и 0. Так же обстоит дело с $-\pi/2\pi$ и $-{}^1/_2$.

Если x принимает значение 0, то форма xe^x принимает значение 0. (Здесь, конечно, имеется в виду число 0, а не константа 0, так что столь же правильно будет сказать, что если x принимает значение 0, то форма xe^x принимает значение $e-e$, или что если x принимает значение $e-e$, то форма xe^x принимает значение 0 и т. д.) При значении 1 для x форма xe^x имеет значение $1e^1$. При значении 4 для x значение той же формы есть $4e^4$ — действительное число, для которого не оказалось более простого общеупотребительного имени.

Форма ye^x при значениях 0 и 4 для x и y соответственно имеет значение 4; при значениях 1 и 1 для x и y она имеет значение $1e^1$, или, что то же самое, значение e.

Если x и y принимают соответственно значения e и 2, то форма $-y/xy$ принимает значение $-1/e$. При значениях e и e для x и y она снова принимает значение $-1/e$. При значениях e и 0 для x и y она не имеет значения, так как не существует частного от деления 0 на 0.

При значениях e и 2 для x и r соответственно форма $-r/xr$ имеет значение $-1/e$. Но при значениях e и e для x и r она значения не имеет, потому что e не входит в область значений переменной r (e не является одним из возможных значений для r).

Формы

$$-\frac{1}{2x} \text{ и } \frac{1-4+1}{4x}$$

равносильны, так как обе они не имеют значения при значении 0 для x и имеют одно и то же значение при всех остальных значениях x. Формы $-1/x$ и $-y/xy$ не равносильны, так как они не согласованы при значении 0 для y (если значение x не есть 0), формы же $-1/x$ и $-r/xr$ равносильны.

Формы $-1/y$ и $-1/x$ не равносильны, так как они не согласованы, например, для значений 1 и 2 переменных x и y соответственно.

Формы $x - x$ и $n - n$ обе равносильны константе 0[38] и поэтому равносильны друг другу.

Формы $-x/2x$ и $-r/2r$ не равносильны, так как они не согласованы при значении 0 для x. Вторая форма в отличие от первой совпадает с константой, а именно с $-^1/_2$.

03. Функции. *Функцией*, или точнее, *однозначной сингулярной функцией*, мы будем называть операцию[39], которая, будучи применена к чему-то как к *аргументу*, дает некоторую вещь в качестве *значения* функции *для* данного аргумента. Не требуется, чтобы функция была применима к любой возможной вещи как к аргументу; напротив, в природе всякой функции скорее лежит свойство быть применимой лишь к некоторым вещам и, будучи примененной к одной из них как к аргументу, давать некоторое значение. Вещи, к которым функция применима, составляют *область определения* функции, а значения составляют *область значений* функции. Сама функция состоит в определении некоторого значения для каждого аргумента из области определения функции[39].

Что касается эквивалентности, или тождественности, функций, то мы примем соглашение, обычное в математике, а именно: функции *тождественны*, если они имеют одну и ту же область определения и для каждого аргумента из этой области имеют одно и то же значение. Иными словами, мы употребляем термин „функция" в том смысле, в котором обычно употребляется термин *отображение* (функция в объемном смысле ⟨*function in extension*⟩). Если способ, которым функция определяет значения для своих аргументов, изменен таким образом, что не меняется ни область определения функции, ни значение функции для любого аргумента из этой области, то функция остается той же самой, хотя соответствующий *концепт функции*, или концепт, определяющий функцию (в смысле § 01), при этом и меняется.

Мы будем говорить о функции, *отображающей некоторый класс в некоторый класс*, имея в виду функцию, область определения которой есть первый класс и все значения которой лежат во втором классе (хотя второй класс может быть и шире, чем область значений функции).

Для того чтобы обозначить значение некоторой функции для некоторого аргумента, обычно пишут имя этой функции и приписывают к нему справа имя аргумента, взятое в скобки. То же самое обозначение применяется, конечно (*mutatis mutandis* ⟨с соответствующими изменениями⟩), с заменой одного или обоих имен на переменную или форму. Так, если f — функция, а x принадлежит к области определения функции f, то $f(x)$ есть значение функции f для аргумента x [40].

Это — обычное обозначение применения функции к аргументу, и мы часто будем использовать его. Однако в некоторых случаях (см. главу X) нам будет удобнее видоизменить это обозначение, иначе расположив скобки. Если f есть функция и x относится к области ее определения, то видоизмененное обозначение значения функции f для аргумента x есть (fx).

До сих пор мы рассматривали только *однозначные сингулярные функции* (и употребляли слово „функция" в этом смысле). В этой книге мы многозначные функции[41] не будем рассматривать вообще, и читатель всегда должен понимать слово „функция" как „однозначная функция". Однако функции более чем одного аргумента будут сейчас рассмотрены.

Бинарная функция, или *функция двух аргументов*[42], характеризуется тем, что она применима к двум аргументам, взятым в определенном порядке, и что, будучи применена таким образом, она дает некоторое значение — *значение* функции *для* этих двух аргументов, взятых в данном порядке. Не требуется, чтобы функция была применима к любым двум вещам, как к аргументам, скорее наоборот — лишь в определенных случаях функция применима к упорядоченным парам вещей, как к аргументам, и все такие упорядоченные пары образуют *область определения* функции. Значения составляют *область значений* функции.

Бинарные функции тождественны (т. е. являются одной функцией), если они имеют одну и ту же область определения и если для каждой упорядоченной пары аргументов, лежащей в этой области, они имеют одно и то же значение.

Чтобы обозначить значение некоторой бинарной функции для данных аргументов, принято писать какое-либо имя этой функции, а рядом справа — имена аргументов в определенном порядке, разделенные запятой и взятые в скобки. Так, например, если f — бинарная функция и упорядоченная пара x и y принадлежит к области ее определения, то $f(x, y)$ есть значение функции f для аргументов x и y, взятых в этом порядке.

Таким же образом можно определить понятие тернарной функции, кватернарной функции и т. д. Вообще, n-арная функция применима к упорядоченной системе n аргументов, и, примененная таким образом, она дает некоторое значение при условии, что упорядоченная система n аргументов принадлежит к области определения функции. Значение n-арной функции для данных аргументов обозначается именем функции, к которому приписываются справа в определенном порядке имена аргументов, взятые в скобки и разделенные запятыми.

Две бинарные функции φ и ψ называются *конверсиями* друг друга (или конверсными друг другу) при выполнении двух следующих условий: (1) упорядоченная пара вещей x и y принадлежит к области определения функции φ тогда и только тогда, когда упорядоченная пара вещей y и x принадлежит к области определения функции ψ; (2) для всех x и y, таких, что упорядоченная пара вещей x и y принадлежит к области аргументов функции φ[43],

$$\varphi(x,\ y) = \psi(y,\ x).$$

Бинарная функция называется *симметричной*, если она тождественна своей конверсии. Понятия конверсии и симметрии могут быть распространены и на n-арные функции; при этом возникает уже несколько понятий конверсии и несколько понятий симметрии, если число аргументов не меньше трех (нам нет нужды останавливаться на деталях этого).

Говоря о некоторой функции, мы будем называть ее функцией *вещей* или *от вещей определенного рода*, если все аргументы, к которым она применима, принадлежат к этому роду вещей. Так, например, сингулярная функция действительных чисел есть функция, отображающая некоторый класс действительных чисел в некоторый (произвольный) класс. Бинарная функция действительных чисел есть бинарная функция, область определения которой состоит из упорядоченных пар действительных чисел (не обязательно из всех упорядоченных пар действительных чисел).

Мы будем употреблять выражение „____ есть функция от ____ ", в котором пустые места заполнены формами[44], в качестве сокращения вместо более подробного „существует функция f, такая, что

$$\underline{\qquad} = f(\underline{\qquad})$$

для всех ____", в котором первые два пустых места заполнены теми же формами и в том же порядке, что и раньше, а последнее пустое место заполнено полным списком свободных переменных этих форм. Аналогично, мы будем употреблять выражение „____ есть функция от ____ и ____", в котором три пустых места заполнены формами, как сокращение вместо выражения „существует бинарная функция f, такая, что

$$\underline{\qquad} = f(\underline{\qquad},\underline{\qquad})$$

для всех ____", где первые три пустых места заполнены теми же формами и в том же порядке, что и выше, а последнее пустое место заполнено полным перечнем свободных переменных этих форм[45].

Такие же выражения будут употребляться, когда речь будет идти о функции f более чем двух аргументов.

Только что разъясненные выражения будут употребляться также с добавлением некоторого условия или ограничения. Например, выражение „____ есть функция от ____ и ____, если ____", в котором первые три пустых места заполнены формами, а четвертое заполнено формулировкой некоторого условия, включающего некоторые или все свободные переменные этих форм[46], есть сокращение вместо следующего выражения: „Существует бинарная функция f, такая, что

$$\_\_\_ = f(\_\_\_, \_\_\_)$$

для всех ___, для которых ___", где первые три пустых места заполнены теми же формами и в том же порядке, что и выше, четвертое пустое место заполнено полным списком свободных переменных этих форм, а пятое пустое место заполнено так, как выше было заполнено четвертое[47].

Та же самая терминология будет употребляться с заменой форм на общие имена[48]. В этих случаях из контекста должны быть восстановлены формы, представленные общими именами. Например, утверждение, что „*плотность гелия* есть функция *температуры* и *давления*", нужно понимать так же, как „*плотность* h есть функция *температуры* h и *давления* h", где три выделенные курсивом формы стоят вместо трех выделенных курсивом исходных общих имен и где h есть переменная, значениями которой являются совокупности газа гелия (так что область ее значений состоит из всех таких совокупностей). Для того чтобы избежать введения переменной h с такой искусственной областью значений, мы можем понимать исходное утверждение и так: „плотность b есть функция температуры b и давления b, если b есть совокупность газа гелия". Аналогично этому, помещенное в конце § 01 утверждение, что денотат имени есть функция смысла, означает (в предположении, что речь идет о некотором фиксированном языке), что существует функция f, такая, что

$$\text{денотат имени } N = f\ (\text{смысл имени } N)$$

для всех имеющих денотат имен N.

Теперь остается рассмотреть отношение между *функциями* в только что рассмотренном абстрактном смысле и *формами* в смысле § 02.

Если предположить, что язык фиксирован, то каждой сингулярной форме соответствует некоторая функция f (которую мы будем называть *присоединенной функцией* данной формы), задаваемая следующим определением, или правилом: значением функции f для аргумента x является значение формы для этого x, взятого в качестве значения ее свободной переменной; при этом областью определения функции f являются все те x, для которых, если их брать в качестве значений свободной переменной формы, эта форма имеет значение[49]. Однако если по-прежнему считать язык фиксированным, то не обязательно, чтобы всякая функция была присоединенной функцией некоторой формы[50].

Из сказанного следует, что две равносильные сингулярные формы с одной и той же свободной переменной имеют одну и ту же присоединенную функцию. Одну и ту же присоединенную функцию имеют также две сингулярные формы, которые отличаются друг от друга только алфавитным обозначением свободной переменной [51], т. е. такие, которые получаются одна из другой путем замены всех вхождений свободной переменной на другую переменную с той же областью значений, при соблюдении, однако, того условия (необходимость этой оговорки станет в дальнейшем яснее), что все появляющиеся в результате подстановки вхождения подставляемой переменной оказываются после подстановки свободными.

В качестве обозначения (т. е. для обозначения) присоединенной функции некоторой сингулярной формы, имеющей, скажем, x своей свободной переменной, мы пишем саму форму и приписываем к ней слева буквы λx. Так же мы поступаем, конечно, и при наличии вместо x любой другой переменной [52]. В случае необходимости применяются скобки [53].

Тривиальным образом обобщая это обозначение, мы будем приписывать буквы λx (λy и т. д.) и к константе, обозначая тем самым функцию, значением которой для всех аргументов является денотат константы и область определения которой совпадает с областью значений переменной x [54]. Такая функция будет по аналогии с выражением „присоединенная функция формы" называться *присоединенной сингулярной функцией* константы, хотя здесь и имеется то отличие, что одна и та же константа может иметь различные присоединенные функции с различными областями определения. Всякая функция, принимающая одно и то же значение для всех аргументов, будет называться *константной функцией* (независимо от того, является ли она присоединенной функцией какой-либо константы в одном из рассматриваемых конкретных языков или нет) [55].

Аналогично присоединенной функции сингулярной формы, бинарная форма имеет две присоединенных бинарных функции — по одной для каждого из двух порядков, в которых можно рассматривать две свободные переменные в функции, или лучше — по одной для каждого из двух возможных способов сопоставления, которыми можно пару аргументов функции поставить в соответствие двум свободным переменным формы.

Две присоединенные функции бинарной формы тождественны и сводятся поэтому к одной функции тогда и только тогда, когда они симметричны. В этом случае сама бинарная форма тоже называется *симметричной* [56].

Точно так же n-арная форма имеет $n!$ n-арных присоединенных функций — по одной для каждой перестановки ее свободных переменных. В случае симметрии того или иного вида некоторые из этих функций могут совпадать.

Если естественным образом обобщить разъяснения, сделанные выше для случая $m = 1$, то нетрудно видеть, что и константа точно так же имеет присоединенные m-арные функции при $m =$

$= 1, 2, \ldots$. Идя дальше по пути обобщения, мы можем говорить о присоединенной m-арной функции n-арной формы при $m > n$. В частности, сингулярная форма имеет не только сингулярные присоединенные функции, но и присоединенные бинарные функции, присоединенные тернарные функции и т. д. (Если, однако, мы говорим просто о присоединенной функции сингулярной формы, то мы имеем в виду присоединенную сингулярную функцию.)

Обозначение с помощью λ присоединенной функции формы, введенное выше для сингулярных функций, легко можно распространить и на m-арные функции [57], но в этой книге у нас не будет случая использовать это распространение. Переход от формы к присоединенной функции (формальную запись которого делает возможным употребление символа λ) мы будем называть *абстракцией*, или, подробнее, *m-арной функциональной абстракцией* (если присоединенная функция m-арна).

Исторически понятие функции развивалось в математике постепенно, и возникновение его проследить трудно. Само слово „функция" было впервые введено Г. В. фон Лейбницем и заимствовано у него Иоганном Бернулли. Обозначение $f(x)$, или fx, с буквой наподобие f в роли функциональной переменной, было введено А. К. Клеро и Леонардом Эйлером. Но первоначально понятие *функции* недостаточно отличали от понятия выражения, содержащего переменные (т. е. от *формы*). Так, Эйлер определяет *функцию переменного количества*, отождествляя ее с аналитическим выражением [58], т. е. с формой в некоторой стандартной системе математических обозначений. Историки математики обычно связывают общее понятие функции с именем Г. Лежёна Дирихле, которого изучение рядов Фурье привело в 1837 г. к большей общности — к освобождению идеи функции от ее прежней зависимости от математического выражения или закона определенного рода [59]. Его понятие функции было воспринято Бернардом Риманом (1851) [60], Германом Ганкелем (1870) [61] и, пожалуй, всеми математиками вообще. Однако на долю Фреге осталось сделать два важных шага [в его *Begriffsschrift* (1879) и последующих работах]: (i) замена расплывчатого понятия переменного количества понятием переменной как символа определенного рода [62]; (ii) допущение функций с произвольными областями определения и отказ от взгляда, будто аргументами и значениями функции могут быть только числа. К (ii) близко примыкает введенное Фреге (в 1879 г.) понятие *пропозициональной функции*, к разъяснению которого мы сейчас переходим.

04. Суждения и пропозициональные функции. Согласно взглядам грамматиков, простейшим выражением в обычных языках является *предложение* ⟨*sentence*⟩. Предложение — это такое соединение слов, которое имеет самостоятельный смысл, т. е. выражает законченную мысль. Если мысль, выражаемая предложением, есть утверждение, то предложение называется *повествовательным*. В дальнейшем мы будем иметь дело только с повествовательными предложениями, поэтому выражение „предложение" всегда следует понимать как повествовательное предложение [63].

Термин *предложение* мы перенесем из обычных языков в формализованные. В логистических системах в смысле § 07 (неинтерпретированные исчисления) термин *предложение* будет каждый раз вводиться специальными определениями с таким, однако, расчетом, чтобы выражения, определяемые как предложения, были как раз теми, которые оказываются предложениями в нашем старом смысле при интерпретировании исчисления как формализованного языка [64].

Для того чтобы описать содержание предложений, мы примем теорию, выдвинутую Фреге, согласно которой предложения суть имена определенного рода. На первый взгляд это кажется неестественным, так как наиболее знакомым употреблением предложений является не просто называние чего-либо, а формулировка утверждений [именно так мы только что выделили (описали) предложения]. Тем не менее можно считать предложения именами, различая при этом утвердительное употребление предложений, с одной стороны, и, с другой стороны, неутвердительное употребление их в качестве имен и в качестве частей более длинных предложений (точно так же, как употребляются другие имена). Даже тогда, когда предложение просто утверждается, мы будем считать его именем, хотя и употребленным таким образом, который невозможен для других имен [65].

Важным преимуществом такого взгляда на предложения является возможность непосредственного применения всех идей и разъяснений §§ 01—03 к предложениям и к связанным с ними вопросам как к частному случаю имен. В дальнейшем нам придется построить самостоятельную теорию содержания предложений, и это построение будет настолько аналогично построениям §§ 01—03, что в конце его отождествление предложений с именами определенного рода, хотя и не поясненное примерами, будет напрашиваться само собой как средство упрощения теории и придания ей единообразия. В частности, мы введем переменные, вместо которых можно подставлять предложения, формы, обращающиеся в предложения при подстановке соответствующих констант вместо их свободных переменных, и присоединенные функции таких форм. Все эти объекты естественным образом занимают свое место в схеме, развернутой в §§ 02—03, если считать предложения частным случаем имен.

Согласившись считать предложения именами, мы переходим, в свете рассмотрений § 01, к изучению вопроса о денотате и смысле предложений.

Как следствие из принципа (2), сформулированного в предпоследнем абзаце § 01, мы легко получаем примеры предложений, которые хотя и отличаются в каком-то смысле друг от друга по содержанию, но должны, очевидно, иметь один и тот же денотат. Так, предложения „сэр Вальтер Скотт есть автор *Вэверлея*" и „сэр Вальтер Скотт есть сэр Вальтер Скотт" должны иметь один и тот же денотат, так как имя „автор *Вэверлея*" заменено другим с тем же денотатом. Точно так же должны иметь один и тот же денотат предложения „сэр Вальтер Скотт есть автор *Вэверлея*" и „сэр Вальтер Скотт есть человек, который написал все двадцать девять Вэверлеевских новелл", так как имя „автор *Вэверлея*" заменено другим именем того же лица. Естественно предположить, что если это последнее предложение и не является синонимом предложения „число, равное числу всех написанных сэром Вальтером Скоттом Вэверлеевских новелл, есть двадцать девять", то во всяком случае эти предложения настолько близки друг к другу, что убедительным становится предположение о тождественности их денотатов. Наконец, из этого последнего предложения мы получаем заменой субъекта на другое имя того же числа уже такое предложение, по-прежнему с тем же денотатом: „число, равное числу графств в штате Юта, есть двадцать девять".

Несмотря на то, что в соответствии с приведенной цепочкой рассуждений предложение „сэр Вальтер Скотт есть автор *Вэверлея*" и предложение „число, равное числу графств в штате Юта, есть двадцать девять", имеют один и тот же денотат, они, как будто, имеют в действительности очень мало общего. Легче всего обнаружить то сходство между ними, что оба они истинны. Рассмотрение дальнейших примеров такого рода быстро приводит нас к заключению, по крайней мере правдоподобному, что все истинные предложения имеют один и тот же денотат. Другие примеры аналогичным образом наводят на мысль, что все ложные предложения также имеют один и тот же денотат (например, предложение „сэр Вальтер Скотт не есть автор *Вэверлея*" должно иметь тот же денотат, что и предложение „сэр Вальтер Скотт не есть сэр Вальтер Скотт").

Поэтому, следуя Фреге, мы постулируем [66] два абстрактных предмета, называемых *истинностными значениями*, — *истину* и *ложь*, и мы объявляем, что все истинные предложения обозначают истинностное значение истину, а все ложные предложения — истинностное значение ложь. Мы будем также говорить, что предложение *имеет* (*принимает*) истинностное значение истину (если оно истинно) или *имеет* (*принимает*) истиностное значение ложь (если оно ложно) [67].

Смысл предложения можно описать как то, что бывает усвоено, когда понято предложение, или как то, что имеют общего два предложения в различных языках, если они правильно переводят друг друга. Как и вообще в случае имен, можно понимать смысл предложения и при этом не знать о его денотате (истинностном значении) ничего, кроме того, что он определяется этим смыслом. В частности, может случиться, что смысл предложения понят, но неизвестно, является ли истина денотатом этого предложения.

Всякий концепт истинностного значения, в содержание которого входит *быть истинностным значением*, называется *суждением* ⟨*proposition*⟩ независимо от того, является ли он смыслом какого-либо предложения в одном из рассматриваемых языков. (Это наш перевод термина Фреге *Gedanke*.)

Таким образом, суждение, в нашем понимании этого термина, есть абстрактный предмет той же степени общности, что и класс, число или функция. Он лишен психологического оттенка, свойственного *propositio mentalis* Уильяма Оккама или традиционному *judgment*: по словам Фреге, объясняющего свой термин *Gedanke*, он обозначает „nicht das subjective Thun des Denkens, sondern dessen objectiven Inhalt, der fähig ist, gemeinsames Eigenthum von Vielen zu sein"*).

Традиционные (послесхоластические) логики имели обыкновение определять суждение ⟨*proposition*⟩ как мнение ⟨*judgment*, выраженное словами, т. е. как лингвистическое образование, как предложение или же как предложение, взятое в связи с его содержанием [68]. Но в обычном английском языке это слово (*proposition*) уже давно употреблялось скорее как содержание (в наших терминах — смысл) предложения [69], и в конце концов и логики начали употреблять этот термин в том же смысле. Таков счастливый результат процесса, который исторически объясняется частично стремлением избежать смешения предложений самих по себе с содержанием предложений. Это дает возможность проводить в английском языке такие различения, которые трудно передать на другом языке, и позволяет перевести термин Фреге *Gedanke* термином, который меньше, чем слово „мысль" ⟨thought⟩ [70], способен вводить в заблуждение.

В соответствии с нашим определением каждое суждение является концептом, т. е. определяет (или, как мы тоже будем говорить, имеет) некоторое истинностное значение. Правда, несколько произвольным является наш отказ называть *суждением* смысл такого предложения (в обычном языке), которое имеет смысл, но не имеет истинностного значения [71]. Здесь наше употребление термина *суждение* отклоняется от употребления у Фреге термина *Gedanke*. Однако этот вопрос никогда не возникнет в связи с формализованными языками, которые мы будем изучать, так как эти языки будут так построены, что всякое имя — и, в частности, всякое предложение — всегда будет иметь денотат.

---

*) „Не субъективная деятельность мышления, но объективное содержание, способное быть достоянием многих". — *Прим. перев.*

Назовем теперь суждение *истинным*, если оно определяет (или имеет) истинностное значение истина, и *ложным*, если оно имеет истинностное значение ложь. Если утверждается предложение, выражающее некоторое суждение, то мы будем говорить, что тем самым *утверждается* само суждение [72].

Переменную, область значений которой составляют два истинностных значения, т. е. такую переменную, вместо которой естественно подставлять предложения (выражающие суждения), мы будем называть *пропозициональной переменной*. У нас не будет случая использовать переменные, значениями которых были бы суждения; для них мы применили бы термин *интенциональная пропозициональная переменная* ⟨*intensional propositional variable*⟩.

Форма, значениями которой являются истинностные значения (и которая превращается поэтому в предложение при подстановке соответствующих констант вместо ее свободных переменных), называется *пропозициональной формой*. Обычно предпочитают этот термин [73] термину *истинностная форма* ⟨*truth-value form*⟩, отражая, таким образом, в названии формы скорее то, что выражается при подстановке констант на место переменных, чем то, что при этом обозначается.

Если пропозициональная форма принимает значение истина для некоторого значения ее свободной переменной или для некоторого набора значений ее свободных переменных, то мы говорим, что форма *удовлетворяется* (или *выполняется*) этим значением или этим набором значений ее свободных переменных. [Точнее мы должны были бы говорить о наборе значений переменных, удовлетворяющем (или выполняющем) форму *в данном языке*, однако ссылку на конкретный язык можно опустить, когда он ясен из контекста.] Можно также называть форму *истинной* или *ложной* при данном значении ее свободной переменной или при данном наборе значений ее свободных переменных в зависимости от того, является ли истина или ложь ее значением для этого набора значений ее свободных переменных.

Функция, область значений которой состоит исключительно из истинностных значений, т. е., в частности, и всякая присоединенная функция пропозициональной формы, называется *пропозициональной функцией*. И здесь мы предпочтем этот термин, оправданный существующей практикой [74], термину „истинностнозначная функция", несмотря на то, что последний был бы аналогом, например, термина „числовая функция", обозначающего функцию, значениями которой являются числа.

Мы говорим, что пропозициональная функция *удовлетворяется* (или *выполняется*) данным аргументом (или упорядоченным набором аргументов), если она принимает значение истина для данного аргумента (или упорядоченного набора аргументов). Мы можем также сказать в этом случае, что пропозициональная функция *верна* для данного аргумента или упорядоченного набора аргументов.

Мы предполагаем, что понятие *класса* знакомо читателю, по крайней мере неформально, по его употреблению в математике. (Слова *множество, совокупность* обычно употребляются как синонимы *класса*, но мы не будем этого делать, так как впоследствии в связи с аксиоматической теорией множеств Цермело [75] нам нужно будет придать слову *множество* специальное содержание, несколько отличное от содержания слова класс.) Напомним, что класс есть нечто, имеющее или могущее иметь *элементы*, и что классы считаются тождественными тогда и только тогда, когда они имеют в точности одни и те же элементы. Далее, в математической практике принято считать, что каждой сингулярной пропозициональной форме соответствует определенный класс, а именно класс, элементами которого являются те значения свободной переменной, для которых форма истинна.

В связи с функциональными исчислениями глав III—VI или, скорее, в связи с формализованными языками, которые получаются из этих исчислений принятием одной из указываемых там главных интерпретаций (§ 07), оказывается, что можно сохранить все необходимое из относящегося к классам, если просто отождествить класс с сингулярной пропозициональной функцией, а принадлежность к классу — с выполнением этой сингулярной пропозициональной функции. Мы условимся об этом отождествлении, так как сохранение различия между классами и сингулярными пропозициональными функциями не дает никаких преимуществ.

Нужно тут же добавить, что понятие класса, полученное таким отождествлением классов с сингулярными пропозициональными функциями, не вполне совпадает с содержательным представлением о классе, которое было нами ранее описано, так как теперь нарушается принцип, согласно которому классы совпадают, если они имеют одни и те же элементы. Теперь необходимо учитывать также и *элементы области определения класса* (то есть элементы, образующие область определения соответствующей сингулярной пропозициональной функции), и только тогда, когда известно, что элементы области определения одни и те же, сохраняется принцип, по которому для совпадения классов достаточно, чтобы у них были одни и те же элементы. Как мы впоследствии выясним [76], те или иные отклонения от содержательного понятия класса все равно необходимы, так как при некоторых предположениях, от которых трудно отказаться, оно оказывается противоречивым и ведет к антиномиям. (Теория множеств Цермело сохраняет принцип совпаденния множеств, имеющих одни и те же элементы, но зато вынуждена принести в жертву принцип, согласно которому всякой сингулярной пропозициональной функции соответствует множество.)

Так как класс есть сингулярная пропозициональная функция, то мы будем говорить об *области определения* класса, так же как мы говорили об области определения сингулярной пропозициональной функции (это попросту одно и то же). Эту область мы также будем считать классом, областью определения которого является область определения данного класса и элементы которого совпадают с элементами этой области определения.

(В дальнейшем при отсутствии прямых указаний на противоположное следует считать, что все классы, упоминаемые в каком-либо рассуждении, имеют одну и ту же область определения, которая предполагается заранее фиксированной.)

Таким же образом можно описать и *отношения*, отождествляя их с бинарными пропозициональными функциями и говоря, что отношение *имеет место между* элементами упорядоченной пары вещей (или что вещи *находятся* в данном отношении друг к другу или между собой), если бинарная пропозициональная функция удовлетворяется этой упорядоченной парой вещей. Из этого следует, что в предположении совпадения областей определения для тождественности двух отношений необходимо и достаточно, чтобы они имели место между элементами одних и тех же упорядоченных пар вещей. Чтобы указать на это обстоятельство, мы могли бы говорить более подробно об *отношении в объемном*, или *экстенциональном понимании*, считая этот термин синонимом *отношения*.

Свойство, как оно обычно понимается, отличается от класса единственно или главным образом тем, что два свойства могут быть различными несмотря на то, что они определяют один и тот же класс (где под классом, определяемым данным свойством, понимается класс, элементами которого являются вещи, обладающие этим свойством). Поэтому мы отождествляем свойство с *концептом* класса в смысле § 01 и будем называть два свойства *равнообъемными* или *совпадающими по объему*, если они определяют один и тот же класс.

Аналогично этому *отношение в интенциональном понимании* — это *концепт отношения*, т. е. концепт отношения в экстенциональном понимании.

Вновь прибегнем к теории действительных чисел и ее символике для того, чтобы привести примеры пропозициональных форм:

$$\sin x = 0, \qquad \sin x = 2,$$

$$e^x > 0, \quad e^x > 1, \quad x > 0,$$

$$\varepsilon > 0, \qquad \varepsilon < 0,$$

$$x^3 + y^3 = 3xy, \qquad x \neq y,$$

$$|x - y| < t, \qquad |x - y| < \varepsilon,$$

$$\text{если } |x - y| < \delta, \text{ то } |\sin x - \sin y| < \varepsilon$$

Здесь мы используем x, y, t в качестве переменных, область значений которых составляют действительные числа, а ε и δ — в качестве переменных, область значений которых составляют положительные действительные числа. Семь форм, стоящих в трех первых строках, являются примерами сингулярных пропозициональных форм. Формы третьей строки бинарны, четвертой—тернарны; последняя строка дает пример кватернарной формы.

Каждой сингулярной пропозициональной форме соответствует определенный класс. Так, форме $\sin x = 0$ соответствует класс тех действительных чисел, синус которых равен нулю, т. е. класс, область определения которого состоит из действительных чисел и элементами которого являются 0, π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π и т. д. Как было разъяснено выше, мы отождествляем этот класс с пропозициональной функцией $\lambda x\,(\sin x = 0)$, или, иными словами, с функцией, отображающей множество действительных чисел в истинностные значения и для всякого аргумента x принимающей значение $\sin x = 0$.

Пропозициональным формам $e^x > 1$ и $x > 0$ соответствует один и тот же класс, а именно класс, область определения которого состоит из действительных чисел и элементами которого являются положительные действительные числа. Этот класс отождествляется с $\lambda x\,(e^x > 1)$ или с $\lambda x\,(x > 0)$. В свою очередь, эти функции тождественны друг другу в соответствии с соглашением о тождественности функций, принятым в § 03.

Так как пропозициональная форма $\sin x = 2$ имеет значение ложь для любого значения переменной x, то соответствующий класс $\lambda x\,(\sin x = 2)$ не имеет ни одного элемента.

Класс, который не имеет элементов, называется *пустым классом*. Из наших соглашений о тождественности пропозициональных функций и классов следует, что если фиксирована область определения, то существует лишь один пустой класс. Однако область определения пустого класса, соответствующего форме $\sin x = 2$, и область определения пустого класса, соответствующего форме $\varepsilon < 0$, различны: первая состоит из действительных чисел, а вторая из положительных действительных чисел[77]. В соответствии с этим мы будем говорить о „пустом классе действительных чисел" и о „пустом классе положительных действительных чисел".

Класс, который совпадает со своей областью определения, называется *универсальным классом*. Например, класс, соответствующий форме $e^x > 0$, является универсальным классом действительных чисел, а класс, соответствующий форме $\varepsilon > 0$, является универсальным классом положительных действительных чисел.

Бинарные пропозициональные формы $x^3 + y^3 = 3xy$ и $x \neq y$ симметричны, и поэтому каждая из них имеет по одной присоединенной бинарной пропозициональной функции, или отношению. В частности, присоединенное отношение формы $x \neq y$ есть отношение различия действительных чисел, то есть такое отношение с областью определения, состоящей из пар действительных чисел, что каждые два различных действительных числа находятся друг к другу в этом отношении и никакое действительное число не находится в этом отношении к самому себе.

Тернарные пропозициональные формы $|x - y| < t$ и $|x - y| < \varepsilon$ имеют каждая по три присоединенных тернарных пропозициональных функции[78] (так как они симметричны по x и y). Все эти шесть пропозициональных функций различны между собой. Однако из этих функций можно так выбрать пару, для каждой формы по одной присоединенной функции, что они окажутся согласованными по значению для каждой упорядоченной тройки аргументов, которая лежит в области аргументов как одной, так и другой, и будут отличаться только тем, что первая будет принимать значение ложь для некоторых троек, которые не лежат в области аргументов второй.

05. Несобственные символы, связки. Мы видели, что если разлагать выражения, например предложения какого-либо языка, на простые символы, которые уже можно считать неразложимыми в том смысле, что их дальнейшее членение не оправдывается содержанием [79], то могут, в частности, появиться два рода символов, а именно — исходные собственные имена и переменные. Мы называем их *собственными символами* и считаем, что они имеют какое-то содержание, даже взятые сами по себе: исходные имена — потому что они что-то обозначают (или по крайней мере задуманы, чтобы что-то обозначать), переменные — потому что они имеют (или по крайней мере задуманы, чтобы иметь) непустую область значений. Но, помимо символов собственных, должны встречаться также *несобственные* символы, или, по традиционной терминологии (схоластической и досхоластической), *синкатегорематические* символы, т. е. такие, которые не имеют самостоятельного содержания, но в сочетании с собственными символами (одним или несколькими) образуют сложные выражения, уже имеющие самостоятельное содержание [80].

Среди несобственных символов обращают на себя внимание скобки различных видов, которые употребляются (как обычно в математической символике) для указания того, как объединяются между собой различные части выражения. Эти скобки участвуют в различного рода комбинациях несобственных символов, к рассмотрению которых мы сейчас переходим, и могут либо играть в них роль простых указателей объединения, в то время как специальный характер обозначения выражается другими символами [81], либо сочетать функции указателей объединения с функциями придания обозначению специального содержания [82].

Связки — это комбинации несобственных символов, которые в сочетании с одной или многими константами образуют (или дают) новые константы. Если теперь одну или несколько этих констант заменить такими формами, которые в числе своих значений содержат денотаты заменяемых констант, то, как это следует из сказанного в § 02, совокупное выражение превратится из константы в форму. Свободными переменными этой составной формы будут свободные переменные всех тех форм, которые, соединенные с помощью связки как между собой, так, быть может, и с некоторыми константами, образуют составную форму. Для того чтобы полностью описать свойство какой-либо определенной связки (в каком-либо определенном языке), заключающееся в способности образовывать новое содержание, недостаточно указать денотаты [83] для всех новых констант, получающихся в результате всех допустимых сочетаний связки с одной или несколькими константами. Нужно также для каждой формы, получающейся в результате использования связки в сочетании с формами или в сочетании с формами и константами, задать полную схему ее значений при различных наборах значений ее свободных переменных. И все это должно, конечно, находиться в соответствии с допущениями о смысле и денотате, сделанными в конце § 01, и со сказанным в § 02 о содержании и значении переменных и форм. Связки могут тогда употребляться не только в языках, содержащих константы, но и в таких языках, единственными собственными символами которых являются переменные [84].

Константы или формы, соединяемые связкой с целью получения результирующей константы или формы, называются *операндами*. Связка называется *сингулярной*, *бинарной*, *тернарной* и т. д. в соответствии с числом ее операнд.

Операндой сингулярной связки может быть переменная с соответствующей областью значений (это согласуется с только что сделанными разъяснениями, так как переменная есть, конечно, частный случай формы). Если при этом область значений переменной содержит денотаты всех констант и подходящие значения всех форм, которые могут быть операндами связки, то результирующая форма называется *присоединенной формой* связки. (Под *подходящим* значением формы, используемой в качестве операнды, мы понимаем такое ее значение, для которого имеет некоторое значение совокупная форма, состоящая из связки и операнды.) *Присоединенной функцией* сингулярной связки мы называем присоединенную функцию всякой присоединенной формы. Определяемая таким образом присоединенная функция, как легко видеть, единственна.

Можно говорить о присоединенной функции сингулярной связки и в том случае, когда язык не содержит переменной с необходимой для получения присоединенной формы областью значений. Для этого достаточно рассмотреть язык, получающийся присоединением нужной переменной.

Точно так же для получения формы можно использовать и n-арные связки с n различными переменными в качестве операнд. Если при этом область значений каждой переменной содержит денотаты всех констант и подходящие значения всех форм, которые могут быть использованы в качестве операнд на этом месте, то результирующая форма называется *присоединенной формой* связки. *Присоединенной функцией* связки называется такая присоединенная функция присоединенной формы, которая получается, если упорядоченный набор ее аргументов приписывать в качестве значений свободным переменным формы, взятым в порядке их вхождения в форму слева направо.

Вообще, характер связки, проявляющийся в образовании нового содержания, легче всего определяется как раз заданием присоединенной функции, так как этого достаточно для полного фиксирования употребления связки [85].

Существует тесная связь между связками и *функциональными константами*, т. е. собственными именами функций. Различия между ними заключаются в том, что (а) функциональной константой функция *определяется*, в то время как для связки она является *присоединенной*, (b) связка никогда не замещается переменной и (c) наряду с обозначением для применения функции к ее аргументам может параллельно существовать другое обозначение, когда соответствующая связка занимает место функциональной константы. Однако эти различия можно в значительной степени считать несущественными, потому что (a) обозначения имеют, конечно, то содержание, которое мы им даем (в пределах, устанавливаемых требованием непротиворечивости и адэкватности), (b) можно рассматривать языки, в которых нет переменных, значениями которых могли бы быть функции, и в которых функциональные константы никогда не замещаются переменными, и (c) обозначение применения функции к ее аргументам может быть изменено, как и всякое другое обозначение, или даже дублировано введением в один и тот же язык различных равнозначных обозначений [86].

Ясно, что в тех случаях, когда язык содержит обозначения для применения функции к ее аргументам, часто можно устранить ту или иную связку, т. е. полностью отказаться от ее употребления, используя вместо нее имя присоединенной функции, которое в случае нужды добавляется к словарю языка. На этом пути, однако, никогда нельзя добиться полного исключения из языка всех связок. Действительно, знаки применения сингулярной функции к ее аргументу, применения бинарной функции к ее аргументам и т. д. (например, те, которые были введены в § 03) сами являются связками. Хотя эти связки, подобно всем остальным, имеют, конечно, свои присоединенные функции [87], тем не менее указанным приемом невозможно исключить их все [88].

Описанным способом всегда, очевидно, можно устранить из какого-либо языка все встречающиеся в нем связки, отличные от знаков применения функций к их аргументам. Это достигается соответствующим достаточным расширением языка, к которому в случае необходимости присоединяются и сами знаки для обозначения применения функций к их аргументам. Тем не менее эти устранимые связки все же часто употребляются, особенно в формализованных языках с ограниченным словарем, в которых эту ограниченность желательно почему-либо сохранить, скажем для того, чтобы языком можно было пользоваться как средством выделения какой-либо специальной ветви логики или другого предмета с целью самостоятельного его рассмотрения.

В частности, мы встретим в главе I *сентенциональные связки*. Это такие связки, которые употребляются совместно с одним или несколькими предложениями для образования новых предложений. Если же роль операнд вместо некоторых или всех предложений играют пропозициональные формы, то мы получаем не предложение, а пропозициональную форму.

Основной *сингулярной* сентенциональной связкой, которая нам потребуется, является связка для отрицания. В формализованных языках мы будем употреблять для этой цели единый символ $\sim$, который, будучи приписан слева к предложению, будет образовывать новое предложение, являющееся отрицанием первого. Присоединенной функцией этой связки является функция, отображающая истинностные значения в истинностные значения и принимающая значение *истина* для аргумента *ложь* и значение *ложь* для аргумента *истина*. Для удобства чтения выражений формализованного языка можно символ $\sim$ передавать словом „не" или сочетанием слов „неверно, будто . . ." и „ложно, что . . ." и т. п.

Основные *бинарные* сентенциональные связки указаны в таблице, помещенной ниже. В первом столбце помещены обозначения, которые мы будем употреблять в формализованных языках, причем предполагается, что пустые места должны быть заполнены предложениями рассматриваемого языка. Во втором столбце помещены фразы, одна или две, которыми эти связки могут быть воспроизведены устно. Здесь предполагается, что пустые места должны быть заполнены устными воспроизведениями взятых в том же порядке предложений, которые заполняют пустые места в связках. Слова, стоящие в скобках, можно обычно опускать для краткости, но в тех случаях, когда нужно избежать возможного недоразумения или подчеркнуть какое-либо различие, эти слова должны быть восстановлены. В третьем столбце задана присоединенная функция связки. Это задание осуществлено с помощью кодовой последовательности из четырех букв следующим образом: буква t обозначает истину, буква f — ложь; первая буква последовательности указывает значение функции для аргументов t, t, вторая буква последовательности — значение функции для аргументов t, f, третья буква — для аргументов f, t, четвертая — для аргументов f, f. В четвертом столбце стоят имена (одно или несколько) связки или ее присоединенной функции*).

$[\_ \vee \_]$	_ или _ (или и то и другое вместе);	tttf	(неразделительная) дизъюнкция;
$[\_ \subset \_]$	_, если _[89];	ttft	обратная импликация;
$[\_ \supset \_]$	если _, то _[89];	tftt	(истинностный) условный союз[90]; (материальная) импликация;

---

*) В подлиннике вместо этой фразы стоят две фразы, перевод которых таков: „Во многих случаях имеется общеупотребительное английское имя, которое может обозначать либо саму связку, либо ее присоединенную функцию. Это показано в четвертом столбце таблицы; если в употреблении находятся альтернативные имена, приводятся оба, а в некоторых случаях, когда употребительного имени нет, таковое предлагается". — *Прим. перев.*

	_ (материально) имплицирует _, _ (материально) влечет _[89];		
[_ ≡ _]	_ тогда и только тогда, когда _[89]; _ (материально) эквивалентно _[89];	tfft	(истинностный) биусловный союз[90],(материальная) эквивалентность;
[_ _]	_ и _;	tfff	конъюнкция;
[_ | _]	_ и _ несовместны; неверно, что _ и _;	fttt	антиконъюнкция, отрицание конъюнкции, неконъюнкция, штрих Шеффера;
[_ ≢ _]	_ или _, но не то и другое вместе; _ не (материально) эквивалентно _[89];	fttf	разделительная дизъюнкция, (материальная) антиэквивалентность, неэквивалентность, отрицание (материальной) эквивалентности;
[_ ⊅ _]	_, но не _;	ftff	(материальная) антиимпликация неимпликация, отрицание (материальной) импликации;
[_ ⊄ _]	не _, а _;	fftf	обратная антиимпликация, неимпликация, отрицание обратной импликации;
[_ $\bar{\vee}$ _]	ни _, ни _;	ffft	антидизъюнкция, недизъюнкция, отрицание дизъюнкции.

Обозначения, используемые нами для сентенциональных связок, так же как и обозначения, используемые для кванторов (см. ниже), являются адаптацией символики Уайтхеда и Рассела, использованной ими в *Principia Mathematica* (которая в свою очередь частично заимствована у Пеано). Однако употребительны также и различные другие системы обозначений[91], и тот, кто хотел бы сравнить работы различных авторов, должен выработать известную легкость в переходе от одной системы обозначений к другой.

Квадратные скобки, которые включены нами в эти обозначения как их составные элементы, могут в действительности оказаться во многих случаях ненужными. В таких случаях мы будем их просто опускать (конечно, рассматривая это лишь как практически удобное сокращение).

Если область определения n-арной пропозициональной функции истинностных значений состоит из всех упорядоченных наборов, составленных из n истинностных значений, то такую функцию мы будем называть *истинностной функцией* [92]. Так, например, всякая присоединенная функция сентенциональной связки есть истинностная функция. То же самое относится ко всякой присоединенной функции такой формы, которая построена из одних только пропозициональных переменных с помощью многократного применения сентенциональных связок[93].

06. Операторы, кванторы. *Оператор* — это такая комбинация несобственных символов, которая, будучи употреблена совместно с одной или несколькими переменными — так называемыми *операторными переменными* (их число должно быть фиксировано и все они должны быть различны), — а также с одной или несколькими константами, или формами, или и тем и другим — так называемыми *операндами*, — дает новую константу или новую форму. Операторные переменные, стоящие в новой константе или новой форме на некоторых определенных местах, не являются свободными переменными, несмотря на то, что на этих же местах в операндах они могли быть свободными переменными.

Чтобы объяснить это подробнее, заметим, что во всяком конкретном случае применения какого-либо оператора операторные переменные могут (и обычно будут) встречаться как свободные переменные в одной из операнд. Мы различаем три типа вхождений операторных переменных в образованную с помощью оператора константу или форму, а именно: вхождение в одну из операнд, являющееся, если рассматривать эту операнду саму по себе, вхождением в качестве свободной переменной; прочие вхождения в одну из операнд; вхождения непосредственно в качестве операторных переменных, т. е. помимо операнд. В новой константе или форме вхождения двух последних типов никогда не бывают вхождениями в качестве свободной переменной, а вхождения первого типа являются или не являются вхождениями в качестве свободных переменных в соответствии с некоторым правилом, связанным с каждым конкретным оператором [94]. Простейший случай — это тот, когда в новой константе или форме никакие вхождения операторных переменных не являются свободными. В последующих главах мы будем встречаться только с этим случаем (хотя многие обычные в математической символике операторы под него и не подпадают).

Переменные, имеющие такие вхождения в константы или формы, которые в соответствии со сказанным не являются вхождениями свободных переменных, называются *связанными переменными* этой константы или формы [95]. Различие между связанными и свободными переменными выражается в следующем. Форма, содержащая некоторую переменную, скажем x, в качестве *свободной переменной*, принимает значения для значений этой переменной.

Если же переменная x входит в константу или форму *только* в качестве *связанной переменной*, то содержание константы или формы не зависит от x — и при этом не в том смысле, что константа или форма принимают одно и то же значение для всех значений переменной x, а в том смысле, что приписывание переменной x частных значений вообще бессмысленно [96)].

Может случиться, что какая-либо форма содержит как свободные, так и связанные вхождения одной и той же переменной. Это может быть, например, результатом объединения с помощью бинарной связки какой-либо формы, содержащей некоторую переменную в качестве свободной переменной, с константой или формой, содержащей ту же самую переменную в качестве связанной переменной [97)].

Как и по отношению к связкам, мы предполагаем, что на операторы распространяются допущения (1)—(3) конца § 01 и что операторы подчинены соглашениям о смысле и значении переменных, сформулированным в § 02, в частности допущению (4) § 02 [98)].

Оператор называется *m-арно-n-арным*, если он применяется с m различными операторными переменными и n операндами [99)]. Самым распространенным является сингулярно-сингулярный оператор, который мы будем называть *простым* оператором.

Простым оператором является, в частности, обозначение, введенное в § 03 для сингулярной функциональной абстракции (переменная, стоящая непосредственно после буквы λ, является операторной переменной). Мы будем называть его *оператором абстракции* или, подробнее, *оператором сингулярной функциональной абстракции*. Как мы увидим в главе X, в определенных случаях к нему могут быть сведены все остальные операторы [100)].

Другим оператором (тоже простым), которым мы будем пользоваться, является *оператор дескрипции*, или *оператор описания* (ι). Пусть, например, x является операторной переменной. Тогда содержание обозначения (ιx) можно приблизительно передать словами „тот x, который". Более подробно содержание этого обозначения можно разъяснить следующим образом. Может случиться, что некоторая сингулярная пропозициональная форма, свободной переменной которой является x, принимает значение истина для точно одного значения переменной x. В этом случае, приписывая слева к форме (ιx), мы получаем имя этого значения переменной x. Если же форма принимает значение истина для многих значений переменной x или, наоборот, не принимает значения истина ни для каких значений переменной x, то содержание имени, получающегося приписыванием (ιx) к форме, можно понимать по-разному: по аналогии с английским и другими естественными языками можно было бы считать, что в этом случае имя обладает смыслом, не определяющим никакого денотата, однако мы предпочтем выбрать некоторое фиксированное значение переменной x и считать его денотатом имени во всех подобных случаях (этот выбор произволен, но должен быть сделан раз и навсегда для всякой употребляемой области значений переменных).

Особое значение для нас имеют *кванторы*. Это такие операторы, операндами которых являются предложения или пропозициональные формы и которые дают в качестве новых констант или форм опять-таки предложения или пропозициональные формы.

В качестве *квантора общности* (или *всеобщности*) мы употребляем (если операторной переменной является, например, x) знак $(\forall x)$ или (x), приписываемый слева к операнде. Квантор общности является, следовательно, простым оператором. Его содержание можно описать следующим образом (операторной переменной пусть по-прежнему будет x). (x) __ истинно, если __ принимает значение истина для всех значений переменной x, и (x) __ ложно, если существует хотя бы одно значение x, такое, для которого __ принимает значение ложь. Здесь все четыре пропуска должны быть заполнены одной и той же сингулярной пропозициональной формой, содержащей x в качестве свободной переменной. Если же пропуск заполнен предложением, то (x) __ истинно тогда и только тогда, когда __ истинно. (Из сказанного в § 02 читатель сам сможет вывести содержание этого обозначения для тех случаев, когда пропуск заполнен пропозициональной формой, содержащей, помимо x, еще другие свободные переменные.)

Точно так же квантор существования — простой оператор; мы будем обозначать его знаком $(\exists\ )$, заполняя пропуск операторной переменной и приписывая все слева к операнде. Возьмем опять x в качестве операторной переменной. Тогда $(\exists x)$ __ истинно, если __ принимает значение истина хотя бы для одного значения переменной x, и $(\exists x)$ __ ложно, если __ для всех значений переменной x принимает значение ложь. Как и выше, пропуск должен быть заполнен сингулярной пропозициональной формой, содержащей x в качестве свободной переменной. Если же мы заполним пропуск предложением, то $(\exists x)$ __ истинно тогда и только тогда, когда __ истинно.

Обозначения (x) и $(\exists x)$ можно читать соответственно как „для всех x" (или „для всякого x") и „существует x, такое, что".

Чтобы проиллюстрировать применение кванторов общности и существования, в особенности их совместное применение, рассмотрим бинарную пропозициональную форму

$$[xy > 0],$$

где x и y являются действительными переменными, т. е. переменными, областью значений которых являются действительные числа. Эта форма выражает положительность произведения двух действительных чисел x и y и выражает поэтому некоторое конкретное суждение каждый раз, когда переменным x и y приписываются значения. Если к этой форме применить квантор существования с y в качестве операторной переменной, то мы получим сингулярную пропозициональную форму

$$(\mathrm{E}y)[xy > 0].$$

В дальнейшем нам часто будет удобно заменять квадратные скобки большой точкой, считая, что область действия такой точки начинается с того места, где она стоит, и простирается вправо от нее. В этих обозначениях полученную форму можно переписать так:

$$(\mathrm{E}y)\,\blacksquare\, xy > 0.$$

Эта сингулярная форма утверждает о действительном числе x, что существует такое действительное число y, которое с x дает положительное произведение. Поэтому каждый раз, когда переменной x приписывается значение, эта форма выражает некоторое суждение. Если мы применим к этой форме квантор общности с операторной переменной x, то мы получим предложение

$$(x)\,(\exists y)\,\blacksquare\, xy > 0.$$

Оно выражает суждение, что для всякого действительного числа существует некоторое действительное число, такое, что их произведение положительно. Это предложение нужно отличать от предложения

$$(\mathrm{E}y)\,(x)\,\blacksquare\, xy > 0,$$

выражающего суждение, что существует действительное число, произведение которого на всякое действительное число положительно. В данном случае оказывается, что оба предложения ложны[101)], но все же их нужно отличать друг от друга. Для того, чтобы резче выявить отличия, являющиеся результатом изменения порядка кванторов, заменим произведение на сумму и рассмотрим два следующих предложения:

$$(x)(\exists y)\,\blacksquare\, x + y > 0,$$

$$(\exists y)(x)\,\blacksquare\, x + y > 0.$$

Из этих двух предложений первое истинно, а второе ложно[102)].

Читателю должно быть интуитивно ясно, что при наличии в формализованном языке отрицания нет нужды сохранять в нем одновременно оба квантора — квантор общности и квантор существования. В самом деле, вместо $(\mathrm{E}x)$ ___ можно было бы всюду писать $\sim (x) \sim$ ___ ; аналогично вместо (x) ___ можно было бы всюду писать $\sim (\exists x) \sim$ ___. То же самое верно, разумеется, и в том случае, когда x заменена какой-либо другой переменной.

В большинстве исследований квантор общности или квантор существования — или даже оба вместе — принимаются за основные, и специальные обозначения для них предусматриваются уже при задании формализованного языка. Все прочие кванторы определяются затем в терминах этих основных (примерно так, как мы только что выражали друг через друга кванторы общности и существования). Нельзя привести никаких неоспоримых соображений в пользу того, чтобы именно эти два квантора предпочесть всем остальным, которые с таким же успехом могли быть взяты за основные. Однако именно сделанный выбор часто бывает удобен.

Применение к операнде одного или нескольких кванторов (в частности кванторов существования и общности) называется *квантификацией*[103].

Другим квантором является сингулярно-бинарный квантор, для которого мы примем обозначение $[\_\_ \supset \_\_]$, где пропуски заполняются операндами и где к знаку $\supset$ справа внизу приписывается операторная переменная. Описать этот квантор можно, сказав, что $[\_\_ \supset_x \_\_]$ означает то же самое, что $(x)\, [\_\_ \supset \_\_]$, причем предполагается, что пропуски в обоих случаях заполнены одними и теми же пропозициональными формами или предложениями, взятыми в одном и том же порядке. Сказанное относится, конечно, и к тем случаям, когда вместо x взята какая-либо другая переменная. Этот квантор мы будем называть *формальной импликацией*[104]. Тем же именем мы будем называть и его присоединенную функцию, т. е. одну из двух присоединенных функций (скажем) формы $[F(u) \supset_u G(u)]$, где u — переменная с некоторой заданной областью значений, а F и G — переменные с областью значений, состоящей из всех классов (сингулярных пропозициональных функций), области определения которых совпадают с областью значений переменной u.

Рассмотрим теперь квантор, который называется (как и его присоединенная функция) *формальной эквивалентностью*[104]. Мы будем записывать его так: $[\_\_ \equiv \_\_]$, заполняя пропуски операндами и приписывая операторную переменную справа внизу к знаку $\equiv$. Этот квантор можно описать, сказав, что $[\_\_ \equiv_x \_\_]$ означает то же самое, что $(x)\, [\_\_ \equiv \_\_]$, где пропуски предполагаются в обоих случаях заполненными операндами квантора, взятыми в определенном порядке. Сказанное остается, разумеется, в силе и тогда, когда вместо x стоит какая-либо другая переменная.

Мы будем также пользоваться кванторами, сходными с только что описанными, но имеющими две и более операторных переменных. Их мы будем называть *бинарной формальной импликацией*, *бинарной формальной эквивалентностью*, *тернарной формаль-*

ной импликацией и т. д. Например, бинарную формальную импликацию можно описать, сказав, что [— $\supset_{xy}$ —] означает то же самое, что $(x)(y)$ [— $\supset$ —], где в обоих случаях пропуски заполнены операндами, взятыми в определенном порядке. Предполагается, разумеется, что это определение остается в силе и для любых других отличных друг от друга переменных вместо x и y. Аналогично определяются бинарная формальная эквивалентность [— $\equiv_{xy}$ —], тернарная формальная импликация [— $\supset_{xyz}$ —] и т. д.[105].

Обычно считается возможным утверждать не только предложения (как это было рассмотрено в § 04), но и пропозициональные формы, причем такие утверждения рассматриваются (несмотря на присутствие свободных переменных в утверждаемом выражении) как некоторые конкретные утверждения. Это принято особенно в математических текстах, где, например, утверждение равенства $\sin(x+2\pi)=\sin x$ может быть использовано как средство утверждать его верность для всех действительных x или утверждение неравенства $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ может быть использовано для утверждения того, что для всяких действительных x и y сумма их квадратов не меньше их удвоенного произведения.

Очевидно, что в формализованных языках, в которых можно пользоваться квантором общности, нет нужды допускать утверждение выражений, содержащих свободные переменные. Например, вместо того чтобы утверждать пропозициональную форму

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy,$$

можно было бы утверждать предложение

$$(x)(y) \,\blacksquare\, x^2+y^2 \geqslant 2xy.$$

С другой стороны, допущение утверждения пропозициональных форм само по себе еще не избавляет от необходимости применять кванторы, потому что утверждение таких выражений, как, например,

$$\sim (x)(y) \,\blacksquare\, \sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)^{106)}$$

или как

$$(y)[|x| \leqslant |y|] \supset_x \blacksquare\, x = 0,$$

воспроизвести без кванторов было бы невозможно.

Поэтому есть довольно веские основания считать, что введение утверждающих пропозициональных форм приводит к ненужному дублированию способов выражения одних и тех же вещей и что из формализованных языков такие формы следует исключить[107]. Тем не менее оказывается, что использование таких форм часто облегчает построение формализованного языка, упрощая некоторые детали, и, кроме того, позволяет более естественным и понятным образом выделить такие ограниченные системы, как исчисление суждений (глава I) или функциональное исчисление первого порядка (глава III), из содержащих их более обширных систем. Поэтому мы в дальнейшем будем свободно пользоваться утверждением пропозициональных форм. Однако в таких системах, как функциональное исчисление порядка ω (глава VI) или теория множеств Цермело (глава XI), мы будем после рассмотрений с использованием таких утверждений вкратце указывать способ обойтись без них.

07. Логистический метод. Для того чтобы построить формализованный язык, мы должны, конечно, воспользоваться каким-либо уже известным нам языком, например русским*) или какой-нибудь его частью, и в терминах этого языка образовать словарь и сформулировать правила формализованного языка. Это аналогично тому, с чем читатель знаком по изучению другого языка, когда, например, используется латинская грамматика, написанная по-русски[108]. Однако построение формализованного языка отличается тщательностью, с которой формулируются правила, отсутствием неправильностей и исключений и, наконец, тем, что при построении формализованного языка мы преследуем цель воплотить в его правилах определенную теорию, или систему, логического анализа (ср. § 00).

Часто наш интерес к формализованным языкам будет связан не столько с их действительным практическим использованием в качестве языка, сколько с общей теорией такого использования и его принципиальными возможностями. Поэтому нам часто придется использовать один язык для того, чтобы говорить на нем о другом языке, причем не только в процессе построения формализованных языков, но и для того, чтобы формулировать теоретические высказывания о возможностях такого формализованного языка. Каждый раз, когда мы будем пользоваться каким-либо языком для того, чтобы говорить о нем самом или о другом языке[109], мы будем этот последний язык называть *языком-объектом*, или *объектным языком*, а первый — *метаязыком*[110].

При построении формализованного языка мы начинаем с использования определенной части русского языка. Мы не будем пытаться точно определить границы используемой при этом части и укажем ее лишь приблизительно, сказав, что она как раз достаточна для того, чтобы дать нам возможность описать общие правила манипулирования с конкретными физическими объектами (таким конкретным физическим объектом является каждый

*) В оригинале речь идет об английском языке. — *Прим. перев.*

пример или каждое вхождение всякого символа нашего языка, например чернила на листе бумаги). Таким образом, это язык, имеющий дело с предметами повседневного человеческого опыта и выходящий за его пределы лишь в том отношении, что не указывается никаких верхних границ ни для числа объектов, которые могут в каком-либо конкретном случае участвовать в манипуляциях, ни для времени, которое может потребоваться для такого манипулирования в соответствии с правилами. При этом не используются те дополнительные части русского языка, которые потребовались бы для рассуждений о бесконечных классах или иных сходных абстрактных объектах, составляющих существенную часть предмета изучения математики.

Наши действия не имеют целью определить новый язык просто заданием переводов его выражений (предложений, имен, форм) соответствующими выражениями русского языка, так как при этом вряд ли можно было избежать перенесения в новый язык определенных свойств русского языка, делающих его неудовлетворительным с логической точки зрения. Напротив, мы начинаем с того, что, полностью отвлекаясь от соображений, связанных с содержанием, строим чисто формальную часть нового языка, получая при этом неинтерпретированное исчисление, или *логистическую систему*. Подробнее это делается следующим образом.

Словарь ⟨vocabulary⟩ языка задается тем, что выписываются единые символы, которые будут употребляться[111]. Они называются *исходными символами*[112] языка и должны предполагаться неделимыми в следующих двух смыслах: (A) при построении языка никогда не используются их части и (B) всякую конечную линейную последовательность исходных символов *единственным способом* можно рассматривать как последовательность исходных символов[113]. Конечная линейная последовательность исходных символов называется *формулой*. По определенным правилам из числа всех формул выделяются *правильно построенные формулы* (с целью, грубо говоря, только правильно построенные формулы считать собственно выражениями языка)[114]. После этого некоторые из числа правильно построенных формул объявляются *аксиомами*. И, наконец, устанавливаются (исходные) *правила вывода* (или *правила действий*, или *правила преобразований*), по которым из соответствующих правильно построенных формул как из *посылок непосредственно выводится* или *непосредственно следует*[115] как *заключение* некоторая правильно построенная формула. (До тех пор, пока мы имеем дело с логистической системой, которая остается неинтерпретированной, термины *посылка*, *непосредственно выводить* и *заключение* имеют только то содержание, которое им сообщается самими правилами вывода.)

Конечная последовательность, состоящая из одной или большего числа правильно построенных формул, называется *дока-*

зательством, если каждая правильно построенная формула в последовательности либо является аксиомой, либо непосредственно выводится по одному из правил вывода из предыдущих правильно построенных формул последовательности. Доказательство называется *доказательством последней формулы* в последовательности правильно построенных формул, а *теоремами* логистической системы называются те правильно построенные формулы, для которых существуют доказательства[116]. В частности, всякая аксиома системы является теоремой, доказательство которой состоит из единственной правильно построенной формулы — самой аксиомы. Только что описанная схема, а именно исходные символы логистической системы, правила, в соответствии с которыми некоторые формулы объявляются правильно построенными (следуя Карнапу, мы будем называть их *правилами построения* системы), правила вывода и аксиомы, называется *исходным базисом* логистической системы[117].

Определяя логистическую систему путем задания исходного базиса, мы используем в качестве мета-языка ограниченную часть русского языка, описанную выше. Добавлением к этому ограничению или, лучше, составной частью его будут следующие требования *эффективности*: (I) Задание исходных символов должно быть эффективным в том смысле, что должен существовать метод, всегда позволяющий эффективно определить, является ли некоторый данный символ одним из исходных символов или не является. (II) Определение правильно построенной формулы должно быть эффективным в том смысле, что должен существовать метод, всегда позволяющий эффективно определить, является ли некоторая данная формула правильно построенной или нет. (III) Задание аксиом должно быть эффективным в том смысле, что должен существовать метод, всегда позволяющий эффективно определить, является ли некоторая данная правильно построенная формула одной из аксиом или нет. (IV) Правила вывода, взятые вместе, должны быть эффективны в том строгом смысле, что должен существовать метод, всегда позволяющий эффективно определить, выводится ли непосредственно по правилам вывода некоторая данная правильно построенная формула как заключение из некоторых данных правильно построенных формул как из посылок или нет.

(Из этих требований следует, что понятие доказательства эффективно в том смысле, что каждый раз, когда дана конечная последовательность правильно построенных формул, эффективно может быть установлено, является ли она доказательством или нет. В то же время понятие теоремы не является необходимым образом эффективным в смысле существования некоторого метода, который по отношению к каждой предложенной правильно построенной формуле позволял бы определять, является ли она теоремой или нет, так как может не существовать определенного способа, позволяющего в каждом случае либо найти доказательство, либо выяснить, что доказательства нет. К последнему вопросу мы вернемся впоследствии.)

Обратимся к требованию (I). Мы предполагаем, что мы в состоянии каждый раз, когда даны два вхождения каких-либо символов, определить, являются ли они вхождениями одного и того же символа или нет (таким образом, мы по предположению исключаем трудности, связанные с неразборчивостью). Поэтому, если число исходных символов конечно, то требование (I) может быть удовлетворено просто тем, что полностью выписывается список исходных символов. Однако часто число исходных символов бесконечно. В частности, при наличии переменных желательно, чтобы имелось бесконечное число различных переменных каждого рода: хотя в каждой отдельной правильно построенной формуле число различных переменных всегда конечно, тем не менее вряд ли существует способ указать конечную верхнюю грань для числа различных переменных, которые могут когда-либо понадобиться для какой-либо конкретной цели в практическом использовании логистической системы. Если число исходных символов бесконечно, то их список, разумеется, не может быть полностью выписан. В этом случае исходные символы должны быть определены тем или иным путем в метаязыке с помощью некоторого предложения конечной длины. И это предложение должно быть таким, чтобы выполнялось требование (I).

Аналогичное замечание относится к требованию (III). Если число аксиом конечно, то требование (III) может быть удовлетворено просто тем, что все эти аксиомы полностью выписываются. В противном случае аксиомы должны быть заданы несколько менее прямым путем с помощью некоторой формулировки конечной длины в метаязыке, и эта формулировка должна быть такой, чтобы удовлетворялось требование (III). Использование лишь конечного числа аксиом может показаться более изящным или предпочтительным в каком-либо ином смысле, однако мы увидим, что иногда бывает удобным пользоваться бесконечным числом аксиом, и если при этом выполняются требования эффективности, то против такого использования нельзя привести никаких неоспоримых возражений.

Мы предположили, что читателю ясно общее понятие эффективности. Это понятие приходится считать интуитивно ясным математическим понятием, так как оно содержится в часто встречающихся математических проблемах, а именно в проблемах нахождения методов вычисления, т. е. методов эффективного отыскания числа или какой-либо вещи иного рода[118]. Мы не будем пытаться дать здесь точное определение эффективности, так как интуитивное понятие вполне достаточно для того, чтобы во всех случаях, с которыми нам придется встретиться, можно было отличить эффективные методы от неэффективных[119].

Требования эффективности не следует, конечно, понимать в том смысле, что система, аналогичная логистической системе, но не удовлетворяющая этим требованиям, не может быть полезной для тех или иных целей или что ее запрещено рассматривать. Просто системы, не удовлетворяющие требованиям эффективности, не подходят для использования (или интерпретирования) в качестве языков. Это объясняется тем, что при всей расплывчатости и неопределенности общего понятия языка несомненно, что язык должен служить средством общения. Однако при нарушении требований эффективности нарушаются и функции языка как средства общения.

Рассмотрим, в частности, положение, которое возникает, если определение правильности построения формулы не эффективно. В этом случае нет определенного метода, посредством которого в случае, если некоторое выражение языка высказано ⟨uttered⟩ (устно или письменно), допустим, в качестве утвердительного предложения, слушатель или читатель мог бы выяснить, является ли оно правильно построенным или нет, т. е. выяснить, действительно ли нечто утверждается или нет[120]. Поэтому с полным правом можно было бы требовать доказательства того, что предложенное выражение правильно построено, и отказываться считать его выражающим некоторое утверждение до тех пор, пока такое доказательство не будет дано. Это доказательство, которое должно быть добавлено к исходному высказыванию для того, чтобы обосновать его статус, следовало бы, пожалуй, считать частью самого высказывания, а определение правильности построения следовало бы изменить таким образом, чтобы обеспечивалось это или эквивалентное ему положение. После такого изменения неэффективность определения, несомненно, исчезла бы; в противном же случае у каждого по-прежнему оставалось бы право требовать доказательства правильности построения.

Рассмотрим еще положение, которое возникает, если неэффективно понятие доказательства. В этом случае не существует надежных средств, которые всегда позволяли бы определить, действительно ли является доказательством та или иная последовательность формул, выдаваемая за доказательство. Поэтому в каждом случае с полным правом можно было бы требовать доказательства того, что предложенная последовательность формул является доказательством; до тех же пор, пока такое дополнительное доказательство не будет представлено, можно было бы отказываться признавать доказанной утверждаемую теорему. Пожалуй, следовало бы это дополнительное доказательство считать частью полного доказательства теоремы, а исходный базис логистической системы, видимо, следовало бы изменить таким образом, чтобы такое или эквивалентное ему положение обеспечивалось во всех случаях[121]. Действительно, для понятия доказательства существенно, что оно убедительно для всякого, кто принимает исходные посылки, лежащие в его основе. И можно считать, что требования эффективности (I)—(IV) как раз для того и поставлены, чтобы обеспечить это существенное свойство доказательства.

После того как мы описанным способом построили логистическую систему, мы все же не имеем еще формализованного языка до тех пор, пока не указана *интерпретация*. Для этого потребуется метаязык более широкий, нежели та ограниченная часть русского языка, которая используется при построении логистической системы. Однако это будет делаться не путем указания русских переводов для правильно построенных формул, а с помощью *семантических правил*, которые в общем случае не столько *имеют в виду*, сколько *используют* русские фразы (ср. § 08) и которые для каждой правильно построенной формулы будут определять либо каким образом она обозначает[122] (делая ее тем самым собственным именем в смысле § 01), либо каким образом она принимает значения[122] (делая ее тем самым формой в смысле § 02).

Учитывая, что мы постулировали два истинностных значения (§ 04), мы будем требовать, чтобы семантические правила, которые должны указывать интерпретацию, были такими, чтобы аксиомы обозначали истинностные значения (если они являются именами) или всегда имели в качестве значений истинностные значения (если они являются формами). Это же должно иметь место и для заключения всякого непосредственного вывода, если это имеет место для посылок. При использовании формализованного языка только те из правильно построенных формул можно будет утверждать, которые обозначают истинностные значения (если они суть имена) или всегда имеют в качестве значений истинностные значения (если они суть формы), а правильным будет утверждение только тех из них, которые обозначают истину (если они суть имена) или всегда принимают значение истина (если они суть формы). Так как мы хотим, чтобы доказательство теоремы служило основанием для ее утверждения, то мы называем интерпретацию логистической системы *правильной*, если при этой интерпретации все аксиомы либо обозначают истину, либо всегда принимают значение истина и если, кроме того, то же самое имеет место по отношению к заключению каждого непосредственного вывода, когда это верно по отношению к посылкам. В противном случае мы называем интерпретацию *неправильной*. Мы называем формализованный язык *правильным* или *неправильным* в зависимости от того, правильна или неправильна интерпретация, при помощи которой он получен из логистической системы. Неправильная интерпретация и неправильный язык должны быть отвергнуты.

(Требования и определение правильности в предыдущем абзаце основываются на двух истинностных значениях. Они подходят для всех формализованных языков, которые будут рассмотрены по существу в этой книге. Однако они должны быть соответствующим образом изменены в тех случаях, когда схема двух истинностных значений модифицируется; ср. замечание в § 19.)

Семантические правила должны быть вначале сформулированы в некотором метаязыке, который предполагается наличным и потому неформализованным. Под этим языком мы будем, как правило, подразумевать русский язык*). В дальнейшем для того, чтобы изучить эти правила более точно, мы можем формализовать метаязык (используя для этого метаметаязык, который предполагается наличным, и следуя вышеописанному методу формализации языка-объекта) и в этом формализованном языке заново сформулировать семантические правила. [Это ведет к предмету *семантики* (§ 09).]

В качестве условия строгости мы требуем, чтобы доказательство какой-либо теоремы (языка-объекта) не использовало никакой интерпретации, а протекало только по правилам логистической системы, т. е. чтобы оно было *доказательством* в смысле, определенном выше для логистических систем. Для этого требования существуют три мотивировки — три довольно различных подхода, которые все приводят к одному и тому же критерию. Во-первых, это можно считать более точной формулировкой традиционного различия между формой и содержанием (§ 00) и принципа, согласно которому правильность рассуждения зависит только от формы — формы доказательства в логистической системе, которая понимается как то, что обще всем его содержаниям при различных интерпретациях логистической системы. Во-вторых, здесь находит свое отражение обычное требование математической строгости, по которому доказательство должно опираться только на аксиомы и не использовать ничего (даже самого очевидного), что не содержится в аксиомах. Однако в нашем случае это требование изменено и расширено следующим образом: доказательство должно опираться только на аксиомы и протекать только по правилам вывода, не используя при этом ни чего-либо, что не содержится в аксиомах, ни какого-либо метода вывода, который не был бы оправдан правилами. Третьим мотивом является то, что логистическая система более надежна и определенна по сравнению с интерпретациями, которые мы могли бы хотеть принять, так как она опирается как на метаязык на такую часть русского языка, надежность которой, в силу ее элементарности и ограниченности, вряд ли может быть

*) В оригинале — английский. — *Прим. перев.*

подвергнута сомнению, если вообще считать возможной математику.

Важно также, что доказательство, удовлетворяющее нашему условию строгости, должно сохранять свою силу при всякой интерпретации логистической системы, так что мы получаем в конечном итоге экономию за счет того, что различные вещи доказываются единым рассуждением[123]. Размеры экономии определяются тем, что нет нужды повторять неопределенное число раз доказательства, совпадающие по форме, но отличающиеся по содержанию, так как они могут быть проведены все сразу раз и навсегда[124].

Хотя мы и сохраняем свободу использовать любую интерпретацию, которая может быть сочтена полезной, мы для каждого логистического исчисления, которое будет построено в следующих главах, укажем по одной или по несколько интерпретаций, которые будем особо иметь в виду по отношению к этому исчислению и которые будут называться *главными интерпретациями*.

Предмет формальной логики, изучаемый методом построения формализованных языков, называется *символической логикой*, или *математической логикой*, или *логистикой*[125]. Сам метод мы будем называть *логистическим методом*.

В математике обычным является *аксиоматический метод*, в соответствии с которым всякая отрасль математики начинается со списка *неопределяемых терминов* и списка принимаемых положений или *постулатов*, включающих эти термины, из которых теоремы должны выводиться средствами формальной логики[126]. Если последняя фраза остается неразъясненной (причем формальная логика предполагается уже известной), то мы говорим, что построение ведется с помощью *неформального аксиоматического метода*[127]. В противном случае мы говорим о *формальном аксиоматическом методе*.

Таким образом, формальный аксиоматический метод отличается от логистического метода только в двух следующих отношениях:

(1) В логистической системе исходные символы разбиваются на две категории: *логические исходные символы*, которые считаются принадлежащими к логике, лежащей в основе системы, и *неопределяемые термины*, которые считаются принадлежащими к конкретной отрасли математики. В соответствии с этим и аксиомы подразделяются на две категории: *логические аксиомы*, являющиеся правильно построенными формулами, содержащими только логические исходные символы, и *постулаты*[128], которые содержат также и неопределяемые термины и считаются определяющими конкретную отрасль математики. Правила вывода следует в соответствии с обычной концепцией аксиоматического метода считать принадлежащими к логике, лежащей в основе системы. И хотя в них могут упоминаться отдельные неопределяемые термины

или классы исходных символов, содержащие неопределяемые термины, в этих правилах не должно быть заключено ничего такого, что мы субъективно были бы склонны отнести не к логике, лежащей в основе системы, а к конкретной отрасли математики[129].

(2) В интерпретации семантические правила подразделяются на две категории. Те из них, которые принадлежат к первой категории, фиксируют общие аспекты интерпретации, которые относятся или которые мы склонны отнести к логике, лежащей в основе системы. А правила второй категории определяют остальную часть интерпретации. Рассмотрению различных представлений, или интерпретаций, системы постулатов в смысле неформального аксиоматического метода здесь соответствует варьирование семантических правил второй категории при неизменности правил первой категории.

08. Синтаксис. Изучение чисто формальной части формализованного языка в отвлечении от интерпретации, т. е. изучение логистической системы, называется *синтаксисом*, или — чтобы отличить его от „синтаксиса" в более узком смысле, который занимается только правилами построения[130], — *логическим синтаксисом*[131]. Метаязык, который используется для того, чтобы изучать логистическую систему в этом направлении, называется *синтаксическим языком*, или *языком синтаксиса*[131].

Мы будем различать *элементарный синтаксис* и *синтаксис теоретический*.

Элементарный синтаксис языка занимается вопросами построения логистической системы и проверки того, являются ли правильно построенными формулами, аксиомами, непосредственными выводами или доказательствами те или иные образования, которые претендуют на то, чтобы быть таковыми. Языком синтаксиса является описанная в предыдущем параграфе ограниченная часть русского языка или соответствующий ограниченный формализованный метаязык. Требования эффективности (I)—(IV) должны быть выполнены. Доказательство производных правил и теоремных схем (в смысле §§ 12, 33) и их применение в конкретных случаях также считаются относящимися к элементарному синтаксису, в предположении, что выполнены сформулированные в § 12 требования эффективности.

С другой стороны, теоретический синтаксис является общей математической теорией логистической системы или логистических систем и рассматривает все проблемы, связанные с их формальной структурой (в отвлечении от интерпретации). На содержание языка синтаксиса не накладывается никаких ограничений, и от требований эффективности следует или можно отказаться. Язык синтаксиса может быть достаточно богатым для выражения всей современной математики. Однако иногда желательно использовать более слабый язык синтаксиса, для того чтобы выделить результаты, которые возможно получить на такой более слабой основе.

Как и всякую отрасль математики, теоретический синтаксис можно изучать, а в конечном счете и нужно изучать аксиоматическим методом. Формальный и неформальный аксиоматические методы дают здесь то преимущество, что они позволяют отвлечься от конкретных свойств символов и формул языка-объекта, т. е. от того, являются ли они знаками на бумаге или звуками и т. п., и тем самым развивать чистую теорию структуры логистической системы. Однако формальный аксиоматический метод имеет — если используется язык синтаксиса, который сам формализован по программе § 07 с помощью метаметаязыка, — то дополнительное преимущество, что он более отчетливо выявляет базис, на котором получены те или иные результаты, и выясняет пути и возможности получения тех или иных результатов на относительно более слабом базисе.

В этой книге мы будем заниматься формализацией некоторого языка-объекта, а теоретический синтаксис будем рассматривать неформально. При этом мы во всех случаях будем предполагать наличными все математические познания, которые могут потребоваться для решаемой задачи. Таким образом, для нашего рассмотрения синтаксиса мы не привлекаем даже неформального аксиоматического метода. Однако читатель всегда должен представлять себе, что все синтаксические рассуждения проводятся в языке синтаксиса, формализация которого в будущем предполагается, так что все вытекающие из такой формализации различения могут быть уместными в рассмотрении.

При таком неформальном построении синтаксиса мы будем считать язык синтаксиса отличным от языка-объекта. Однако важно, чтобы достаточно удовлетворительный язык-объект был способен выражать свой собственный синтаксис, так что в этом случае можно при желании считать, что заключительная формализация языка синтаксиса состоит в его отождествлении с языком-объектом[132].

Для того чтобы отличать теоремы языка-объекта от теорем языка синтаксиса (которые часто будут теоремами о языке-объекте), мы будем последние называть *синтаксическими теоремами*. Хотя синтаксические теоремы мы доказываем неформально, мы предполагаем, что последующая формализация языка синтаксиса сделает их теоремами в смысле § 07, т. е. теоремами языка синтаксиса в том же самом смысле, в котором мы говорим о теоремах языка-объекта.

Мы будем требовать, чтобы язык синтаксиса содержал, во-первых, имена для разнообразных символов и формул языка-объекта и, во-вторых, переменные, значениями которых являются эти символы и формулы. Первые будем называть *синтаксическими константами*, а вторые — *синтаксическими переменными* [133].

В качестве синтаксических переменных мы будем употреблять: жирные строчные греческие буквы ($\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и т. д.) для переменных, область значений которых составляют исходные символы языка-объекта; жирные строчные латинские буквы (**a**, **b**, **c** и т. д.) для переменных, область значений которых составляют исходные константы и переменные языка-объекта (см. примечание 117); жирные прописные греческие буквы ($\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Delta}$ и т. д.) для переменных, область значений которых составляют формулы языка-объекта; наконец, жирные прописные латинские буквы (**A**, **B**, **C** и т. д.) для переменных, область значений которых составляют правильно построенные формулы языка-объекта. Где бы в дальнейшем ни встретились такие жирные буквы, читатель должен помнить, что они не являются частью символического аппарата языка-объекта, а относятся к языку синтаксиса и служат для того, чтобы говорить о языке-объекте. Жирные буквы не встречаются при употреблении языка-объекта в качестве самостоятельного языка (точно так же, как русские слова никогда не встречаются в оригинальных текстах латинских авторов, хотя они встречаются в латинской грамматике, написанной по-русски).

В качестве подготовки к изложению наших замыслов в отношении синтаксических констант полезно рассмотреть ситуацию, которая складывается в обычном русском языке, если только речь не идет специально о каком-либо формализованном языке-объекте. При этом мы должны иметь в виду, что русский язык не является формализованным, и помнить о вытекающей из этого неопределенности его правил построения, правил вывода и семантических правил, так как содержание обычных русских грамматик и словарей является лишь неполным и довольно туманным приближением к таким правилам. Сделав эти оговорки, мы переходим к рассмотрению того, как используется русский язык для формулирования синтаксических утверждений о нем самом.

В практике часто встречается *автонимное* (по терминологии Карнапа) использование русских слов, т. е. использование их в качестве их же собственных имен [134]. Примерами могут служить такие утверждения: „Человек начинается с согласной буквы", „Человек состоит из трех слогов", „Человек — существительное с неправильным множественным числом". Употребление одного и того же слова *человек* и в качестве собственного имени для русского слова, которое составляется последовательно из двадцать третьей, шестой, одиннадцатой, четырнадцатой и т. д. букв русского алфавита, и в качестве общего имени (см. примечание 6) для двуногого млекопитающего, лишенного шерстного покрова [135], конечно, двусмысленно, но эта двусмысленность, подобно многим другим в обычных языках, часто бывает и удобной и безвредной. В тех же случаях, когда возникли бы реальные сомнения в содержании, их можно было бы устранить либо использованием дополнительных слов в формулировке утверждения, либо применением кавычек, либо использованием курсива, как, например, в следующих выражениях: „Слово человек состоит из трех слогов", „'Человек' состоит из трех слогов", „*Человек* состоит из трех слогов".

Следуя естественной и удобной терминологии Куайна, мы будем различать случаи, когда слово (или символ) *употребляется* и когда оно *упоминается*, или *имеется в виду*. Так, например, в утверждении „Человек является разумным существом" слово „человек" употребляется, но не имеется в виду, в утверждении же „Русский перевод французского слова *homme* состоит из семи букв" слово „человек" имеется в виду, но не употребляется. В утверждении „Человек состоит из трех слогов" слово „человек" и употребляется и имеется в виду, хотя и необычным образом, а именно автонимно.

Фреге первый стал систематически указывать автонимию, используя для этого кавычки, и в его поздних работах (хотя еще не в *Begriffsschrift*) слова и символы, употребленные автонимно, во всех случаях заключены в одинарные кавычки. При этом слово, заключенное в одинарные кавычки, приходится считать отличным от того же слова, не заключенного в кавычки (как если бы кавычки были дополнительными буквами в написании слова), и, таким образом, двусмысленность устраняется путем введения двух различных слов, соответствующих различным содержаниям. Многие современные авторы следуют Фреге в этом систематическом использовании кавычек: одни используют для этого двойные кавычки, другие, подобно Фреге, применяют одинарные кавычки, сохраняя двойные кавычки в качестве обычного знака препинания. Как читатель уже давно мог заметить, в этой книге мы не придерживаемся системы Фреге в отношении использования кавычек [136]. Однако время от времени мы будем использовать кавычки или другие средства, особенно в тех случаях, когда действительно могут возникнуть сомнения в содержании.

Возвращаясь к вопросу использования синтаксических констант при построении синтаксиса формализованного языка-объекта, мы видим, что в автонимном использовании в языке синтаксиса символов и формул языка-объекта нет ничего двусмысленного, если только следить за тем, чтобы формулы языка-объекта могли быть одновременно формулами языка синтаксиса только в качестве автонимов. Поэтому мы договариваемся о следующем:

Исходные символы языка-объекта будут использоваться в синтаксическом языке в качестве своих собственных имен; в качестве имени для сочетания будет использоваться сочетание имен [137].

Такой прием является обычным в математике, и он имеет то преимущество, что не нуждается в специальных пояснениях. Хотя мы и используем этот прием лишь неформально, однако его легко видоизменить таким образом, чтобы сделать его применимым в формализованном синтаксическом языке [138)] (причем это сделать легче, чем включить в формализованный язык соответствующее правило кавычек).

Чтобы избежать появления двусмысленностей, мы в дальнейшем откажемся от практики — которая в иных случаях могла бы быть, вообще говоря, полезной — использования в синтаксическом языке (или ином метаязыке) формул языка-объекта с сохранением за ними того же содержания, которое они имели в языке-объекте. Поэтому каждый отдельный символ или формулу языка-объекта во всех случаях, когда они оказываются частью русского предложения, следует понимать в соответствии с правилом, которое было выше выделено курсивом, т. е. автонимно.

Так как мы в дальнейшем часто будем вводить соглашения о сокращении правильно построенных формул, нужно сделать некоторые дополнительные разъяснения, относящиеся к использованию синтаксических переменных и синтаксических констант (а также и к автонимии) в связи с такими сокращениями. Это будет сделано в § 11, где такие сокращения впервые появляются. Однако, как было указано в этом параграфе, сами сокращения, а поэтому и связанные с ними приемы, можно элиминировать, хотя они и необходимы с практической точки зрения. В теоретических исследованиях о синтаксисе, в частности при формализации синтаксического языка, можно игнорировать вопрос о сокращениях правильно построенных формул.

09. Семантика. Представим себе людей, пользующихся формализованным языком, скажем письменным формализованным языком, занятых выписыванием правильно построенных формул этого языка и составлением таких последовательностей формул, которые образуют цепочки непосредственных выводов или, в частности, доказательства. Представим себе, далее, наблюдателя, который не только не понимает языка, но вообще не верит, что это язык, т. е. не верит, что формулы имеют содержание. Он узнает, скажем, синтаксические критерии, в соответствии с которыми формулы признаются правильно построенными, и критерии, в соответствии с которыми последовательности правильно построенных формул признаются непосредственными выводами или доказательствами, но он предполагает, что наблюдаемая им деятельность есть просто игра, аналогичная игре в шахматы, или, лучше, решению шахматной задачи, или раскладыванию карточного пасьянса. При этом целью игры является нахождение неожиданных теорем или остроумных цепочек выводов и решение головоломок такого типа: можно ли, и как именно, доказать, некоторую формулу или вывести ее из других данных формул [139].

Для такого наблюдателя символы языка имеют только то содержание, которое дается им правилами игры, — только такое содержание, которым обладают, например, различные фигуры в шахматах. Для него формула аналогична позиции на шахматной доске и имеет значение лишь как один из этапов игры, который в соответствии с правилами ведет к различным другим этапам.

Все, что может быть сказано о языке такому наблюдателю и понято им, пока он продолжает смотреть на использование языка просто как на игру, составляет (теоретический) синтаксис языка. С другой стороны, к семантике языка относится то, что можно понять, лишь зная, что правильно построенные формулы обладают содержанием в собственном смысле, т. е. что некоторые из них выражают суждения, или обозначают, или тем или иным путем принимают значения.

Таким образом, изучение интерпретации языка как интерпретации называется *семантикой* [140]. Этот термин применяется особенно в тех случаях, когда рассмотрение ведется в формализованном метаязыке. Однако в этой книге мы не выйдем за пределы неформального семантического рассмотрения, которое будет вестись на обычном русском языке.

Теоремы семантического метаязыка будут называться *семантическими теоремами*, а семантические и синтаксические теоремы вместе будут называться *метатеоремами* в отличие от теорем языка-объекта.

Как видно из исследований Тарского, семантику можно в некотором смысле свести к синтаксису. Тарский особо подчеркнул возможность для всякого данного формализованного языка найти такое чисто синтаксическое свойство правильно построенных формул, которое совпадало бы по объему с семантическим свойством быть истинным предложением. В работе Тарского *Wahrheitsbegriff* [141] проблема нахождения такого синтаксического свойства решена для различных конкретных формализованных языков [142]. Но аналогичные методы применимы и к семантическим понятиям обозначать ⟨denoting⟩ и принимать значения ⟨having values⟩, и поэтому могут быть найдены синтаксические понятия, которые совпадают с ними по объему [143]. Из этого следует, что если в семантическом метаязыке единственными специфически семантическими (не синтаксическими) исходными символами являются имена, выражающие эти два понятия, то, меняя интерпретацию, можно превратить этот семантический метаязык в язык синтаксиса, причем замена интерпретации должна заключаться только в изменении смысла этих двух имен, без изменения их денотата.

Однако правильный синтаксический язык, способный выражать синтаксические эквиваленты таких семантических понятий, как обозначать и принимать значения, — или хотя бы только синтаксический эквивалент семантического свойства истинности — обычно должен быть сильнее, чем язык-объект (который предполагается правильным), в том смысле, что должны существовать такие теоремы синтаксического языка, никакой перевод которых (т. е. предложение, выражающее то же самое суждение) не является теоремой языка-объекта. В противном случае будут существовать такие простые элементарные истинные суждения ⟨simple elementary true propositions⟩ о семантических понятиях, что предложения, выражающие соответствующие суждения о синтаксических эквивалентах этих семантических понятий, не являются теоремами синтаксического языка[144].

Для многих конкретных формализованных языков это было доказано (по существу) Тарским в его *Wahrheitsbegriff*. При этом методы Тарского[145] таковы, что с их помощью можно получить тот же результат во многих других случаях, в частности для всех языков-объектов, изучаемых в этой книге, если их формализованный синтаксический язык строить обычным образом. Результат Тарского несомненно можно точно сформулировать и доказать по отношению к весьма общему классу языков, однако мы не будем пытаться сделать это.

Следует иметь в виду важность результата Тарского, так как он имеет прямое отношение к вопросу об использовании формализованного языка в качестве своего собственного семантического метаязыка. Правильный и достаточно сильный язык может, конечно, быть способен выражать свой собственный синтаксис (ср. примечание 132) и свою собственную семантику в том смысле, что этот язык может содержать предложения, выражающие по меньшей мере весьма обширный класс суждений его семантики и его синтаксиса. Однако при выполнении некоторых весьма общих условий среди этих предложений всегда будут истинные предложения весьма простого семантического содержания, которые тем не менее не будут являться теоремами. Это предложения, которые, грубо говоря, утверждают, что такое-то конкретное предложение истинно тогда и только тогда, когда ___ , где пропуск заполнен этим самым конкретным предложением[146]. Таким образом, в предположении, что этот язык в других отношениях удовлетворяет обычным требованиям адэкватности, не все семантические правила (в смысле § 07), записанные в виде предложений языка, являются теоремами.

Это положение приводит к тому, что различение языка-объекта и метаязыка, впервые появляющееся при формализации языка-объекта, сохраняет свое значение и после того, как задача формализации выполнена в отношении как языка-объекта, так и метаязыка.

В заключение этого введения заметим, что многое из того, что мы говорили, касалось отношения между лингвистическими выражениями и их содержанием и относилось поэтому к семантике. Однако нас интересовала не столько семантика того или иного конкретного языка, сколько общие свойства, присущие семантикам многих языков. В некоторых случаях мы формулировали весьма общие семантические принципы, требуя их выполнения от всякого языка, который мы вообще хотим рассматривать; это относится, в частности, к допущениям (1), (2), (3) из § 01 и допущению (4) из § 02[147].

В то же время мы не пытались формализовать это семантическое рассмотрение или хотя бы привести материал в такой предварительный порядок, который был бы первым шагом к формализации. Мы преследовали задачи вводного и разъяснительного характера и надеемся, что идеи, с которыми мы этим неформальным путем познакомили читателя, будут им пересматриваться и уточняться в процессе дальнейшего чтения.

В последующих главах мы время от времени будем прерывать строгое исследование какой-нибудь логистической системы, для того чтобы сделать неформальное семантическое отступление. Хотя при изучении всякой логистической системы мы и будем стремиться сохранить вопрос о ее интерпретации открытым, тем не менее такие семантические пояснения относительно системы могут служить тому, чтобы указанием главных интерпретаций системы объяснить мотивы ее рассмотрения (ср. § 07). *Всюду в тексте, кроме этого введения, семантические места будут выделяться более мелким шрифтом, который должен служить предостережением, что соответствующий материал не относится к формальному логистическому построению и не должен использоваться в качестве такового.*

Как мы уже указывали, предполагается, что семантику саму следует в конечном счете изучать с помощью логистического метода.

Однако если семантические места этого введения и следующих глав должны быть переписаны в формализованном семантическом языке, то становятся необходимыми некоторые уточнения. Так, если в качестве семантического языка мы возьмем функциональное исчисление порядка ω в смысле главы VI или язык, сходный с языком главы X, то многие семантические термины, такие, как, например, термин „обозначать", введенный в § 01, следует заменить множеством терминов различных типов[148], а предложения, в которых мы использовали эти термины, следует заменить аксиомными[149] и теоремными схемами[149] с типовой неопределенностью[149]. Если же семантический язык должен соответствовать какой-либо теории, заменяющей теорию типов, то потребуются изменения другого характера. Если бы, в частности, мы приняли теорию множеств Цермело (глава XI), то мы должны были бы существенным образом ослабить сделанное в § 03 допущение, что всякая сингулярная форма имеет присоединенную функцию, и вследствие этого так или иначе изменить истолкование символа λ.

ГЛАВА I

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Пропозициональным исчислением, или *исчислением суждений* [150] называют любую логистическую систему из некоторого класса систем. Все системы этого класса, впрочем, эквивалентны друг другу в смысле, который будет разъяснен ниже. В тех случаях, когда мы занимаемся рассмотрением какой-либо конкретной системы из числа этих логистических систем или же (как это часто бывает) в тех случаях, когда для нашей цели безразлично, какую из них иметь в виду, мы говорим просто об исчислении суждений. В противном случае мы различаем эти логистические системы как различные *формулировки* исчисления суждений.

Важность исчисления суждений в той или иной его формулировке определяется тем, что оно часто входит как часть в более обширные логистические системы — как в системы, рассматриваемые в этой книге, так и в системы, которые вообще когда-либо рассматривались. При этом вместо переменных исчисления суждений (пропозициональных переменных) разрешается подставлять предложения этого более обширного исчисления. Кроме того, благодаря своей во многих отношениях большей простоте по сравнению с другими логистическими системами, которые мы рассматриваем, исчисление суждений служит также введением и иллюстрацией для многого, что мы делаем сначала по отношению к нему, а затем распространяем с большими или меньшими изменениями на другие системы.

В этой главе мы строим одну частную формулировку исчисления суждений — так называемую систему P_1. Некоторые другие формулировки будут рассмотрены в следующей главе.

10. Исходный базис исчисления P_1 [150]. Исходными символами исчисления P_1 являются три несобственных символа

$$[\quad \supset \quad]$$

(из которых первый и третий называются *скобками*), одна исходная константа

$$f$$

и бесконечное число переменных

$$p \quad q \quad r \quad s \quad p_1 \quad q_1 \quad r_1 \quad s_1 \quad p_2 \quad q_2 \ldots$$

(указанный здесь порядок называется *алфавитным порядком* переменных). Переменные и исходная константа называются *собственными символами* [151].

В дальнейшем мы будем употреблять следующие сокращения: „пп" вместо „правильно построенная", „ппф" и „пп-формула" вместо „правильно построенная формула". Правилами построения исчисления P_1 являются [152]:

10i. Стоящая отдельно исходная константа f есть ппф.
10ii. Отдельно стоящая переменная есть ппф.
10iii. Если Γ и Δ суть ппф, то и $[\Gamma \supset \Delta]$ есть ппф [153].

Для того чтобы завершить определение пп-формул и исчисления P_1, мы добавляем, что формула является пп-формулой тогда и только тогда, когда это следует из приведенных трех правил построения. Другими словами, класс пп-формул исчисления P_1 — это наименьший класс формул, содержащий все формулы, описанные в 10i и 10ii, и замкнутый относительно правила 10iii.

Из правил построения вытекает эффективный метод проверки правильности построения, хотя в явном виде этот метод в них и не сформулирован. Если длина некоторой формулы не слишком велика, то часто правильность ее построения может быть обнаружена с первого взгляда. В противном случае мы можем применить некоторый метод подсчета. Если формула состоит из более чем одного символа, то она может быть пп-формулой только в том случае, когда она оканчивается на] и начинается с [. Поэтому мы можем вести подсчет скобок слева направо и, считая каждую левую скобку [за $+1$ и каждую правую скобку] за -1, складывать эти числа [154]. Если этот подсчет впервые дает сумму, равную 1, на правой скобке или же на левой скобке, за которой непосредственно следует собственный символ [155], то в случае, когда формула есть ппф, следующим символом должен быть знак импликации $\supset$ [156]. Этот знак называется *главным знаком импликации* данной формулы. Часть формулы, заключенная между начальной левой скобкой и главным знаком импликации, называется *антецедентом*, а часть формулы, заключенная между главным знаком импликации и конечной правой скобкой, называется *консеквентом*. Поэтому данная формула является правильно построенной тогда и только тогда, когда как антецедент, так и консеквент суть пп-формулы. Таким образом, вопрос о правильности построения данной формулы сведен к тому же вопросу относительно двух более коротких формул — антецедента и консеквента. Теперь к антецеденту и консеквенту следует применить ту же процедуру, которая была применена к данной нам формуле. После конечного числа повторений либо мы придем к выводу, что данная формула не есть ппф, так как нарушено одно из требуемых условий (или так как, проведя просчет какой-либо формулы, мы дошли до ее конца, не найдя в ней главного знака импликации), либо же вопрос о правильности построения данной формулы сведется к аналогичному вопросу относительно конечного числа формул, состоящих из не более чем одного символа каждая. Формула, число символов в которой равно нулю — так называемая *пустая формула*, — не является, конечно, ппф. Формула же, состоящая из точно одного символа, будет ппф тогда и только тогда, когда этот символ является собственным символом [157].

В дальнейшем мы будем говорить о *главном знаке импликации*, об *антецеденте* и *консеквенте* только по отношению к пп-формулам, так как нам в действительности редко придется иметь дело с формулами, которые не будут правильно построенными. Если формула является правильно построенной и состоит из более чем одного символа, то ее единственным образом можно представить в виде $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ [158]. При этом $\mathbf{A}$ является антецедентом, $\mathbf{B}$ — консеквентом, а знак $\supset$ между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — главным знаком импликации.

Под конверсией пп-формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ мы будем понимать пп-формулу $[\mathbf{B} \supset \mathbf{A}]$.

В P_1 все вхождения всякой переменной во всякую пп-формулу суть *свободные вхождения*; ппф является *n-арной формой*, если она содержит (свободные) вхождения точно n различных переменных, и *константой*, если она не содержит (свободных) вхождений ни одной переменной; все формы являются *пропозициональными формами*, а все константы — пропозициональными константами, или *предложениями* (ср. примечание 117).

Для того чтобы сформулировать правила вывода исчисления P_1, мы введем знак „S |" для обозначения операции подстановки, так что $\mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ есть формула, являющаяся результатом подстановки формулы $\mathbf{B}$ вместо каждого вхождения переменной $\mathfrak{b}$ в $\mathbf{A}$ [159]. Этот знак мы будем часто использовать как в этой, так и в последующих главах. Он, конечно, является знаком не системы P_1 (и не какой-либо другой системы, рассматриваемой в этой книге), а относится к языку синтаксиса, так же точно, как и аппарат синтаксических переменных: используя русские фразы, содержащие слова „подставлять", „подстановка" и т. д., можно во всех случаях избежать его применения, хотя это и связано с некоторыми неудобствами.

Правилами вывода являются следующие два [160]:

*100. Из $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$. (*Правило модус поненс.*)

*101. Если $\mathfrak{b}$ — переменная, то из $\mathbf{A}$ следует $\mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ [161]. (*Правило подстановки.*)

В правиле *модус поненс* (*100) посылка $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ называется *большой посылкой*, а $\mathbf{A}$ — *малой посылкой*. Заметим, что антецедент большой посылки должен совпадать с малой посылкой; заключением тогда является консеквент большой посылки [162].

Аксиомами системы P_1 являются три следующие:

† 102. $[p \supset [q \supset p]]$.

† 103. $[[s \supset [p \supset q]] \supset [[s \supset p] \supset [s \supset q]]]$.

† 104. $[[[p \supset f] \supset f] \supset p]$.

Первая из этих аксиом († 102) или ее эквивалент в других формулировках пропозиционального исчисления (независимо от того, является ли он аксиомой) называется *законом утверждения консеквента*. Аналогично вторая аксиома называется *законом самодистрибутивности (материальной) импликации*. Наконец, третья аксиома носит название *закона двойного отрицания* [163)].

В соответствии с разъяснениями § 07, *доказательством* в системе P_1 называется конечная последовательность, состоящая из одной или нескольких правильно построенных формул, из которых каждая либо является одной из трех аксиом, либо (непосредственно) выводится из двух предыдущих ппф последовательности по *модус поненс*, либо (непосредственно) выводится из одной предыдущей ппф последовательности посредством подстановки. Доказательство называется доказательством последней ппф последовательности [164)], и ппф называется *теоремой*, если она имеет доказательство.

В дополнение к сокращениям „пп", „пп-формула" и „ппф" мы будем в этой и в дальнейших главах вместо „истинностное значение истина" писать сокращенно „t", а вместо „истинностное значение ложь" писать сокращенно „f".

Подразумевающаяся главная интерпретация системы P_1 уже была неявно указана в рассмотрениях § 05 и в настоящей главе. Теперь мы явно сформулируем семантические правила (в смысле § 07). Вот они:

a. f обозначает f.

b. Переменные являются переменными с областью значений t и f.

c. Форма, состоящая из одной только переменной **a**, принимает значение t для значения t переменной **a** и значение f для значения f переменной **a**.

d. Пусть **A** и **B** — константы. Тогда $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ обозначает t, если **B** обозначает t или **A** обозначает f. В противном случае $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ обозначает f.

e. Пусть **A** является формой, а **B** — константой. Если **B** обозначает t, то $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ принимает значение t для любого распределения значений по ее переменным. Пусть **B** обозначает f; тогда $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ для всякого распределения значений по переменным принимает значение f, если **A** для этого распределения значений принимает значение t, и принимает значение t, если **A** для этого распределения значений принимает значение f.

f. Пусть **A** является константой, а **B** — формой. Если **A** обозначает f, то $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ принимает значение t для любого распределения значений по ее переменным. Если **A** обозначает t, то $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ принимает для всякого распределения значений по ее переменным то же самое значение, которое для этого распределения значений принимает **B**.

g. Пусть **A** и **B** — формы, и пусть задано некоторое распределение значений по переменным формы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$. Тогда $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ принимает значение t, если для этого распределения значений по переменным либо **B** принимает значение t, либо **A** принимает значение f. В противном случае [**A** $\supset$ **B**] принимает значение f.

Все это было выписано с такой утомительной обстоятельностью ради иллюстрации. Последние три правила можно было бы, разумеется, выразить одним предложением, если только условиться считать, что константа имеет значение — а именно, свой денотат — для любого распределения значений по любым переменным. Если, кроме того, условиться считать, что иметь значение для пустого класса переменных — это то же самое, что обозначать, то этим предложением можно было бы охватить и правило d.

Эти правила, как, вероятно, заметил читатель, приводят к тому, что каждой константе (из P_1) приписывается единственный денотат, а каждой форме — единственная система значений.

Что же касается обоснования этих правил, то заметим, что правило d точно соответствует тому, что было сказано о материальной импликации в § 05. А именно, все, что угодно, имплицирует истину, а ложь имплицирует все, что угодно, но истина не имплицирует ложь. Тогда правила c, e, f, g как раз таковы, какими они должны быть с учетом сказанного в § 02 о переменных и формах.

Помимо главной интерпретации системы P_1, возможны также и другие ее интерпретации; некоторые из них будут дальше упомянуты в упражнениях.

Читатель все время должен помнить, что при формальном построении системы P_1 нельзя пользоваться никакой подразумеваемой интерпретацией, ни главной, ни какой-либо иной (ср. §§ 07, 09).

11. Определения. Для удобства изложения и исследования мы будем применять некоторые сокращения пп-формул системы P_1.

В частности, можно опускать внешние скобки у пп-формул, так что мы будем, например, писать

$$p \supset [q \supset p]$$

в качестве сокращения ппф †102. (Конечно, выражение $p \supset [q \supset p]$ и само по себе является формулой, но не пп-формулой, а так как в дальнейшем мы будем заниматься исключительно пп-формулами, то ее использование как сокращения формулы $[p \supset [q \supset p]]$ не может вызвать недоразумений.)

Мы будем опускать также и другие скобки, уславливаясь при восстановлении их производить группировку влево. Так,

$$p \supset f \supset f \supset p$$

является сокращением для †104, в то время как

$$p \supset [f \supset f] \supset p$$

есть сокращение пп-формулы

$$[[p \supset [f \supset f]] \supset p].$$

В тех же случаях, когда мы, опуская пару скобок, вставляем в выражение большую точку, ., мы уславливаемся, что при восстановлении скобок (вместо группировки влево) большая точка должна быть заменена левой скобкой [, а правая скобка] должна быть помещена непосредственно перед ближайшей правой скобкой, которая сама стоит правее заменяемой большой точки, но не имеет правее этой большой точки парной с нею левой скобки; если же правее большой точки нужной правой скобки нет, то восстанавливаемая правая скобка должна быть помещена в конце выражения[165]. (Здесь левая скобка называется *парной* с первой правой скобкой, которая стоит правее нее так, что число стоящих между ними левых скобок, возможно — нуль, равно числу стоящих между ними правых скобок.) Так, например, мы будем использовать выражение

$$p \supset \centerdot\, q \supset p$$

в качестве сокращения для †102 и выражение

$$[p \supset \centerdot\, f \supset f] \supset p$$

в качестве другого возможного сокращения пп-формулы, для которой мы выше указали сокращение

$$p \supset [f \supset f] \supset p.$$

Соглашение о больших точках можно использовать совместно с предыдущим, а именно соглашением о группировке влево, действующим в тех случаях, когда опущенная левая скобка не заменена большой точкой. Так, вместо †103 мы можем использовать каждое из следующих двух возможных сокращений:

$$s \supset [p \supset q] \supset \centerdot\, s \supset p \supset \centerdot\, s \supset q,$$

$$[s \supset \centerdot\, p \supset q] \supset \centerdot\, s \supset p \supset \centerdot\, s \supset q.$$

Аналогично

$$s_1 \supset [s_2 \supset \centerdot\, p \supset [q_1 \supset q_2] \supset r_1] \supset r_2$$

является сокращением для

$$[[s_1 \supset [s_2 \supset [[p \supset [q_1 \supset q_2]] \supset r_1]]] \supset r_2].$$

Как уже было сказано, и эти сокращения и другие, используемые в дальнейшем, являются не элементами логистической системы P_1, а просто приемами ее изложения. Они являются уступками краткости человеческой жизни и терпения, которые мы делаем на практике, но делать которые в теории мы считаем ниже своего достоинства. Мы просим читателя каждый раз, когда мы будем писать какое-либо сокращение некоторой пп-формулы[166], делать вид, будто эта пп-формула выписана полностью, и соответственно понимать нас. Мы и в самом деле должны полностью выписывать пп-формулы каждый раз, когда результатом их сокращения могли бы быть двусмысленность или неясность. Если же кто-либо вообще считает недостатком использование сокращений, не являющихся элементами логистической системы, то ему предлагается переписать всю эту книгу, не используя никаких сокращений, — труд хотя и немалый, но чисто механический.

Помимо сокращений, связанных с опусканием скобок, мы будем применять еще другой род сокращений, вводимых так называемыми *определениями*. Такое определение вводит новый символ или выражение (которое не встречается в самой логистической системе и не было ранее введено другими определениями) и объявляет его сокращением [167], которое будет употребляться вместо некоторой определенной ппф. При этом подразумевается (если только в специальных случаях не оговорено противное), что для этой пп-формулы используется одно и то же сокращение независимо от того, стоит ли она отдельно или же является частью более длинной пп-формулы [168].

Для того чтобы удобнее записывать определения, мы будем использовать стрелку „→", которая читается как „является сокращением для" или „используется как сокращение вместо" (или, короче, как "используется вместо"). Эта стрелка относится, таким образом, к языку синтаксиса, так же как термин „ппф" или знак „S |" из § 10. У основания стрелки (слева от нее) мы пишем *определяемое* — новый символ или выражение, которое вводится данным определением. У острия стрелки (справа от нее) пишем *определяющее* — ту ппф, вместо которой должно употребляться определяемое. При этом мы позволяем себе писать определяющее сокращенно, используя предшествующие определения или иные соглашения о сокращениях.

Нашим первым определением будет

D1. $t \to f \supset f$.

Это означает, что определяющее — пп-формулу $[f \supset f]$ — можно сокращенно записывать в виде t, как в тех случаях, когда она стоит отдельно, так и в тех случаях, когда она является частью более длинной пп-формулы. В частности, ту ппф, которую мы ранее сокращенно записывали в виде

$$p \supset [f \supset f] \supset p,$$

теперь можно еще больше сократить и записать в виде

$$p \supset t \supset p.$$

Формулируя определения, мы часто будем прибегать к *схемам определений*, или *определениям-схемам*, которые позволяют одним предложением передать большое число определений (обычно — бесконечно много определений). Если, например, **A** — произвольная ппф, то $[\mathbf{A} \supset f]$ сокращенно передается выражением, состоящим из символа $\sim$, за которым следуют все символы формулы **A** в их порядке. Эта бесконечная совокупность определений суммируется следующим определением-схемой:

D2. $\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \supset f$.

Заметьте, что здесь, как и в некоторых случаях в дальнейшем, *мы используем для выражений, которые содержат синтаксические переменные и имеют своими значениями пп-формулы, те же самые сокращения и методы сокращений, которые мы используем для самих пп-формул.* Этот прием понятен, вероятно, без каких-либо специальных пояснений, если его считать неформальным способом сокращения выражений языка синтаксиса, и в этом случае на него не следует смотреть как на отклонение от программы § 08 (ср. последний абзац § 08).

Мы даем, далее, следующие определения[169]:

D3. $[\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}] \rightarrow \sim . \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

D4. $[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \rightarrow \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{B}$.

D5. $[\mathbf{AB}] \rightarrow \mathbf{A} \not\subset \mathbf{B} \not\subset \mathbf{B}$.

D6. $[\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}] \rightarrow [\mathbf{A} \supset \mathbf{B}][\mathbf{B} \supset \mathbf{A}]$.

D7. $[\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}] \rightarrow [\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}] \vee [\mathbf{B} \not\subset \mathbf{A}]$.

D8. $[\mathbf{A} \subset \mathbf{B}] \rightarrow \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

D9. $[\mathbf{A} \not\supset \mathbf{B}] \rightarrow \mathbf{B} \not\subset \mathbf{A}$.

D10. $[\mathbf{A} \bar{\vee} \mathbf{B}] \rightarrow \sim \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

D11. $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] \rightarrow \sim \mathbf{A} \vee \sim \mathbf{B}$.

Конечно, подразумевается, что одну и ту же пп-формулу можно одновременно сократить в нескольких местах, применив к ним опрелеления. Например,

$$pt \vee \sim p$$

является сокращением для

$$[[[[[f \supset f] \supset [[[f \supset f] \supset p] \supset f]] \supset f] \supset [p \supset f]] \supset [p \supset f]].$$

Соглашение об опускании скобок, введенное в начале этого параграфа для пп-формул, выписанных без каких-либо сокращений, должно быть распространено на формулы, которые уже содержат сокращения в соответствии с D1—11. (В действительности мы этим уже несколько раз воспользовались выше; например, в D5, используя соглашение о группировке влево, мы опустили две пары скобок, которые в соответствии с D3 относятся к двум знакам $\not\subset$, а в D6 мы опустили внешнюю пару скобок, которая должна была присутствовать в соответствии с D5.)

Соглашение о восстановлении пары скобок, опущенной и замененной большой точкой, остается здесь таким же, как и раньше. Например,

$$p \,.\, q \supset r$$

после восстановления скобок принимает вид

$$[p[q \supset r]],$$

что в свою очередь является сокращением пп-формулы

$$[[[q \supset r] \supset [[[q \supset r] \supset p] \supset f]] \supset f].$$

Однако соглашение о группировке влево видоизменяется следующим образом. Пары скобок, встречающиеся в пп-формулах и в выражениях, являющихся сокращениями пп-формул, подразделяются на три категории. Высшую категорию составляют пары скобок, которые в соответствии с 10 iii относятся к знаку $\supset$ или в соответствии с D3, D6, D7, D8, D9 относятся к знакам $\not\supset$, $\equiv$, $\not\equiv$, $\subset$, $\not\subset$. Следующую категорию составляют пары скобок, которые в соответствии с D4, D10, D11 относятся к знакам $\vee$, $\bar{\vee}$, $|$. Наконец, третью категорию составляют пары скобок из определения D5. При восстановлении пар скобок, относящихся к одной категории, по-прежнему действует правило группировки влево. Однако пары скобок более высокой категории должны восстанавливаться первыми, без учета пар скобок более низкой категории, и должны охватывать пары скобок более низкой категории в той мере, в какой это следует из сказанного здесь[170)]. Знак $\sim$ не имеет относящихся к нему скобок, но образует четвертую и самую низкую категорию в том смысле, что если восстанавливаемая левая скобка, не представленная большой точкой, оказывается смежной со знаком $\sim$ или с серией последовательных знаков $\sim$, то она должна быть помещена не справа, а слева от этого знака или этой серии знаков.

Например, после восстановления скобок в $p \vee qr$ мы получаем $[p \vee [qr]]$, а не $[[p \vee q]r]$. После восстановления скобок в

$$p \supset q \vee \sim rs \equiv \sim p \vee \sim q \vee s$$

мы получаем

$$[[p \supset [q \vee [\sim rs]]] \equiv [[\sim p \vee \sim q\,] \vee s]].$$

Если соглашение о категориях пар скобок применяется совместно с соглашением о больших точках, то процедура восстановления скобок проводится следующим образом. В том случае, когда ни одна большая точка не стоит между двумя уже наличными скобками, образующими пару, мы считаем, что большие точки разбивают все выражение на части, в каждой такой части восстанавливаем скобки отдельно (используя соглашение о категориях скобок, а по отношению к скобкам одной категории — соглашение о группировке влево) и затем восстанавливаем остальные скобки, представленные большими точками. В противном случае мы берем такую часть выражения, которая заключена в пару уже имеющихся скобок и содержит большие точки, но не содержит больших точек, заключенных в пару скобок, уже имеющихся внутри этой части; в этой части мы восстанавливаем скобки, действуя так, как было только что указано; затем в получившемся выражении берем другую такую часть и продолжаем так до тех пор, пока все скобки не будут восстановлены. Например, после восстановления скобок в

$$p \supset q_{\blacksquare}\, rs, \qquad p \supset qr_{\blacksquare}\, r \supset s,$$
$$p \supset_{\blacksquare} q_{\blacksquare}\, rs, \qquad p \supset_{\blacksquare} qr_{\blacksquare}\, r \supset s,$$
$$s \supset [p \supset_{\blacksquare} q \supset r \vee_{\blacksquare} s \supset \sim q] \supset_{\blacksquare} s \supset \sim p$$

мы получаем соответственно

$$[[p \supset q][rs]], \qquad [[p \supset [qr]][r \supset s]],$$
$$[p \supset [q[rs]]], \qquad [p \supset [[qr][r \supset s]]],$$
$$[[s \supset [p \supset [[q \supset r] \vee [s \supset \sim q]]]] \supset [s \supset \sim p]].$$

Наконец, для удобства сокращения пп-формулы мы позволим себе также вводить в первую очередь специальные скобки, заключающие правильно построенные части этой формулы. Так, например, мы используем

$$p \supset q_{\blacksquare}\, r, \qquad p \supset q_{\blacksquare} \sim r, \qquad p \equiv q \vee_{\blacksquare} \sim r$$

в качестве сокращений пп-формул, которые подробнее записываются так:

$$[[p \supset q]r], \qquad [[p \supset q] \sim r], \qquad [[p \equiv q] \vee \sim r].$$

Тем, что обозначения определяемых в D2—11 мы согласовали с обозначениями сентенциональных связок, введенных в § 05, мы, конечно, хотели отметить известную согласованность их содержаний. Действительно, вводимое в каждом определении-схеме соглашение о сокращении соответствует сознанию того (и мотивировано тем), что для него уже существует определенная связка — в том смысле, что в P_1 имеется обозначение (хотя и составное), которое в главной интерпретации P_1 равносильно соответствующей связке.

Например, давая системе P_1 ее главную интерпретацию, нам не нужно добавлять к P_1 связку $\sim$, так как мы всегда можем использовать обозначение $[\mathbf{A} \supset f]$ для отрицания суждения **A** (или пропозициональной формы **A**). Обозначение $[\mathbf{A} \supset f]$ служит всем целям, которым служит обозначение $\sim \mathbf{A}$, исключая только краткость, и мы можем поэтому использовать первое для исключения второго.

Точно так же D4 соответствует сознанию того обстоятельства, что $[[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \supset \mathbf{B}]$ может служить (неразделительной) дизъюнкцией **A** и **B**, так что нет нужды вводить дизъюнкцию отдельно[171]. Читатель может усмотреть это из того, что при фиксированных значениях переменных (если таковые вообще имеются) $[[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \supset \mathbf{B}]$ ложно [172] тогда и только тогда, когда $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ истинно[172] и в то же время **B** ложно; но при ложности **B** выражение $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ истинно тогда и только тогда, когда **A** ложно; таким образом, $[[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \supset \mathbf{B}]$

ложно в том и только в том случае, если как **A**, так и **B** ложны (и, конечно, истинно в остальных случаях); но это в точности совпадает с тем, что мы имели бы для дизъюнкции **A** и **B**.

Аналогично мотивировкой определения D1 является то, что ппф, для которой вводится сокращение t, есть имя истинностного значения истина (в соответствии с семантическим правилом d из § 10).

12. Теоремы исчисления P_1. В качестве первого примера теоремы исчисления P_1 мы докажем

†120. $p \supset p$. [*Закон рефлексивности (материальной) импликации.*]

Читатель, который помнит главную интерпретацию системы P_1, данную в § 10, возможно, сочтет предложенную теорему не только очевидной, но даже более очевидной, чем любая из аксиом. Это верно, но это не делает доказательство теоремы излишним, так как мы хотим удостовериться не просто в истинности предложенной теоремы, а в том, что она следует из наших аксиом по нашим правилам; и не просто в том, что она верна в одной интерпретации, а в том, что она верна во всех правильных интерпретациях[173].

Доказательством теоремы †120 является следующая последовательность девяти формул:

$$s \supset [p \supset q] \supset_{\centerdot} s \supset p \supset_{\centerdot} s \supset q,$$
$$s \supset [r \supset q] \supset_{\centerdot} s \supset r \supset_{\centerdot} s \supset q,$$
$$s \supset [r \supset p] \supset_{\centerdot} s \supset r \supset_{\centerdot} s \supset p,$$
$$p \supset [r \supset p] \supset_{\centerdot} p \supset r \supset_{\centerdot} p \supset p,$$
$$p \supset [q \supset p] \supset_{\centerdot} p \supset q \supset_{\centerdot} p \supset p,$$
$$p \supset_{\centerdot} q \supset p,$$
$$p \supset q \supset_{\centerdot} p \supset p,$$
$$p \supset [q \supset p] \supset_{\centerdot} p \supset p,$$
$$p \supset p.$$

Здесь пп-формулы подвергнуты сокращению в соответствии с соглашениями, принятыми в предыдущем параграфе, и при проверке доказательства читатель должен представлять их себе переписанными в несокращенной форме (или, если необходимо, должен действительно переписать их так).

Так как имеются эффективные методы проверки, то теоретически достаточно просто выписать само доказательство без дополнительных пояснений, как это и сделано выше. Однако в помощь читателю мы дадим ниже подробное разъяснение. Первая из этих девяти пп-формул есть †103. Следующую ппф мы получаем из первой посредством *101, подставляя r вместо p. Далее, третья ппф получена из второй подстановкой p вместо q. Четвертая получена из третьей подстановкой p вместо s. Пятая получена из четвертой подстановкой q вместо r. Шестая ппф есть †102. Седьмая получается по *модус поненс* из пятой как большой посылки и из шестой как малой посылки. Затем восьмая ппф получается из седьмой опять посредством применения *101, причем $q \supset p$ подставляется вместо q. Наконец, $p \supset p$ получается по *модус поненс* из восьмой и шестой пп-формул как большой и малой посылок соответственно.

Удобно считать, что пятая ппф доказательства получена из первой посредством *одновременной подстановки*, а именно подстановки p, q, p вместо s, p, q соответственно. Из доказательства видно в деталях, как результат такой одновременной подстановки может быть получен посредством четырех последовательных простых подстановок.

Мы обобщим обозначение для подстановки, введенное в § 10, следующим образом:

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_n} \mathbf{A}|$$

будет формулой, которая получается одновременной подстановкой формул $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{B}_n$ вместо переменных $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, ...; $\mathfrak{b}_n$ в $\mathbf{A}$. Подстановка должна быть проведена для всех вхождений переменных $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, ..., $\mathfrak{b}_n$ в $\mathbf{A}$. Требуется чтобы все $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, ..., $\mathfrak{b}_n$ были различны (в противном случае результат подстановки не существует), но, конечно, не требуется, чтобы все или хотя бы некоторые из $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, ..., $\mathfrak{b}_n$ действительно входили в формулу $\mathbf{A}$.

Результат одновременной подстановки

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_n} \mathbf{A}|,$$

где $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, ..., $\mathfrak{b}_n$ — отличные друг от друга переменные, всегда может быть получен с помощью $2n$ последовательных простых подстановок, т. е. с помощью $2n$ последовательных применений *101. В некоторых случаях это возможно с меньшим чем $2n$ числом подстановок, но во всяком случае с помощью $2n$ подстановок это всегда можно сделать следующим образом. Пусть $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, ..., $\mathfrak{c}_n$ суть n первых в алфавитном порядке переменных, которые не входят ни в одну из пп-формул $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{B}_n$ $\mathbf{A}$ (такие всегда найдутся вследствие бесконечности числа переменных). Тогда мы подставляем в $\mathbf{A}$ последовательно $\mathfrak{c}_1$ вместо $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_2$ вместо $\mathfrak{b}_2$, ..., $\mathfrak{c}_n$ вместо $\mathfrak{b}_n$, $\mathbf{B}_1$ вместо $\mathfrak{c}_1$, $\mathbf{B}_2$ вместо $\mathfrak{c}_2$, ..., $\mathbf{B}_n$ вместо $\mathfrak{c}_n$.

Мы будем использовать знак $\vdash$ в качестве синтаксического обозначения для выражения того, что некоторая ппф есть теорема (системы P_1 или, в дальнейшем, другой логистической системы). Таким образом, „$\vdash p \supset p$" является сокращением для „$p \supset p$ есть теорема", и т. д. (Ср. примечание 65.)

С помощью этого обозначения мы можем сформулировать следующую метатеорему, доказательство которой мы только что наметили:

*121. Если $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathrm{S}^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \quad \mathfrak{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_n} \mathbf{A}|$.

Мы будем использовать эту метатеорему в качестве *производного правила вывода*, т. е. в доказательствах будем непосредственно переходить от **A** к

$$\mathrm{S}^{b_1 b_2 \ \ldots \ b_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \ \ldots \ \mathbf{B}_n} \mathbf{A} \Big|,$$

не приводя деталей промежуточных шагов, а просто ссылаясь на *121 (или на „одновременную подстановку", или на „подстановку").

Такое использование производных правил — так же как и использование определений и иных сокращений (§ 11) — оправдывается тем, что они являются только приемами изложения и от них в принципе можно было бы отказаться. В этом отношении, однако, существенно, чтобы доказательство производного правила вывода было *эффективным* (ср. §§ 07, 08) в смысле наличия эффективного метода, всегда позволяющего из данного доказательства посылок производного правила получить доказательство его заключения[174]. Ибо мы должны быть уверены в том, что всякий раз, когда подвергается сомнению некоторое доказательство, проведенное с помощью производных правил вывода, мы можем отвести это сомнение, приведя полное доказательство. Иными словами, мы заботимся о наличии механически осуществляемой процедуры, позволяющей, если это требуется, восстановить несокращенное доказательство. На этом основании мы просим читателя всегда представлять себе выписанными полностью (а в случае необходимости самому выписывать полностью) те доказательства конкретных теорем логистических систем, которые мы будем в действительности давать с использованием производных правил.

Доказательство метатеоремы *121 является, конечно, эффективным, как читатель легко заметит, просмотрев его заново.

Используя *121 как производное правило, с помощью некоторых других очевидных сокращений мы можем теперь следующим образом представить доказательство †120.

Одновременной подстановкой в †103:

$$\vdash p \supset [q \supset p] \supset_{\centerdot} p \supset q \supset_{\centerdot} p \supset p.$$

По †102 и *модус поненс*:

$$\vdash p \supset q \supset_{\centerdot} p \supset p.$$

Подстановкой $q \supset p$ вместо q:

$$\vdash p \supset [q \supset p] \supset_{\centerdot} p \supset p.$$

Наконец, по †102 и *модус поненс*:

$$\vdash p \supset p.$$

(Таким образом, изложение доказательства и некоторых относящихся к нему технических разъяснений занимает столько же места, сколько выше потребовалось для одного только несокращенного доказательства.)

Переходим к доказательству двух следующих теорем системы P_1.

†122. $f \supset p$.

Одновременной подстановкой в † 102:

$$\vdash p \supset f \supset f \supset p \supset_{\centerdot} f \supset_{\centerdot} p \supset f \supset f \supset p.$$

В силу †104 и по *модус поненс*:

$$\vdash f \supset_{\centerdot} p \supset f \supset f \supset p.$$

Одновременной подстановкой в †103:

$$\vdash f \supset [p \supset f \supset f \supset p] \supset_{\centerdot} f \supset [p \supset f \supset f] \supset_{\centerdot} f \supset p.$$

По *модус поненс*:

$$\vdash f \supset [p \supset f \supset f] \supset_{\centerdot} f \supset p.$$

Одновременной подстановкой в †102:

$$\vdash f \supset_{\centerdot} p \supset f \supset f.$$

Наконец, по *модус поненс*:

$$\vdash f \supset p.$$

† 123. $p \supset f \supset_{\centerdot} p \supset q$.

Одновременной подстановкой в †102:

$$\vdash f \supset q \supset_{\centerdot} p \supset_{\centerdot} f \supset q.$$

Подстановкой в †122 [175]:

$$\vdash f \supset q.$$

По *модус поненс*:

$$\vdash p \supset_{\centerdot} f \supset q.$$

Одновременной подстановкой в †103:

$$\vdash p \supset [f \supset q] \supset_{\centerdot} p \supset f \supset_{\centerdot} p \supset q.$$

Наконец, по *модус поненс*:

$$\vdash p \supset f \supset_{\centerdot} p \supset q.$$

(Теорема †123 известна под названием *закона отрицания антецедента*. Заметим, что по D2 ее можно сокращенно записать в виде $\sim p \supset_{\centerdot} p \supset q$.)

Упражнения к § 12

12.0. Докажите (в качестве метатеоремы), что эффективный метод проверки правильности построения, данный в § 10, действительно соответствует необходимым и достаточным условиям того, чтобы формула была правильно построена согласно правилам 10 i — iii. (Воспользуйтесь математической индукцией по числу вхождений знака $\supset$ в формулу.)

12.1. Докажите сделанное в § 10 утверждение о том, что если формула правильно построена и состоит из более чем одного символа, то она одним и только одним способом может быть представлена в виде $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$. Докажите также, что всякая правильно построенная и состоящая из непосредственно следующих друг за другом символов часть такой формулы либо совпадает со всей формулой, либо является пп-частью **A**, либо является пп-частью **B**[176]. (Используйте для доказательства тот же метод подсчета скобок, что и при эффективной проверке правильности построения, и вновь проведите математическую индукцию по числу вхождений знака $\supset$ в формулу.)

12.2. Пусть $\mathrm{P}_{1\mathrm{L}}$ — логистическая система, которая получается из P_1, если обозначение $[\_\_ \supset \_\_]$ всюду заменить на $C\_\_\ \_\_$ так, как это указано в примечании 91, а все остальное оставить без изменений. Постройте исходный базис системы $\mathrm{P}_{1\mathrm{L}}$. Сформулируйте и докажите для $\mathrm{P}_{1\mathrm{L}}$ метатеоремы, аналогичные метатеоремам из 12.0 и 12.1[177].

Следующие доказательства должны быть проведены с использованием *121 *и таким же образом, как это сделано во второй части* § 12. *Не пользуйтесь методами последующих параграфов.*

12.3. Докажите $q \supset r \supset_{\bullet} p \supset q \supset_{\bullet} p \supset r$ как теорему в P_1. Используйте эту теорему для того, чтобы дать доказательства теорем †122 и †123, которые были бы короче приведенных выше в том смысле, что они могут быть короче изложены[178].

12.4. Воспользуйтесь результатом упражнения 12.3 для доказательства *закона транзитивности* (*материальной*) *импликации* $p \supset q \supset_{\bullet} q \supset r \supset_{\bullet} p \supset r$ как теоремы системы P_1. (Один из методов состоит в применении закона самодистрибутивности к результату упражнения 12.3 и в использовании затем $p \supset q \supset_{\bullet} q \supset r \supset_{\bullet} p \supset q$.)

12.5. Докажите $p \supset q \supset p \supset_{\bullet} p \supset f \supset p$ как теорему исчисления P_1. (Используйте †123, 12.4.)

12.6. Докажите как теорему в P_1 *закон Пирса*: $p \supset q \supset p \supset p$. (Примените закон самодистрибутивности к $p \supset f \supset_{\bullet} p \supset f$ и используйте результат из 12.5.)

12.7. Пусть $\mathrm{P_W}$ — логистическая система, которая имеет те же исходные символы, правила построения и правила вывода, что и $\mathrm{P_1}$, и аксиомами которой являются закон транзитивности импликации, закон Пирса, †102 и †122. Вначале докажите последовательно как теоремы в $\mathrm{P_W}$ приведенные ниже формулы, а затем покажите, что $\mathrm{P_W}$ и $\mathrm{P_1}$ эквивалентны в том смысле, что они содержат одни и те же теоремы:

$$[p \supset . p \supset q] \supset . p \supset q.$$

$$p \supset . p \supset q \supset q. \qquad \textit{(Закон утверждения.)}$$

$$[p \supset . q \supset r] \supset . q \supset . p \supset r. \qquad \textit{(Закон коммутации.)}$$

$$q \supset r \supset . p \supset q \supset . p \supset r.$$

$$s \supset [p \supset q] \supset . s \supset p \supset . s \supset q.$$

$$p \supset f \supset f \supset p.$$

Проведите доказательство таким образом, чтобы не использовать четвертую аксиому, †122, нигде, кроме доказательства последней теоремы, $p \supset f \supset f \supset p$.

12.8. Докажите как теоремы в $\mathrm{P_W}$, не используя при этом четвертую аксиому, †122:

$$q \supset r \supset r \supset . p \supset q \supset r \supset r; \quad r \supset . p \supset . q \supset r;$$

$$p \supset r \supset r \supset . q \supset r \supset . p \supset q \supset r; \quad p \supset r \supset . p \supset q \supset r \supset r.$$

12.9. Для каждой из трех следующих интерпретаций сформулируйте недостающие семантические правила и исследуйте *правильность* интерпретации в смысле § 07. (1) Правила a, b, c сохраняются, но $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ обозначает t, если **A** и **B** — произвольные константы. (2) Правила a, b, c сохраняются, но $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ обозначает t, если **A** и **B** обозначают одно и то же истинностное значение, и $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ обозначает f, если **A** и **B** обозначают различные истинностные значения. (3) Правила a и d сохраняются, но (так называемые) переменные интерпретируются как константы, обозначающие t.

13. Теорема дедукции. *Вариантом* пп-формулы **A** из $\mathrm{P_1}$ называется пп-формула, полученная из **A** такой заменой переменных, при которой два вхождения в **A** одной и той же переменной остаются вхождениями одной и той же переменной, а два вхождения в **A** различных переменных остаются вхождениями различных переменных. Так, например, если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — различные переменные и если $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — тоже различные переменные, причем среди $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ нет таких, которые входили бы в **A** и не встречались бы среди $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, то

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}_{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2}\,\dot{}\,\dot{}\,\dot{}\,{}^{\mathbf{a}_n}_{\mathbf{b}_n}\mathbf{A}\,|$$

есть вариант формулы **A**. (Вариантами †102 являются, например, $r \supset . s \supset r$ и $q \supset . p \supset q$, но не $p \supset . r \supset r$ или $p \supset . p \supset p$.)

Ясно, что если **B** является вариантом **A**, то **A** является вариантом **B**. Ясно также, что всякий вариант варианта **A** есть вариант **A**. Наконец, всякая пп-формула **A** является, конечно, своим собственным вариантом.

Две пп-формулы, являющиеся вариантами друг друга, можно во многих отношениях использовать одну вместо другой. В частности, ввиду *101 всякий вариант теоремы есть теорема. Точно так же, если мы изменим систему P_1, заменив одну или несколько аксиом их вариантами, то теоремы останутся теми же самыми. В случае теорем, которым были даны словесные наименования (например, „закон самодистрибутивности импликации", „закон Пирса" и т. д.), мы будем теми же именами называть и варианты этих теорем.

Конечная последовательность пп-формул называется *вариантным доказательством*, если каждая пп-формула либо является вариантом аксиомы, либо непосредственно выводится из предыдущих пп-формул последовательности по одному из правил вывода. Легко видеть, что последняя пп-формула в вариантном доказательстве всегда является теоремой, так как всякий вариант аксиомы является теоремой, и мы будем называть вариантное доказательство вариантным доказательством этой последней пп-формулы.

Конечная последовательность пп-формул $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ называется *доказательством из гипотез* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, если для каждого i: либо (1) $\mathbf{B}_i$ является одним из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$; либо (2) $\mathbf{B}_i$ является вариантом аксиомы; либо (3) $\mathbf{B}_i$ выводится в соответствии с *100 из большой посылки $\mathbf{B}_j$ и малой посылки $\mathbf{B}_k$, где $j < i$, $k < i$; либо (4) $\mathbf{B}_i$ выводится в соответствии с *101 подстановкой из $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где заменяемая переменная не входит в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{A}_n$. Если $\mathbf{B}_m$ является последней формулой такой конечной последовательности пп-формул, то эта последовательность называется, более подробно, доказательством пп-формулы $\mathbf{B}_m$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, и мы используем обозначение

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_m,$$

которое означает: существует доказательство пп-формулы $\mathbf{B}_m$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

Заметим, что знак $\vdash$ не является ни символом, относящимся к системе P_1, ни частью какой-либо схемы сокращений пп-формул из P_1, а относится к языку синтаксиса (подобно знаку „S |" или сокращению „ппф") и используется при построении предложений о пп-формулах из P_1.

Использование знака $\vdash$, введенного в § 12, можно считать частным случаем сказанного выше, а именно тем частным случаем, когда $n = 0$. Ведь доказательство $\mathbf{B}_m$ из пустого класса гипотез — это то же самое, что и вариантное доказательство $\mathbf{B}_m$. Мы можем теперь читать обозначение $\vdash \mathbf{B}_m$ либо как утверждение, что существует вариантное доказательство пп-формулы $\mathbf{B}_m$, либо как утверждение, что $\mathbf{B}_m$ является теоремой (эти утверждения, очевидно, эквивалентны).

В определении доказательства из гипотез следует обратить особое внимание на связанное с (4) условие, что заменяемая переменная не должна быть одной из переменных, входящих в $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$. Например, неверно, что $q \supset f \supset f \vdash q \supset f \supset f \supset f$, хотя $q \supset f \supset f \supset f$ получается из $q \supset f \supset f$ подстановкой $q \supset f$ вместо q. С другой стороны, верно, что $q \supset f \supset f \vdash q$ по *100 и соответствующему варианту аксиомы † 104.

После этих приготовлений мы можем сформулировать и доказать метатеорему, составляющую основную цель настоящего параграфа:

*130. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$. (*Теорема дедукции.*)

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ является доказательством формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ (таким образом, $\mathbf{B}_m$ совпадает с $\mathbf{B}$). Вначале составим конечную последовательность пп-формул $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_m$. Мы покажем, как включить в эту последовательность конечное число дополнительных пп-формул таким образом, чтобы получающаяся последовательность была доказательством формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_m$, т. е. формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$, из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$. Добавляемые пп-формулы будут вставляться последовательно перед каждой из пп-формул $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ таким образом, что, выполнив все вставки, предшествующие какой-либо пп-формуле $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$, мы получим последовательность, которая, если рассматривать ее до формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$, является доказательством этой формулы из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ ..., $\mathbf{A}_{n-1}$ [179].

Действительно, рассмотрим некоторую $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ и, если $i > 1$, предположим, что все вставки, предшествующие $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_{i-1}$, уже выполнены. Тогда возможны следующие пять случаев:

Случай 1a: $\mathbf{B}_i$ есть $\mathbf{A}_n$. Тогда $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ есть $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{A}_n$. Вставляем перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ девять пп-формул, образующих вариантное доказательство некоторого варианта теоремы † 120, из которого $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ может быть получена подстановкой.

Случай 1b: $\mathbf{B}_i$ есть одно из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$, скажем $\mathbf{A}_r$. Тогда $\mathbf{A}_r \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ есть $\mathbf{A}_r \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{A}_r$. Из соответствующего варианта аксиомы † 102 формула $\mathbf{A}_r \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ может быть получена в два шага посредством подстановки (*101). Перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ вставляем вначале три пп-формулы, показывающие это, а затем вставляем $\mathbf{A}_r$. Последние две из этих четырех пп-формул, а именно $\mathbf{A}_r \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ и $\mathbf{A}_r$, дают $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ по *модус понэнс* (*100).

Случай 2: $\mathbf{B}$ есть вариант некоторой аксиомы. Следуя тому же плану, что и в случае 1b, вставляем перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ четыре пп-формулы, а именно, вначале вариантное доказательство пп-формулы $\mathbf{B}_i \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ (в два шага посредством подстановки из некоторого варианта аксиомы † 102), затем $\mathbf{B}_i$ (вариант аксиомы).

Случай 3: $\mathbf{B}_i$ выводится по *модус понендс* из большой посылки $\mathbf{B}_j$ и малой посылки $\mathbf{B}_k$, где $j < i$ и $k < i$. Тогда B_j есть $\mathbf{B}_k \supset \mathbf{B}_i$. Перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ вставляем вначале четыре пп-формулы, дающие вывод формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_k \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_i \supset \mathbf{B}_i$ посредством трех последовательных подстановок из некоторого варианта аксиомы †103, затем после них вставляем пп-формулу $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_k \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ (которую можно получить по *модус понендс* и из которой затем по *модус понендс* можно получить $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$, так как необходимые малые посылки $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$ и $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_k$ находятся в числе предыдущих пп-формул, уже входящих в создаваемую последовательность).

Случай 4: $\mathbf{B}_i$ получается в соответствии с *101 подстановкой в $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где заменяемые переменные не входят в $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$. Никаких дополнительных пп-формул вставлять не нужно, так как $\mathbf{A} \quad \supset \mathbf{B}_i$ получается из $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$ той же самой подстановкой (здесь, конечно, существенно, что заменяемые переменные не входят в $\mathbf{A}_n$).

В качестве частного случая теоремы дедукции при $n = 1$ мы получаем такое следствие:

*131. Если $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

В связи с теоремой дедукции нам понадобятся также следующие три метатеоремы:

*132. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ — все те (взятые в алфавитном порядке) переменные, которые входят в $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$, но не входят в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Если данное доказательство формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ не является в то же время доказательством $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, то это может быть только потому, что это доказательство включает подстановки вместо каких-то переменных из числа $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$. Пусть поэтому $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ — переменные, которые все отличны друг от друга, не имеют вхождений в $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ и не встречаются в данном доказательстве формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ (для определенности пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ — первые в алфавитном порядке переменные, обладающие требуемыми свойствами). Заменим всюду в данном доказательстве формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ переменные $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ на $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ соответственно. В результате мы получим доказательство из гипотез $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ пп-формулы

$$S^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}_{\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2} \quad {}^{a_l}_{c_l}\mathbf{B}\,|.$$

Для получения доказательства **B** из тех же гипотез нужно только добавить l дополнительных шагов, последовательно подставляя $\mathbf{a}_1$ вместо $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{a}_2$ вместо $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{a}_l$ вместо $\mathbf{c}_l$.

*133. Если $\vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

Доказательство. Это — частный случай *132 для $n = 0$.

*134. Если каждая пп-формула, которая по меньшей мере один раз встречается в числе пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, встречается также по меньшей мере один раз в числе пп-формул $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$, и если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

Доказательство. Это — следствие из *132, так как для доказательства из гипотез, конечно, безразлично, в каком порядке они расположены или сколько раз повторяется та или иная гипотеза.

Очевидно значение теоремы дедукции для метатеории (синтаксис и семантика) системы P: она дает возможность показать в известном смысле пригодность системы для тех целей, для которых она предназначается, а именно для формализации использования сентенциональных связок (см. § 05) и выводов, включающих эти связки.

Теорему дедукции можно также использовать в качестве производного правила вывода (ср. § 12), так как доказательство этой теоремы дает эффективный метод, позволяющий всякий раз, когда дано некоторое доказательство пп-формулы **B** из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, получить доказательство пп-формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ и, следовательно, повторением того же приема получить доказательство пп-формулы $\mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_{n-1} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$.

В качестве примеров использования теоремы дедукции как производного правила мы приведем следующие новые доказательства двух последних теорем § 12:

Доказательство теоремы †122. Одновременной подстановкой в †102:

$$\vdash f \supset_{\blacksquare} p \supset f \supset f.$$

Следовательно, по *модус поненс*:

$$f \vdash p \supset f \supset f.$$

Следовательно, по †104 и *модус поненс*:

$$f \vdash p.$$

Следовательно, по *131:

$$\vdash f \supset p.$$

Доказательство теоремы †123. По *модус поненс*:

$$p \supset f,\ p \vdash f.$$

По варианту $f \supset q$ теоремы † 122 и *модус поненс*:

$$p \supset f,\ p \vdash q.$$

Следовательно, по *130:

$$p \supset f \vdash p \supset q.$$

Следовательно, вновь по *130 (или, что приводит к тому же, по *131):

$$\vdash p \supset f \supset .\, p \supset q.$$

14. Некоторые дальнейшие теоремы и метатеоремы исчисления P_1. Мы переходим к доказательству трех дальнейших теорем исчисления P_1, используя теорему дедукции для того, чтобы представлять доказательства в более короткой форме.

†140[180]. $\quad p \supset .\, q \supset f \supset .\, p \supset q \supset f.$

Двукратным применением *модус поненс* получаем:

$$p,\ q \supset f,\ p \supset q \vdash f.$$

Трехкратным применением теоремы дедукции получаем:

$$\vdash p \supset .\, q \supset f \supset .\, p \supset q \supset f.$$

†141. $\quad p \supset q \supset .\, q \supset r \supset .\, p \supset r.$

Двукратным применением *модус поненс* получаем:

$$p \supset q,\ q \supset r,\ p \vdash r.$$

Следовательно, по теореме дедукции:

$$\vdash p \supset q \supset .\, q \supset r \supset .\, p \supset r.$$

(Как уже отмечалось в 12.4, † 141 известно под названием *закона транзитивности импликации*.)

†142. $\quad p \supset f \supset r \supset .\, p \supset r \supset r.$

По закону транзитивности импликации (т. е. подстановкой в †141 или в соответствующий вариант этой теоремы и по *модус поненс*):

$$p \supset r,\ r \supset f \vdash p \supset f.$$

Следовательно, двукратным применением *модус поненс*:

$$p \supset f \supset r,\ p \supset r,\ r \supset f \vdash f.$$

Следовательно, по теореме дедукции:

$$p \supset f \supset r,\ p \supset r \vdash r \supset f \supset f.$$

Следовательно, по одному из вариантов †104 и *модус поненс*:

$$p \supset f \supset r,\ p \supset r \vdash r.$$

Следовательно, по теореме дедукции:

$$\vdash p \supset f \supset r \supset . p \supset r \supset r.$$

Докажем также следующую метатеорему, которая будет нам нужна в следующем параграфе:

**143. Если формула правильно построена и состоит из более чем одного символа, то она может быть представлена в виде $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и притом единственным образом.

Доказательство. Из определения правильно построенной формулы непосредственно следует, что всякая пп-формула, состоящая из более чем одного символа, представима в виде $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ хотя бы одним способом. Мы должны показать, что она не может быть представлена в таком виде более чем одним способом.

Мы используем метод подсчета скобок, который был описан в § 10. Мы начинаем с начала формулы (т. е. с левого ее конца) и идем слева направо, считая каждое вхождение [за $+1$, а каждое вхождение] за -1 и суммируя. Число, которое мы таким образом ставим в соответствие некоторому вхождению скобки, будет называться *индексом* этого вхождения скобки в формулу.

Из определения правильно построенной формулы следует, что если пп-формула содержит символ $\supset$, то она начинается вхождением [и оканчивается вхождением]; мы будем называть их соответственно *начальной скобкой* и *заключительной скобкой* пп-формулы. Математической индукцией по общему числу вхождений символа $\supset$ мы получаем следующую лемму: *индекс всякого вхождения скобки в пп-формулу является положительным числом, за исключением заключительной скобки, которая имеет индекс нуль.*

Допустим теперь, что $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и $[\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ — одна и та же пп-формула. Случай 1: Если $\mathbf{A}$ не содержит вхождений символа $\supset$, то она должна состоять из единственного символа — либо переменной, либо f; так как $\mathbf{C}$ начинается с того же самого символа, что и $\mathbf{A}$, то она не имеет начальной скобки и поэтому не может содержать символа $\supset$; таким образом, $\mathbf{C}$ тождественно с $\mathbf{A}$. Случай 2: Если $\mathbf{C}$ не содержит вхождений символа $\supset$, то то же рассуждение показывает, что $\mathbf{A}$ должно быть тождественно с $\mathbf{C}$. Случай 3: Если как $\mathbf{A}$, так и $\mathbf{C}$ содержат символ $\supset$, то заключительная скобка в $\mathbf{A}$ есть первое вхождение в $\mathbf{A}$ скобки с индексом 0 с поэтому второе вхождение скобки с индексом 1 в $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$; аналогично заключительная скобка в $\mathbf{C}$ есть первое вхождение скобки с индексом 0 в $\mathbf{C}$ и поэтому второе вхождение скобки с индексом 1 в $[\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$; из этого следует, что заключительные скобки пп-формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ совпадают и поэтому сами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ тождественны. Наконец, так как во всех трех случаях $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ тождественны, то очевидно, что $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ также должны быть тождественны.

Хотя еще очень многие теоремы пропозиционального исчисления будут важны для дальнейших глав, мы не будем продолжать доказывать их, так как все они могут быть получены более сильным методом следующего параграфа, для обоснования которого достаточно теорем и метатеорем, уже имеющихся в нашем распоряжении. В действительности нам непосредственно будут нужны в следующем параграфе только *100, *101, †102, †120, †123, *130, †140, †142, **143 — остальные же аксиомы, теоремы и метатеоремы используются лишь в той мере, в какой они нужны для доказательства перечисленных.

Упражнения к § 14

14.0. Перепишите †140 и †142 сокращенно, используя D2, D4 и D9.

14.1. Существует доказательство q из гипотез p и $p \supset q$ путем однократного применения *модус поненс*. Следовательно, используя метод, даваемый доказательством *130, мы можем получить доказательство *закона утверждения* $p \supset_{\centerdot} p \supset q \supset q$. Упростите это доказательство, исключая все ненужные повторения одной и той же пп-формулы или ее вариантов и используя †120 и †102 для того, чтобы доказать $p \supset_{\centerdot} r \supset r$ более прямым способом. Представьте получившееся доказательство закона утверждения в стиле § 12, не используя ни теорему дедукции, ни другие теоремы, которые были доказаны только с использованием теоремы дедукции.

14.2. Дайте доказательство для †140, которое не использовало бы ни теорему дедукции, ни таких теорем, которые были доказаны только с использованием теоремы дедукции. (Доказательство § 14 становится непреодолимо громоздким, если переписать его без использования теоремы дедукции; тем не менее следует эвристически использовать идею применения метода, даваемого доказательством *130, к доказательству †140, представленному в § 14.)

Дайте доказательства следующих теорем в стиле § 14, *используя теорему дедукции и все теоремы и метатеоремы, которые были ранее доказаны в тексте или приведены в виде упражнений:*

14.3. $p \supset_{\centerdot} q \supset r \supset_{\centerdot} p \supset q \supset r$.

14.4. $p \supset q \supset r \supset_{\centerdot} p \supset r \supset r$.

14.5. $p \supset r \supset r \supset_{\centerdot} p \supset f \supset r$.

14.6. $p \supset q \supset [r_1 \supset s] \supset_{\centerdot} p \supset [r_2 \supset s] \supset_{\centerdot} r_1 \supset_{\centerdot} r_2 \supset s$.

14.7. $p \vee q \supset q \vee p$.

14.8. $[p \supset q] \vee [q \supset p]$.

14.9. Докажите следующие четыре производных правила исчисления P_1 непосредственно — без использования *130 или понятия доказательств из гипотез:

(1) Если $\vdash \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$.

(2) Если всякая пп-формула, хотя бы один раз встречающаяся среди $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, встречается также хотя бы один раз среди $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ и если $\vdash \mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{C}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{C}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{C}_r \supset \mathbf{B}$.

(3) Если $\mathbf{B}$ является одним из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2. \ldots, \mathbf{A}_n$, то $\vdash \mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$.

(4) Если каждая пп-формула, хотя бы однн раз встречающаяся среди $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$, встречается также хотя бы один раз среди $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ и если $\vdash \mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_n \supset \mathbf{A}$ и $\vdash \mathbf{B}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{B}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{B}_m \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{C}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{C}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{C}_r \supset \mathbf{B}$.

Подробно объясните, каким образом эти производные правила можно использовать в качестве замены теоремы дедукции при проведении доказательств теорем исчисления $\mathbf{P}_1$. Проиллюстрируйте это, проведя доказательства трех последних теорем § 14 с помощью этих производных правил (и без использования теоремы дедукции) [181].

15. Тавтологии, проблема разрешения. Пусть $\mathbf{B}$ является некоторой пп-формулой исчисления P_1, пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — попарно различные переменные, среди которых имеются все переменные, входящие в $\mathbf{B}$, и пусть, наконец, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — истинностные значения (каждое из них есть либо t, либо f). Мы определяем *значение формулы* $\mathbf{B}$ *для значений* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *переменных* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ с помощью излагаемого ниже рекурсивного процесса, который состоит в приписывании значений правильно построенным частям $\mathbf{C}$ формулы $\mathbf{B}$ в порядке возрастания числа вхождений символа $\supset$ в $\mathbf{C}$. Если $\mathbf{C}$ есть f, то значением $\mathbf{C}$ является f; если $\mathbf{C}$ есть $\mathbf{a}_i$, то значением $\mathbf{C}$ является a; если $\mathbf{C}$ есть $[\mathbf{C}_1 \supset \mathbf{C}_2]$, то значением $\mathbf{C}$ является t в том случае, когда значением $\mathbf{C}_2$ является t или значением $\mathbf{C}_1$ является f, наконец, значением $\mathbf{C}$ является f в том случае, когда значениями $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ являются t и f соответственно. Повторяя этот процесс, мы в конце концов припишем некоторое значение, t или f, формуле $\mathbf{B}$, и это значение мы называем значением формулы $\mathbf{B}$ для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Единственность значения формулы $\mathbf{B}$ для данной системы значений ее переменных вытекает как следствие из **143.

Пп-формула $\mathbf{B}$ исчисления P_1 называется *тавтологией*, если она имеет значение t для всякой системы значений (являющихся истинностными значениями) ее переменных, и называется *противо-*

речием, если для всякого набора значений ее переменных она имеет значение f.

Нетрудно заметить, что описанный выше рекурсивный процесс, с помощью которого мы получаем значение формулы **B** для данной системы значений ее переменных, точно следует семантическим правилам, которые были даны в § 10 для главной интерпретации исчисления P_1. Однако в § 10 мы считали известным содержание выражений „обозначает" и „имеет значение" и использовали семантические правила для того, чтобы дать интерпретацию исчислению P_1 как языку, предназначенному для содержательного общения. С другой стороны, в настоящем параграфе мы используем те же самые правила (которые в остальном остаются неизменными) для того, чтобы абстрактно определить соответствие, называемое „иметь *значения*", между пп-формулами (для которых заданы *значения* их переменных) и истинностными значениями. Слово „значения" в двух своих вхождениях, выделенных курсивом, понимается как вновь введенный технический термин безотносительно к какому-либо содержанию, а соответствие определяется абстрактно, т. е. синтаксически, в том смысле, что оно может быть использовано независимо от того, какая интерпретация приписана системе P_1 (если P_1 вообще приписана некоторая интерпретация). Ср. примечание 143.

Дав определение значения формулы **B** для данной системы значений ее переменных, мы указали эффективный метод нахождения этого значения (см. обсуждение понятия эффективности в § 07 и примечания 118, 119). Так как пп-формула **B** может иметь лишь конечное число переменных и, следовательно, лишь конечное число систем значений ее переменных, то это дает эффективный метод решения вопроса, является ли **B** тавтологией или противоречием или нет. Для иллюстрации этого алгоритма мы продемонстрируем следующую проверку того, что †103 является тавтологией, используя при этом указанный Куайном удобный порядок процесса:

s	$\supset$	$[p$	$\supset$	$q]$	$\supset_{\bullet}$	s	$\supset$	p	$\supset_{\bullet}$	s	$\supset$	q
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	f	f	t	t	t	t	f	t	f	f
t	t	f	t	t	t	t	f	f	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t	t	f	f	t	t	f	f
f	t	t	t	t	t	f	t	t	t	f	t	t
f	t	t	f	f	t	f	t	t	t	f	t	f
f	t	f	t	t	t	f	t	f	t	f	t	t
f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f	t	f

Детали процесса таковы. Вначале выписывается в одну строчку ппф †103. Три входящие в нее переменные суть s, p, q; все возможные системы значений этих переменных записываются в виде трех столбцов из букв t и f — по одному столбцу под первым вхождением каждой переменной в пп-формулу. Затем под каждым из остающихся вхождений некоторой переменной мы выписываем тот же столбец, который выписан под ее первым вхождением. После этого приписываются значения различным правильно построенным частям формулы в порядке возрастания их длины и системы их значений подписываются под главным знаком импликации соответствующей части в виде столбца из букв t и f. Например, значения, приписанные части $[p \supset q]$, появляются в виде столбца под вторым знаком импликации совокупной пп-формулы; верхнее t этого столбца получено из значений t и t переменных p и q в соответствии с правилом, данным в первом абзаце этого параграфа; второе f этого столбца получено из значений t и f переменных p и q в соответствии с тем же правилом и т. д. Далее, значения, приписанные части $s \supset [p \supset q]$, фигурируют в столбце под первым знаком импликации совокупной пп-формулы; верхнее t этого столбца получено из значений t и t переменной s и части $[p \supset q]$ и т. д. Читателю следует довести процесс до конца и сравнить результат с результатом, указанным выше. В конце процесса система значений совокупной пп-формулы появляется в виде столбца под ее главным знаком импликации, и тот факт, что этот столбец состоит из одних только букв t, показывает, что рассматриваемая пп-формула является тавтологией.

Таблица, в которой указаны значения формулы $p \supset q$ для всех систем значений переменных p и q, называется *истинностной таблицей* знака $\supset$. Аналогичные *истинностные таблицы* можно вычислить и для всех остальных обозначений, введенных в D2—11; например, в соответствии с D4 в истинностной таблице знака $\vee$ будут указаны значения формулы $p \supset q \supset q$ для всех систем значений переменных p и q, вычисляемые по правилу, данному в первом абзаце этого параграфа. Полный список истинностных таблиц, включая таблицу для $\supset$, выглядит следующим образом:

p	$\sim p$
t	f
f	t

p	q	$p \supset q$	$p \not\subset q$	$p \vee q$	pq	$p \equiv q$	$p \not\equiv q$	$p \subset q$	$p \not\supset q$	$p \bar{\vee} q$	$p \mid q$
t	t	t	f	t	t	t	f	t	f	f	f
t	f	f	f	t	f	f	t	t	t	f	t
f	t	t	t	t	f	f	t	f	f	f	t
f	f	t	f	f	f	t	f	t	f	t	t

Хотя в этих истинностных таблицах указываются явно лишь значения, например, формулы $p \vee q$ для данных значений переменных p и q, однако подразумевается, конечно, что эти же таблицы могут быть использованы и в том случае, когда переменные замещены произвольными пп-формулами, например для нахождения значений формулы $\mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2$ для данных значений формул $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$.

Если мы хотим применить описанный выше алгоритм вычисления системы истинностных значений пп-формул к какой-либо пп-формуле, сокращенной с помощью D1—11, то следует вначале переписать рассматриваемую пп-формулу в несокращенной форме и лишь затем применить к ней указанный алгоритм. В теоретических рассмотрениях мы будем предполагать, что это выполняется. Однако на практике удобнее оставлять формулу сокращенной и применять приведенный выше полный список истинностных таблиц. Например, проверка того, что

$$t \supset p \,\bar{\vee}\, q \equiv .\, p \not\equiv q \not\equiv pq \supset f$$

является тавтологией, протекает при использовании сокращенной формы следующим образом:

t	$\supset$	p	$\bar{\vee}$	q	$\equiv .$	p	$\not\equiv$	q	$\not\equiv$	p		q	$\supset$	f
t	f	t	f	t	t	t	f	t	t	t	t	t	f	f
t	f	t	f	f	t	t	t	f	t	t	f	f	f	f
t	f	f	f	t	t	f	t	t	t	f	f	t	f	f
t	t	f	t	f	t	f	f	f	f	f	f	f	t	f

Теперь мы докажем следующую метатеорему:

**150. Каждая теорема исчисления P_1 является тавтологией.

Доказательство. Докажем вначале следующую лемму: *Если* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ — *попарно различные переменные, среди которых имеются все переменные, входящие в* $\mathbf{A}$, *и все переменные, входящие в* $\mathbf{B}$, *и если для значений* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *а переменных* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ *формула* $\mathbf{B}$ *принимает значение* b, *а значением* $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ *является* c, *то значением* $\mathbf{A}$ *для значений* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ *переменных* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ *будет* c.

Лемма очевидна, если $\mathbf{A}$ состоит из одного символа. Далее мы применяем математическую индукцию по общему числу вхождений символа $\supset$ в $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{A}$ есть $\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2$, то $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ есть $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}_1| \supset \mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}_2|$. Предположим, что для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ значением $\mathbf{B}$ является b, значением $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ является c, значением $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}_1|$ является c_1 и значением $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}_2|$ является c_2. Тогда c есть f, если c_1 есть t и c_2 есть f, и c есть t во всех остальных случаях. По предположению индукции, мы имеем для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ значение c_1 для $\mathbf{A}_1$ и значение c_2 для $\mathbf{A}_2$; следовательно, значением $\mathbf{A}$ является f, если c_1 есть t и c_2 есть f; во всех остальных случаях значением $\mathbf{A}$ является t; таким образом, во всех случаях значением $\mathbf{A}$ будет c.

Утверждение леммы получается теперь математической индукцией. Для правила подстановки *101 мы сразу получаем из леммы, что если заключение $S^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ принимает значение f для некоторой системы значений переменных, то для некоторой системы значений переменных посылка **A** также должна принимать значение f. Поэтому если в *101 посылка **A** является тавтологией, то и заключение $S^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ должно быть тавтологией.

Для правила *модус поненс*, *100, если малая посылка **A** является тавтологией, а заключение **B** принимает значение f для какой-либо системы значений переменных (входящих в **A** и **B**), то из определения значения пп-формулы непосредственно следует, что для той же системы значений переменных большая посылка $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ принимает значение f. Поэтому если в *100 обе посылки являются тавтологиями, то и заключение должно быть тавтологией.

Таким образом, мы показали, что оба правила вывода исчисления P_1 сохраняют тавтологию в том смысле, что если посылка (или посылки) является тавтологией, то и заключение—тавтология. Мы предоставляем читателю проверить, что три аксиомы исчисления P_1 являются тавтологиями. Из этого следует метатеорема **150.

*151. Пусть **B** — пп-формула исчисления P_1, пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — попарно различные переменные, среди которых имеются все переменные, входящие в **B**, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — истинностные значения. Пусть, далее, $\mathbf{A}_i$ есть либо $\mathbf{a}_i$, либо $\mathbf{a}_i \supset f$, в зависимости от того, является ли a_i t или f, и пусть $\mathbf{B}'$ есть **B** или $\mathbf{B} \supset f$ в зависимости от того, является ли t или f значением **B** для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Тогда $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}'$.

Для того, чтобы доказать, что

(1) $$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}',$$

мы применяем математическую индукцию по числу вхождений символа $\supset$ в формулу **B**.

Если в **B** нет вхождений знака $\supset$, то **B** есть либо f, либо одна из переменных $\mathbf{a}_i$. В том случае, когда **B** есть f, $\mathbf{B}'$ есть $f \supset f$ и, следовательно, (1) получается подстановкой в соответствующий вариант теоремы †120. В том случае, когда **B** есть $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{B}'$ совпадает с пп-формулой $\mathbf{A}_i$ и мы легко получаем (1), так как доказательство $\mathbf{B}'$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ состоит из единственной пп-формулы $\mathbf{B}'$.

Предположим теперь, что **B** содержит вхождения знака $\supset$. Тогда **B** имеет вид $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2$. Имеем, по предположению индукции,

(2) $$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_1',$$

(3) $$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_2',$$

где $\mathbf{B}_1'$ есть либо $\mathbf{B}_1$, либо $\mathbf{B}_1 \supset f$, в зависимости от того, принимает ли $\mathbf{B}_1$ значение t или f для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, а $\mathbf{B}_2'$ есть либо $\mathbf{B}_2$, либо $\mathbf{B}_2 \supset f$, в зависимости от того, принимает ли $\mathbf{B}_2$ значение t или f для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Если $\mathbf{B}_2'$ есть $\mathbf{B}_2$, то $\mathbf{B}'$ есть $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2$ и (1) получается из (3) подстановкой в соответствующий вариант †102 и по *модус поненс*. Если $\mathbf{B}_1'$ есть $\mathbf{B}_1 \supset f$, мы вновь получаем, что $\mathbf{B}'$ есть $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2$, и (1) получается из (2) применением подстановки в соответствующий вариант †123 и *модус поненс*. Остается только тот случай, когда $\mathbf{B}_1'$ есть $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2'$ есть $\mathbf{B}_2 \supset f$, а в этом случае $\mathbf{B}'$ имеет вид $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2 \supset f$ и (1) получается из (2) и (3) подстановкой в соответствующий вариант †140 и двукратным применением *модус поненс*.

Таким образом, метатеорема *151 доказана посредством математической индукции.

Это доказательство *151 эффективно в том смысле, что оно дает эффективный метод для нахождения доказательства $\mathbf{B}'$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. Если $\mathbf{B}$ не содержит вхождений знака $\supset$, то требуемое доказательство прямо указано. Если $\mathbf{B}$ содержит вхождения знака $\supset$, то в доказательстве прямо дается эффективное сведе́ние проблемы нахождения доказательства $\mathbf{B}'$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ к двум проблемам нахождения доказательств $\mathbf{B}_1'$ и $\mathbf{B}_2'$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$; та же самая редукция применяется затем к двум последним проблемам и т. д.; после конечного числа повторений процесс сведения должен окончиться, дав эффективное доказательство формулы $\mathbf{B}'$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

Мы докажем теперь метатеорему, обратную к **150 и тоже эффективную.

*152. Если $\mathbf{B}$ — тавтология, то $\vdash \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — переменные, входящие в формулу $\mathbf{B}$, и для произвольной системы значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ пусть $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ — те же формулы, что и в *151. Формула $\mathbf{B}'$ из *151 совпадает с $\mathbf{B}$, так как $\mathbf{B}$ — тавтология. Поэтому по *151

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}.$$

Это имеет место при любом выборе значения a_n, т. е. независимо от того, является ли a_n t или f. Поэтому мы имеем как

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{a}_n \supset f \vdash \mathbf{B},$$

так и

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{a}_n \vdash \mathbf{B}.$$

По теореме дедукции имеем

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{a}_n \supset / \supset \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{a}_n \supset \mathbf{B}.$$

Следовательно, используя подстановку в соответствующий вариант теоремы † 142 и дважды используя *модус поненс*, получаем

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{B}.$$

Мы элиминировали, таким образом, гипотезу $\mathbf{A}_n$. Повторяя тот же процесс, мы можем элиминировать гипотезу $\mathbf{A}_{n-1}$ и т. д., пока не будут элиминированы все гипотезы [182]. В конце концов мы получим $\vdash \mathbf{B}$.

Проблема разрешения в логистической системе — это проблема нахождения эффективной процедуры, или алгоритма, так называемой *процедуры разрешения* или *разрешающей процедуры*, с помощью которой относительно любой пп-формулы исчисления можно решить, является ли она теоремой или нет (и если является теоремой, то найти ее доказательство [183]).

Описанная в начале этого параграфа эффективная процедура распознавания тавтологий вместе с эффективными доказательствами метатеорем **150 и *152 составляют решение проблемы разрешения в логистической системе P_1.

Это решение проблемы разрешения исчисления P_1 не зависит от какой-либо конкретной интерпретации исчисления P_1. Являясь по существу чисто синтаксическим, оно может быть использовано при любой интерпретации исчисления P_1 или даже тогда, когда не принято вообще никакой интерпретации.

Проблему разрешения в этом смысле мы будем более подробно называть *проблемой разрешения для доказуемости* в логистической системе или в формализованном языке, полученном интерпретированием логистической системы.

В случае формализованного языка существует также *семантическая проблема разрешения*, как мы будем ее называть, а именно проблема нахождения эффективной процедуры распознавания, является ли некоторое произвольное предложение истинным в семантическом смысле (§§ 04, 09) и является ли некоторая произвольная пропозициональная форма истинной для всех значений ее переменных [184]. Для формализованного языка, получаемого с помощью главной интерпретации исчисления P_1, семантическая проблема разрешения тривиальна, так как требуемая эффективная процедура прямо дается семантическими правилами конца § 10. Однако эта тривиальность семантической проблемы разрешения никоим образом не имеет места для произвольных формализованных языков, так как содержащееся в семантических правилах определение истины часто бывает неэффективным.

Проблема разрешения для доказуемости не является, как мы видели, тривиальной даже в относительно простом случае системы P_1.

Ввиду того, что проблема разрешения исчисления P_1 решена, нет более необходимости давать явные доказательства отдельных теорем из P_1. Всякий раз, когда нам понадобится некоторая теорема из P_1, нам будет достаточно просто выписать ее, предоставив читателю убедиться в том, что она является тавтологией, и применяя процедуру, указанную в доказательствах метатеорем *152 и *151, найти отсюда ее доказательство. Основываясь на этом, мы сейчас добавим, в частности, следующие пять теорем исчисления P_1:

†153. $t \supset p \equiv p$.

†154. $\sim\sim p \equiv p$.

†155. $p \equiv q \supset . q \equiv p$.

†156. $p \equiv q \supset . p \supset q$.

†157. $p \equiv q \supset . q \equiv r \supset . p \equiv r$.

†154 является *полным законом двойного отрицания* (ср. примечание 163). †155 является *законом коммутативности (материальной) эквивалентности, а* †157 *есть закон транзитивности (материальной) эквивалентности.*

Доказательство метатеорем исчисления P_1 тоже часто облегчается решением проблемы разрешения. Это верно, например, в следующем случае:

*158. Если **B** получается из **A** подстановкой **N** вместо одного или нескольких вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**) и если $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$, то $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ будет полным перечнем переменных, входящих в **A** и **B** вместе. Так как $\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$ — теорема, то это тавтология. Поэтому, как видно из истинностной таблицы для $\equiv$, **M** и **N** имеют одно и то же значение для всякой системы значений переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Так как **B** получено из **A** подстановкой **N** вместо некоторых вхождений **M**, то отсюда следует, что **A** и **B** принимают одно и то же значение для всякой системы значений переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (мы предоставляем читателю проведение деталей доказательства методом математической индукции по числу вхождений знака $\supset$ в **A** с использованием результатов упражнения 12.1). В силу истинностной таблицы для $\equiv$ из этого следует, что $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ является тавтологией. Отсюда по *152 получаем $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

В качестве следствия имеем также:

*159. Если **B** получается из **A** подстановкой **N** вместо одного или нескольких вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**), если $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$ и $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B}$.
(*Правило подстановочности эквивалентности.*)

Доказательство. По *158 имеем $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Поэтому с помощью † 156, подстановки и *модус поненс* получаем $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Так как $\vdash \mathbf{A}$, то еще одно применение *модус поненс* дает $\vdash \mathbf{B}$.

Упражнения к § 15

15.0. Проверьте следующие тавтологии:

(1) Пп-формулы из 14.4 и 14.5.

(2) Пп-формула из 14.6.

(3) $pq \supset r \supset_{\blacksquare} p \supset_{\blacksquare} q \supset r.$ (*Закон вынесения.*)

(4) $[p \supset_{\blacksquare} q \supset r] \supset_{\blacksquare} pq \supset r.$ (*Закон внесения.*)

(5) $[p \supset q][p \supset r] \supset_{\blacksquare} p \supset qr.$ (*Закон композиции.*)

(6) $p \supset q \supset_{\blacksquare} \sim q \supset \sim p.$ (*Закон контрапозиции.*)

(7) $p \equiv q \equiv_{\blacksquare} q \equiv p.$ (*Полный закон коммутативности эквивалентности.*)

(8) Закон транзитивности эквивалентности, †157.

(9) $\sim_{\blacksquare} p \sim p.$ (*Закон противоречия.*)

(10) $p \vee \sim p.$ (*Закон исключенного третьего.*)

15.1. Для каждой из следующих пп-формул определите, является ли она тавтологией или противоречием или не является ни тем, ни другим:

(1) $p \supset r \supset r \supset_{\blacksquare} p \supset q \supset r.$

(2) $p \supset q \supset [r \supset s] \supset_{\blacksquare} p \supset r \supset_{\blacksquare} q \supset s.$

(3) $f \supset f \supset_{\blacksquare} f \supset f \supset f.$

(4) $p \equiv q \equiv p \vee q \equiv \sim p \vee \sim q.$

15.2. Докажите, что если **B** получается из **A** подстановкой **N** вместо одного или нескольких вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**), то $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

15.3. Дайте доказательства теорем †154 и †156 в стиле § 14, не используя методов или результатов § 15.

15.4. Мы говорим, что пп-формула **B**, содержащая n различных переменных, находится в *импликативной нормальной форме*, если выполнены следующие условия: (i) **B** имеет вид $\mathbf{C}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{C}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{C}_m \supset f$; (ii) каждая $\mathbf{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имеет вид $\mathbf{C}_{i1} \supset_{\blacksquare} \mathbf{C}_{i2} \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{C}_{in} \supset f$; (iii) каждое $\mathbf{C}_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, n)$ есть либо $\mathbf{b}_k$, либо $\sim \mathbf{b}_k$, где $\mathbf{b}_k$ есть k-я переменная в алфавитном порядке переменных (§ 10), входящая в **B**; (iv) антецеденты $\mathbf{C}_i$ все различны и упорядочены так, что если $\mathbf{C}_{i1}, \mathbf{C}_{i2}, \ldots, \mathbf{C}_{i(k-1)}$ совпадают с $\mathbf{C}_{j1}, \mathbf{C}_{j2}, \ldots, \mathbf{C}_{j(k-1)}$ соответственно, а $\mathbf{C}_{ik}$ есть $\mathbf{b}_k$ и $\mathbf{C}_{jk}$ есть $\sim \mathbf{b}_k$, то $i < j$. Покажите, что для всякой пп-формулы **A** существует единственная соответствующая пп-формула **B** (*импликативная нормальная форма* формулы **A**), такая, что $\mathbf{B}$ находится в импликативной нормальной форме, каждое $\mathbf{C}_i$ содержит те же переменные, что и $\mathbf{A}$, и, наконец, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. (Используя значения данной пп-формулы $\mathbf{A}$ для различных систем значений ее переменных, определите формулу $\mathbf{B}$ так, чтобы формула $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ была тавтологией.)

Какова импликативная нормальная форма тавтологии, содержащей n различных переменных $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ и не содержащей других переменных? Противоречия, содержащего те же самые переменные и не содержащего других переменных?

Каковы возможные импликативные нормальные формы пп-формулы, не содержащей переменных? Пп-формулы, содержащей точно одну переменную? Пп-формулы, содержащей точно две (различных) переменных?

15.5. Покажите, что P_1 — коммутативное кольцо, в котором роль равенства играет эквивалентность исчисления P_1, роль сложения играет антиэквивалентность исчисления P_1 и роль умножения — конъюкция исчисления P_1, в том смысле, что тавтологиями и потому теоремами в P_1 являются следующие аналоги основных соотношений, или законов, кольца:

$$p \not\equiv q \equiv .\, q \not\equiv p; \qquad pq \equiv qp;$$

$$p \not\equiv [q \not\equiv r] \equiv .\, p \not\equiv q \not\equiv r; \qquad p[qr] \equiv pqr,$$

$$p \not\equiv q \equiv r \supset .\, q \equiv .\, p \not\equiv r; \qquad p[q \not\equiv r] \equiv .\, pq \not\equiv pr.$$

Определите кольцевое вычитание (см. третий из приведенных выше законов). Определите также нуль и единицу кольца.

15.6. Проверив тавтологии

$$p \not\equiv p \equiv f,$$

$$pp \equiv p,$$

покажите, что P_1 является, в таком же смысле, булевым кольцом [185].

15.7. В аналогичном смысле покажите, что исчисление P_1 есть булево кольцо с эквивалентностью в качестве кольцевого равенства, с эквивалентностью же в качестве кольцевого сложения и дизъюнкцией в качестве кольцевого умножения. Определите кольцевое вычитание, а также нуль и единицу кольца [186].

15.8. В аналогичном смысле P_1 является также булевой алгеброй, опять с эквивалентностью в качестве равенства и с дизъюнкцией и конъюнкцией в качестве булевых суммы и произведения соответственно [187]. Проверьте тавтологии, заключенные в следующих положениях: *полный закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции; полный закон дистрибутивности* *дизъюнкции относительно конъюнкции*; два *закона поглощения* —

$$p \vee pq \equiv p, \qquad p[p \vee q] \equiv p,$$

и два *закона де Моргана*[188] —

$$\sim [p \vee q] \equiv \sim p \sim q, \qquad \sim [pq] \equiv \sim p \vee \sim q.$$

15.9. В различных исследованиях по традиционной логике рассматриваются определенного рода выводы, известные под названием гипотетических силлогизмов, дизъюнктивных силлогизмов и дилемм. Они формулируются словесно и содержат[189]:

Гипотетический силлогизм

Модус поненс: Если A, то B. A. Следовательно, B.
Модус толленс. Если A, то B. Не B. Следовательно, не A.

Дизъюнктивный силлогизм

Модус толлендо поненс. A или B. Не A. Следовательно, B.
Модус понендо толленс: A или B. A. Следовательно, не B.

Дилемма

Простая конструктивная: Если A, то C. Если B, то C. A или B. Следовательно, C.
Простая диструктивная: Если A, то B. Если A, то C. Не B или не C. Следовательно, не A.
Сложная конструктивная: Если A, то B. Если C, то D. A или C. Следовательно, B или D.
Сложная диструктивная: Если A, то B. Если C, то D. Не B или не D. Следовательно, не A или не C.

Вместо букв A, B, C, D здесь можно подставлять предложения [190], и в действительности мы должны были бы использовать жирные греческие буквы (в соответствии с соглашением § 08), если бы только у нас имелся какой-либо определенный язык первой ступени, к которому их можно было бы отнести. Среди авторов некоторые спорят друг с другом, а некоторые не высказываются достаточно ясно по вопросу о том, (a) означают ли слова „если . . ., то . . .“ материальную импликацию или какой-либо иной вид импликации, и (b) означает ли слово „или“ разделительную или неразделительную дизъюнкцию. (Ср. § 05.)

(1) В предположении, что „если . . ., то . . .“ означает материальную импликацию, а „или“ означает разделительную дизъюнкцию, *основной принцип*, например, простой диструктивной дилеммы можно выразить так:

$$p \supset q \supset . \ \supset r \supset . \sim q \not\equiv \sim r \supset \sim p.$$

В тех же предположениях запишите аналогичным образом основные принципы каждого из перечисленных типов вывода. Проверьте каждый из этих типов вывода, выясняя, является ли его основной принцип тавтологией или нет. (Для того чтобы сократить работу, используйте, конечно, где только возможно, известные теоремы из P_1.)

(2) Перепишите основные принципы каждого из типов вывода в предположении, что „если . . ., то . . .,“ означает материальную импликацию, а „или“ означает неразделительную дизъюнкцию; выполните такую же, как и выше, проверку[191].

15.10. Когда Санчо Панса был губернатором Баратарии, ему пришлось решать следующий вопрос. Некое поместье разделялось на две части рекой, через которую был проложен мост. Владелец поместья установил на одной стороне моста виселицу и издал закон, по которому каждый желающий пройти по мосту должен был вначале под присягой показать, куда он идет и зачем; если он говорил правду, его следовало пропустить беспрепятственно; если же он лгал и затем проходил через мост, то он должен был быть немедленно повешен. Однажды к противоположному от виселицы концу моста подошел человек и в ответ на требование присягнуть показал: „Я иду, чтобы быть повешенным на той виселице", — и вслед за тем прошел через мост. Спорный вопрос о том, должен ли быть повешен этот человек, был передан на рассмотрение Санчо Пансы, который осуществлял провосудие в этой местности и был обязан, конечно, следовать законам, установленным владельцем поместья[192].

Пусть P, Q, R, S — константы, выражающие соответственно суждения, что он (человек, о котором идет речь) переходит мост, что он повешен на виселице, что присяга его верна и что закон выполнен. Используйте формулировку пропозиционального исчисления, содержащую эти пропозициональные константы и пропозициональные переменные. Тогда исходные данные выразятся следующими тремя пп-формулами: $R \equiv PQ, P, S \supset . \, Q \equiv P \sim R$. (Заметьте, что при замене третьей пп-формулы на $S \supset . \, P \sim R \supset Q$ исходные данные не были бы в полной мере переданы, так как мы должны предположить, что повешение невиновного является таким же нарушением закона, как и беспрепятственный пропуск виновного.)

Проверьте тавтологию

$$r \equiv pq \supset . \, p \supset . \, s \supset [q \equiv p \sim r] \supset \sim s$$

и затем с помощью подстановки и *модус поненс* покажите, что в данном случае закон не может быть выполнен.

16. Дуальность (двойственность). Процесс дуализации удобно применять не к пп-формулам исчисления P_1, а к выражениям, которые в соответствии с D1—11 являются сокращениями пп-формул исчисления P_1 (однако без пропуска скобок). *Дуал* (или *дуальное выражение*) такого выражения получается одновременной заменой друг на друга всех букв t и f, где бы они ни встречались, и членов каждой из следующих пар связок: $\supset$ и $\not\subset$, дизъюнкции и конъюнкции, $\equiv$ и $\not\equiv$, $\subset$ и $\not\supset$, $\bar{\vee}$ и $|$. Символ (связка) $\sim$ при дуализации не меняется и называется поэтому *самодуальным* или *самодвойственным*. Буквы t и f называются дуалами друг друга или дуальными друг к другу. Аналогично — связки конъюнкция и дизъюнкция, $\supset$ и $\not\subset$ и т. д.

Так, например, дуалом выражения

$$[[[p \vee t] \supset [qr]] \equiv [r \vee \sim p]]$$

является выражение

$$[[[pf] \not\subset [q \vee r]] \not\equiv [r \sim p]].$$

Для того чтобы получить дуал какой-либо пп-формулы исчисления P_1, нужно дуализировать какое-либо сокращение указанного выше вида этой пп-формулы и затем выписать пп-формулу, сокращением которой является полученное выражение. Не исключено, что в роли сокращенного выражения может быть использована сама дуализируемая пп-формула, и в этом случае мы получаем *главный дуал* этой пп-формулы. Например, для пп-формулы

$$[[p \supset q] \supset f]$$

главным дуалом является пп-формула

$$[[p \not\subset q] \not\subset t],$$

т. е. пп-формула

$$[[[t \supset f] \supset [[q \supset p] \supset f]] \supset f];$$

но так как ту же самую пп-формулу

$$[[p \supset q] \supset f]$$

можно сокращенно выразить в виде $[q \not\subset p]$, то она имеет в качестве дуала также пп-формулу

$$[q \supset p].$$

За исключением тех случаев, когда пп-формула состоит из одной переменной, главный дуал главного дуала этой пп-формулы не совпадает с самой этой пп-формулой. Однако, разумеется, пп-формула всегда является одним из дуалов всякого своего дуала. И всякий дуал дуала некоторой пп-формулы эквивалентен этой пп-формуле в смысле *160 (см. ниже).

Для того чтобы свести к минимуму разнообразие различных дуалов одной и той же пп-формулы, мы по возможности расположили D1—11 по парам взаимных дуалов. Этого, однако, нельзя было сделать в случае D1—3, и именно эти три определения являются причиной появления различных дуалов одной и той же пп-формулы. Изучение D1—3 показывает, что любые два дуала одной и той же пп-формулы можно перевести друг в друга серией шагов следующих четырех видов: замена пп-части $t \supset \mathbf{N}$ на $\mathbf{N}$, замена пп-части $\mathbf{N}$ на $t \supset \mathbf{N}$, замена пп-части $\sim\sim \mathbf{N}$ на $\mathbf{N}$, замена пп-части $\mathbf{N}$ на $\sim\sim \mathbf{N}$. С помощью †153, †154, †155, *158, †157 (совместно с подстановкой и *модус поненс*) мы получаем отсюда, что всякие два дуала одной и той же пп-формулы эквивалентны в следующем смысле:

*160. Если $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — дуалы пп-формулы $\mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$.

Из истинностных таблиц § 15 видно, что истинностная таблица для $\supset$ переходит в истинностную таблицу для $\not\subset$ при взаимной замене всех t и f (во всех трех столбцах таблицы). В действительности при взаимной замене t и f таблицы для $\supset$ и $\not\subset$ переходят друг в друга; то же самое справедливо по отношению к таблицам для дизъюнкции и конъюнкции, к таблицам для $\equiv$ и $\not\equiv$, к таблицам для $\subset$ и $\not\supset$ и к таблицам для $\bar{\vee}$ и $|$, а таблица для $\sim$ переходит при этом сама в себя. Отсюда следует, что дуал тавтологии является противоречием. Отсюда в силу истинностной таблицы для отрицания вытекает следующая метатеорема:

*161. Если $\vdash \mathbf{A}$ и если $\mathbf{A}_1$ — дуал пп-формулы $\mathbf{A}$, то $\vdash \sim \mathbf{A}_1$. (*Принцип дуальности.*)

Мы получаем два следствия из *161 — так называемые *специальные принципы дуальности* — с помощью следующих тавтологий:

†162. $\sim [p \not\subset q] \supset_{\centerdot} q \supset p$.

†163. $\sim [p \not\equiv q] \supset_{\centerdot} p \equiv q$.

Упомянутыми следствиями из *161 являются:

*164. Если $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и если $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ — дуалы пп-формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, то $\vdash \mathbf{B}_1 \supset \mathbf{A}_1$. (*Специальный принцип дуальности для импликации.*)

*165. Если $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ и если $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ — дуалы соответственно пп-формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{B}_1$. (*Специальный принцип дуальности для эквивалентности.*)

17. Непротиворечивость

Понятие *непротиворечивости* логистической системы возникает из семантических соображений и соответствует требованию, чтобы ни что являющееся логически абсурдным или содержательно противоречивым не было теоремой, или чтобы не существовало двух теорем, из которых одна является отрицанием другой. Однако мы хотим так изменить это первоначально семантическое понятие, чтобы придать ему синтаксический характер (и тем самым сделать его применимым к логистической системе независимо от интерпретации, принятой для этой системы). Этого можно добиться, вводя определение *относительной непротиворечивости по отношению* к какому-либо преобразованию, переводящему каждое предложение или пропозициональную форму $\mathbf{A}$ в предложение или пропозициональную форму $\mathbf{A}'$. Это определение (приводимое ниже) должно быть таким, чтобы относительная непротиворечивость сводилась к семантическому понятию непротиворечивости при интерпретации, которая делает $\mathbf{A}'$ отрицанием $\mathbf{A}$. Или мы можем определить *абсолютную непротиворечивость*, требуя, чтобы не все предложения и пропозициональные формы были теоремами: для почти всех систем, с которыми нам придется иметь дело, легко показать, что если бы мы имели две теоремы, отрицающие друг друга, то были бы доказуемы все предложения и пропозициональные формы (например, для исчисления P_1 это получается с помощью †123, подстановки и *модус поненс*). Или, следуя Гильберту, мы могли бы для конкретной системы выбрать соответствующее конкретное предложение и объявить, что система непротиворечива, если это конкретное предложение недоказуемо (например, мы можем называть исчисление P_1 непротиворечивым, если f не является теоремой). Или мы можем назвать систему, содержащую пропозициональные переменные, *непротиворечивой в смысле Поста*[193]), если никакая пп-формула, состоящая из одной только пропозициональной переменной, не является теоремой.

Обращаясь теперь к чисто синтаксическому изложению вопроса, мы имеем:

(а) Логистическая система является *непротиворечивой относительно* данного преобразования, переводящего каждое предложение или пропозициональную форму $\mathbf{A}$ в предложение или пропозициональную форму $\mathbf{A}'$, если не существует предложения или пропозициональной формы $\mathbf{A}$, такой, что $\vdash \mathbf{A}$ и $\vdash \mathbf{A}'$.

(b) Логистическая система является *абсолютно непротиворечивой*, если не все предложения и пропозициональные формы являются теоремами.

(c) Логистическая система *непротиворечива в смысле Поста* (*по отношению* к определенной категории исходных символов, называемых „пропозициональными переменными"), если никакая пп-формула, состоящая из одной только пропозициональной переменной, не является теоремой.

**170. P_1 непротиворечиво относительно преобразования $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A} \supset f$.

Доказательство. Из определения тавтологии (и из истинностной таблицы для $\supset$) следует, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \supset f$ не могут быть тавтологиями одновременно. Действительно, если $\mathbf{A}$ — тавтология, то $\mathbf{A} \supset f$ — противоречие. Поэтому, в силу **150, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \supset f$ не могут обе быть теоремами исчисления P_1.

**171. P_1 абсолютно непротиворечиво.

Доказательство. Пп-формула f не является тавтологией и поэтому, в силу **150, не является теоремой исчисления P_1.

**172. P_1 непротиворечиво в том специальном смысле, что f не является теоремой.

Доказательство. То же, что для **171.

**173. P_1 непротиворечиво в смысле Поста.

Доказательство. Пп-формула, состоящая из одной только пропозициональной переменной, не является тавтологией, так как ее значением является f для значения f ее переменной. Поэтому, в силу **150, она не является теоремой исчисления P_1.

18. Полнота

Как и в случае непротиворечивости, введение понятия *полноты* логистической системы мотивируется семантическими соображениями, состоящими, грубо говоря, в желании, чтобы система содержала все возможные теоремы, не противоречащие интерпретации. В качестве первой попытки уточнения этого понятия мы можем потребовать для каждого предложения, чтобы либо оно само, либо его отрицание было теоремой, но так как мы допускаем утверждения пропозициональных форм (см. последние абзацы § 06), то это может оказаться недостаточным. Поэтому нам вслед за Постом[193)] приходится принять, что логистическая система полна, если для всякого предложения или пропозициональной формы $\mathbf{B}$ либо $\vdash \mathbf{B}$, либо присоединение $\mathbf{B}$ к системе в качестве ее аксиомы (без иных изменений) делает систему противоречивой. Это ведет к различным чисто синтаксическим определениям полноты, которые соответствуют различным синтаксическим определениям непротиворечивости системы, данным в предыдущем параграфе.

Другой подход основывается на идее, что система будет полной, если существует правильная интерпретация, при которой всякое предложение, обозначающее истину, является теоремой и всякая пропозициональная форма, всегда принимающая значение истина, также является теоремой; затем требуется замена понятия интерпретации каким-либо подходящим синтаксическим понятием. Однако этот подход требует известных ограничений, налагаемых на характер допускаемых интерпретаций, и ведет, таким образом, к введению *моделей* в смысле Кемени. Этот подход будет кратко рассмотрен в главе X.

В качестве синтаксических определений полноты мы имеем теперь следующие:

(a) Логистическая система называется *полной относительно* данного преобразования, переводящего каждое предложение или пропозициональную форму **A** в предложение или пропозициональную форму **A**′, если для каждого предложения или пропозициональной формы **B** либо $\vdash$ **B**, либо присоединение **B** к системе в качестве ее аксиомы делает систему противоречивой относительно данного преобразования.

(b) Логистическая система называется *абсолютно полной*, если для всякого предложения или пропозициональной формы **B** либо $\vdash$ **B**, либо присоединение **B** к системе в качестве ее аксиомы делает систему абсолютно противоречивой.

(c) Логистическая система называется *полной в смысле Поста*, если для всякого предложения или пропозициональной формы **B** либо $\vdash$ **B**, либо присоединение **B** к системе в качестве ее аксиомы делает систему противоречивой в смысле Поста.

Пусть **B** — пп-формула исчисления P_1, не являющаяся теоремой. Тогда, по *152, **B** не является тавтологией. Это значит, что существует такая система значений переменных формулы **B**, для которой **B** принимает значение f.

Если добавить **B** к P_1 в качестве аксиомы, то в силу *121 становится возможным вывести результат любой одновременной подстановки вместо переменных формулы **B**. В частности, мы можем взять одну из тех систем значений переменных формулы **B**, для которых она принимает значение f, и вместо каждой переменной $\mathbf{a}_i$ подставить t или f, в зависимости от того, является ли значением a_i этой переменной t или f. Пусть **E** — пп-формула, получающаяся таким путем.

Так как **E** не содержит переменных, то определение, данное в начале § 15, приписывает **E** одно значение, а из того, каким путем **E** получено, видно, что этим значением является f (мы предоставляем читателю провести подробно доказательство методом математической индукции). Поэтому из истинностной таблицы для $\supset$ следует, что $\mathbf{E} \supset f$ — тавтология. Отсюда мы с помощью *152 получаем, что $\mathbf{E} \supset f$ является теоремой исчисления P_1, а следовательно, и исчисления, получающегося добавлением к P_1 формулы **B** в качестве аксиомы.

Теперь в системе, полученной из P_1 добавлением **B** в качестве аксиомы, как **E**, так и $\mathbf{E} \supset f$ суть теоремы. Поэтому по *модус поненс* мы получаем, что f является теоремой. Далее, по †122 и *модус поненс*, p есть теорема. Отсюда подстановкой мы можем получить, что теоремой является любая пп-формула, в том числе, конечно, вместе со всякой пп-формулой **A** и пп-формула $\mathbf{A} \supset f$.

Таким образом, мы доказали полноту P_1 в смысле любой из следующих метатеорем:

180. P_1 полна относительно преобразования **A в $\mathbf{A} \supset f$.

**181. P_1 абсолютно полна.

**182. P_1 полна в смысле Поста.

Упражнения к § 18

Исследуйте непротиворечивость и полноту каждой из следующих логистических систем в смысле каждой из метатеорем **170—**173, **180—**182.

18.0. Система, полученная из P_1 исключением аксиомы †104. (Покажите, что пп-формула **A**, содержащая f, является теоремой тогда и только тогда, когда теоремой является $\mathrm{S}^{f}\,\mathbf{A}|$, где **a** — переменная, не входящая в **A**.)

18.1. Исходные, символы и правила построения — те же, что в исчислении P_1. Имеется одна аксиома, а именно p. Имеется одно правило вывода, а именно *101, с дополнительным ограничением, что **B** не должно быть f.

18.2. Исходные символы и правила построения — те же самые, что в исчислении P_1. Имеется одна аксиома, $p \supset q$, и одно правило вывода, *101.

18.3. Система P_B^I получается из системы P_W из упражнения 12.7 исключением f из числа исходных символов и только такими дальнейшими изменениями, которые вызываются этим исключением, а именно отбрасыванием правила построения 10i и четвертой аксиомы †122. (Используйте результаты упражнений 12.7 и 12.8; докажите аналог метатеоремы *151, в котором выделена некоторая переменная **r**, отличная от $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, $\mathbf{A}_i$ определяется как $\mathbf{a}_i$ или $\mathbf{a}_i \supset \mathbf{r}$, в зависимости от того, есть ли a_i t или f, и $\mathbf{B}'$ определяется как $\mathbf{B} \supset \mathbf{r} \supset \mathbf{r}$ или $\mathbf{B} \supset \mathbf{r}$, в соответствии с тем, является ли t или f значением формулы **B** для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$; докажите отсюда, что *152 верна в P_B^I. Вместо **170 и **180 докажите, что P_B^I непротиворечива и полна относительно преобразования **A** в $\mathbf{A} \supset \mathbf{a}$, где **a** — первая переменная в алфавитном порядке переменных, не входящая в **A**.)

18.4. Система $\mathrm{P}^{\mathrm{I}}_{\text{Ł}}$ имеет те же самые исходные символы и пп-формулы, что и $\mathrm{P}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{B}}$, те же самые правила вывода и единственную аксиому:

$$p \supset q \supset r \supset_{\bullet} r \supset p \supset_{\bullet} s \supset p.$$

(После проверки того, что эта аксиома — тавтология, следует доказать аксиомы исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{B}}$ как теоремы исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{I}}_{\text{Ł}}$ и воспользоваться результатом упражнения 18.3. Для этой цели установите сперва производное правило: если $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, то $\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{A} \supset_{\bullet} \mathfrak{a} \supset \mathbf{A}$, $\vdash \mathfrak{a} \supset \mathbf{A} \supset \mathbf{C} \supset_{\bullet} \mathfrak{b} \supset \mathbf{C}$, $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$; после этого, следуя Лукасевичу, докажите последовательно как теоремы исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{I}}_{\text{Ł}}$:

$$r \supset q \supset_{\bullet} r \supset q \supset p \supset_{\bullet} s \supset p,$$

$$p_1 \supset r \supset [s \supset p] \supset_{\bullet} r \supset q \supset p \supset_{\bullet} s \supset p,$$

$$r \supset q \supset [s \supset p] \supset_{\bullet} r \supset p \supset_{\bullet} s \supset p,$$

$$r \supset p \supset [s \supset p] \supset [p \supset q \supset r \supset p_1] \supset_{\bullet} q_1 \supset_{\bullet} p \supset q \supset r \supset p_1,$$

$$r \supset p \supset p \supset [s \supset p] \supset_{\bullet} p \supset q \supset r \supset_{\bullet} s \supset p,$$

$$p \supset r \supset q \supset q \supset_{\bullet} q \supset r \supset_{\bullet} p \supset r,$$

$$p \supset q \supset_{\bullet} p \supset r \supset q \supset q$$

и закон транзитивности импликации.

18.5. С помощью семантических правил, сходных с правилами a — g § 10, дайте правильные интерпретации системам из упражнений 18.0—18.3 и для каждой системы рассмотрите возможное многообразие правильных интерпретаций этого рода.

19. Независимость [194]. Аксиома A логистической системы называется *независимой*, если она не является теоремой в системе, получающейся исключением A из числа аксиом. Исходное правило вывода R логистической системы называется *независимым*, если оно не является производным правилом вывода в системе, получающейся исключением R из числа исходных правил вывода. Или, что эквивалентно тому же, мы можем назвать аксиому или правило вывода независимыми, если существует теорема, которая не может быть доказана без этой аксиомы или этого правила [195].

Требование независимости аксиом и правил вывода логистической системы не следует считать обязательным. Напротив, есть случаи, когда, допуская зависимость, мы добиваемся важных преимуществ. Если же принимается требование независимости, то это делается для изящества и составляет лишь часть более общего (и не совсем ясного) требования экономии предположений [196].

В этой книге мы часто будем игнорировать вопросы независимости аксиом и правил логистических систем. Но ради иллюстрации мы подробно рассмотрим эти вопросы для исчисления P_1.

В пропозициональном исчислении стандартным приемом доказательства независимости аксиом и правил является следующее обобщение метода из § 15. Вместо двух истинностных значений вводится система двух или более *истинностных значений* [197)]

$$0,\ 1,\ \ldots,\ \nu,$$

из которых первые

$$0,\ 1,\ \ldots,\ \mu$$

(где $1 \leqslant \mu < \nu$) называются *отмеченными*, или *выделенными*, истинностными значениями [198)]. Каждой исходной константе (если таковые имеются) приписывается в качестве значения одно из этих истинностных значений, и каждой исходной связке приписывается истинностная таблица из этих истинностных значений. Так же, как в начале § 15, определяется значение пп-формулы для данных значений ее переменных, которыми могут быть истинностные значения $0, 1, \ldots, \nu$, и пп-формула называется *тавтологией*, если для всякой системы значений ее переменных она принимает одно из выделенных истинностных значений. Если теперь каждое правило вывода обладает свойством сохранять тавтологию (т. е. заключение оказывается тавтологией всякий раз, когда посылки являются тавтологиями) и если все аксиомы, кроме одной, являются тавтологиями, то отсюда следует, что эта не являющаяся тавтологией аксиома независима. Или если все аксиомы являются тавтологиями и все правила вывода, кроме одного, обладают свойством сохранять тавтологию и если, далее, существует теорема логистической системы, не являющаяся тавтологией, то из этого следует, что не сохраняющее тавтологию правило вывода независимо.

Оказывается, что в случае исчисления P_1 мы можем доказать независимость всех аксиом и правил вывода, за исключением правила подстановки, с помощью системы из трех истинностных значений 0, 1, 2, из которых 0 является единственным выделенным истинностным значением и 2 приписывается в качестве значения исходной константе f. В качестве истинностных таблиц для $\supset$ берутся таблицы, приведенные на следующей странице (номер над каждым столбцом указывает аксиому или правило, независимость которого доказывается данным столбцом).

Для доказательства независимости правила *100 необходимо добавить еще пример теоремы исчисления P_1, которая не является тавтологией согласно используемой истинностной таблице. Одним из таких примеров является $f \supset p$; другой пример: $p \supset [q \supset f] \supset f \supset q$.

Правило подстановки *101 всегда сохраняет тавтологию при любой системе истинностных значений и при любой истинностной таблице, поэтому его независимость не может быть доказана этим методом. Тем не менее его независимость следует из того факта, что без него не может быть доказана никакая пп-формула, которая была бы длиннее самой длинной аксиомы. В действительности аналогичное доказательство независимости правила подстановки остается в силе и после добавления произвольного конечного числа дополнительных аксиом (так как нетрудно найти пп-формулы произвольной длины, являющиеся теоремами исчисления P_1).

		*100	†102	†103	†104
p	q	$p \supset q$	$p \supset q$	$p \supset q$	$p \supset q$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	2	1	1
0	2	2	2	2	2
1	0	0	2	0	0
1	1	0	2	0	0
1	2	2	0	1	2
2	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
2	2	0	0	0	0

Рассмотренный выше метод обнаружения с помощью обобщенной системы истинностных значений примеров, подтверждающих независимость, наводит на мысль об обобщении самого пропозиционального исчисления. А именно, мы можем, как выше, фиксировать некоторую обобщенную систему истинностных значений и ввести затем некоторое количество связок с заданными истинностными таблицами и, возможно, несколько констант, каждой из которых приписывается в качестве значения некоторое истинностное значение. Затем мы можем строить пп-формулы логистической системы, используя переменные и эти связки и константы, и, наконец, добавить список аксиом, являющихся тавтологиями (в обобщенной системе истинностных значений), и правил вывода, сохраняющих тавтологию. Если это, в частности, сделано таким образом, что всякая тавтология оказывается теоремой, то полученная логистическая система называется *многозначным пропозициональным исчислением* в смысле Лукасевича.

Те же самые рассуждения ведут также к обобщению требований, наложенных в § 07 на интерпретацию логистической системы; при использовании обобщенной системы истинностных значений эти требования видоизменяются следующим образом. Семантические правила должны быть такими, чтобы аксиомы всегда либо обозначали истинностные значения, либо имели истинностные значения своими значениями и чтобы правила вывода сохраняли это свойство. Утверждаться могут только такие пп-формулы, которые обозначают истинностные значения или всегда имеют истинностные значения своими значениями. При этом правильными будут утверждения только тех из этих ппф, которые обозначают какое-либо выделенное истинностное значение или принимают в качестве значений только выделенные истинностные значения. Интерпретация логистической системы называется *правильной*, если при ней все аксиомы либо обозначают выделенные истинностные значения, либо всегда принимают в качестве своих значений только выделенные истинностные значения и если правила вывода сохраняют это свойство (в том смысле, что если все посылки некоторого непосредственного вывода либо обозначают выделенные истинностные значения, либо принимают в качестве значений только выделенные истинностные значения, то то же самое верно и для заключения).

Упражнения к § 19

19.0. Выполните в деталях намеченное в тексте доказательство независимости аксиом и правил вывода исчисления P_1. (При доказательстве того, что какие-то пп-формулы являются или не являются тавтологиями, используйте организацию процесса, аналогичную описанной в § 15.)

19.1. Исследуйте возможность доказать независимость аксиом и правил вывода исчисления P_1 с помощью только двух истинностных значений, т. е. для каждой аксиомы и каждого правила либо дайте искомое доказательство, либо покажите его невозможность.

19.2. Аналогичным образом исследуйте возможность доказательства независимости аксиом и правил исчисления P_1 с помощью системы из трех истинностных значений, из которых два являются выделенными.

19.3. Истинностная таблица, приведенная в тексте для доказательства независимости правила *100, показывает, что существуют теоремы, содержащие f, которые без правила *100 не могут быть доказаны. Эта таблица недостаточна, однако, для доказательства того, что существуют такие теоремы, не содержащие f. Докажите это предложение. Придумайте другую истинностную таблицу для доказательства назависимости правила *100, которая не обладала бы этим недостатком.

19.4. Рассмотрите логистическую систему, пп-формулы которой совпадают с пп-формулами исчисления P_1, правилами вывода которой являются *модус поненс* и правило подстановки, которая имеет конечное число аксиом и в которой имеет место метатеорема *152. Докажите, что правила *модус поненс* и подстановки необходимо оба являются независимыми. [В случае *модус поненс* это может быть сделано указанием бесконечной последовательности тавтологий (в смысле § 15), из которых никакие две не являются вариантами друг друга, и доказательством того, что ни одна из них не может быть получена подстановкой из какой-либо тавтологии, не являющейся ее вариантом.]

19.5. Докажите независимость аксиом и правил исчисления P_W (см. упражнение 12.7). За исключением случая правила подстановки, воспользуйтесь методом истинностных таблиц.

19.6. Пусть P^+ — система, получающаяся из P_1 исключением f из числа исходных символов и лишь такими дополнительными изменениями, которые вызываются этим исключением, — а именно, отбрасыванием правила образования 10i и аксиомы †104. Докажите, что система P^+ не полна. Укажите, какие из аксиом исчисления P_B^I (упражнение 18.3) являются теоремами исчисления P^+ и какие нет.

19.7. Исследуйте независимость правила *модус поненс* в системе P^+. Является ли эта независимость тривиальным следствием какого-либо из уже полученных (в тексте или в упражнениях) результата? Если нет, то как ее можно доказать?

19.8. Используя *модус поненс* и подстановку в качестве правил вывода, найдите аксиомы для следующего многозначного пропозиционального исчисления (введенного Лукасевичем—ср. примечание 276). Имеются три истинностных значения, 0, 1, 2, из которых 0 является выделенным значением. Имеются две исходные константы f_1 и f_2, которым приписаны в качестве их значений 1 и 2 соответственно. Наконец, имеется одна исходная связка, $\supset$, являющаяся бинарной, которой поставлена в соответствие следующая истинностная таблица:

p	q	$p \supset q$
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	0	0
1	1	0
1	2	1
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Докажите для этой системы модифицированную теорему дедукции: если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \supset_{\bullet} \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$; отсюда получите доказательства аналогов метатеорем **150 и *152.

19.9. Рассмотрите интерпретацию исчисления P_1 с четырьмя истинностными значениями 0, 1, 2, 3, из которых 0 является единственным выделенным значением и 3 приписано в качестве значения константе f. Исследуйте правильность интерпретации для каждой из следующих различных истинностных таблиц для $\supset$:

p	q	(1) $p \supset q$	(2) $p \supset q$	(3) $p \supset q$	(4) $p \supset q$	(5) $p \supset q$	(6) $p \supset q$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	2	3	0	0
0	2	0	2	3	0	0	0
0	3	0	3	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	2
1	2	0	2	0	0	0	0
1	3	0	2	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	2	2
2	2	0	0	0	0	0	0
2	3	0	1	0	3	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0

19.10. Может случиться, что правильная интерпретация исчисления P_1 с помощью системы истинностных значений и истинностных таблиц сводится к главной интерпретации (§ 10) посредством замены всех выделенных истинностных значений на t, а не выделенных истинностных значений на f. Следуя Карнапу, мы будем такую правильную интерпретацию называть *нормальной интерпретацией*, а иные интерпретации исчисления P_1 — *ненормальными интерпретациями*[199]. Тогда можно считать, что нормальная интерпретация исчисления P_1 отличается от главной интерпретации только тем, что после обычного деления суждений на истинные и ложные дополнительно проводятся дальнейшие подразделения одной или обеих этих категорий. Ненормальная же интерпретация отличается от главной более значительно. Определите, какие из правильных интерпретаций исчисления P_1, найденных в 19.9, являются нормальными интерпретациями и какие — ненормальными. Определите также, какие из них могут быть сделаны нормальными без потери правильности посредством одного только изменения разбиения истинностных значений на выделенные и невыделенные.

19.11. Рассмотрите интерпретацию исчисления P_1, содержащую шесть истинностных значений 0, 1, 2, 3, 4, 5, из которых 0 и 1 являются выделенными истинностными значениями, а 5 приписано в качестве значения константе f со следующей истинностной таблицей для $\supset$:

p	q	$p \supset q$	p	q	$p \supset q$	p	q	$p \supset q$
0	0	0	2	0	0	4	0	0
0	1	0	2	1	1	4	1	0
0	2	0	2	2	0	4	2	0
0	3	4	2	3	4	4	3	0
0	4	4	2	4	4	4	4	0
0	5	4	2	5	3	4	5	0
1	0	0	3	0	0	5	0	0
1	1	0	3	1	1	5	1	0
1	2	2	3	2	0	5	2	0
1	3	3	3	3	0	5	3	0
1	4	4	3	4	0	5	4	0
1	5	4	3	5	2	5	5	0

(1) Покажите, что эта интерпретация является правильной. [*Указание* Пусть **A** $\supset$ **B** и **A** — тавтологии (в шести истинностных значениях). Из четвертого, пятого, шестого, десятого, одиннадцатого и двенадцатого входов таблицы непосредственно видно, что формула **B** ни для каких систем значений ее переменных не может принимать значений 3, 4 или 5. Отсюда следует, что формула **B** ни для какой системы значений ее переменных не может принять значение 2, так как в противном случае она получила бы значение 3 при взаимной замене значений 2 и 3 в данной системе значений ее переменных. Следовательно, **B** — тавтология.]

(2) Используйте этот пример в качестве противоречащего примера для доказательства ложности предложения: „В правильной интерпретации исчисления P_1 истинностная таблица для $\equiv$ является симметричной в том смысле, что если $p \equiv q$ имеет выделенное истинностное значение для некоторой данной системы истинностных значений переменных p и q, то это форма имеет также выделенное значение после взаимной замены значений p и q".

(3) Исследуйте вопрос о том, каким путем или какими путями можно так изменить это предложение, чтобы получить верную метатеорему, представляющую интерес.

19.12. Интерпретируя исчисление P_1 с помощью трех истинностных значений 0, 1, 2 из которых 0 и 1 являются выделенными истинностными значениями, а 2 приписано в качестве значения константе f, докажите ложность предложения. „Если в правильной интерпретации исчисления P_1 формы $p \equiv q$ и $q \equiv r$ принимают выделенные истинностные значения для данных значений переменных p, q и r, то и форма $p \equiv r$ принимает выделенное истинностное значение". [*Указание*. Наиболее простой метод состоит в использовании для $\supset$ истинностной таблицы § 15 с 0 и 2 в роли t и f соответственно и приписывании форме $p \supset q$ значения 1 всякий раз, когда p или q имеют значение 1. Другой метод указан в замечании Черча и Решера в их рецензии на статью Динза в *The Journal of Symbolic Logic*, **15**, 1950, стр. 69—70.]

ГЛАВА II

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

20. Исходный базис исчисления P_2. Другой формулировкой пропозиционального исчисления является логистическая система P_2, которая отличается от P_1 в первую очередь отсутствием (пропозициональных) констант.

Исходными символами исчисления P_2 являются четыре несобственных символа

$$[\quad \supset \quad] \quad \sim$$

и бесконечный перечень (пропозициональных) переменных

$$p \quad q \quad r \quad s \quad p_1 \quad q_1 \quad r_1 \quad s_1 \quad p_2 \ldots$$

(указанный здесь порядок называется *алфавитным порядком* переменных).

Правилами построения исчисления P_2 являются:

20i. Отдельно взятая переменная есть ппф.

20ii. Если $\mathbf{\Gamma}$ есть ппф, то и $\sim \mathbf{\Gamma}$ есть ппф.

20iii. Если $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Delta}$ суть ппф, то и $[\mathbf{\Gamma} \supset \mathbf{\Delta}]$ есть ппф.

Формула исчисления P_2 является правильно построенной тогда и только тогда, когда правильность ее построения следует из указанных трех правил построения. Как и в случае P_1, отсюда следует эффективный метод проверки правильности построения. В § 22 мы также докажем, что всякая пп-формула исчисления P_2 имеет либо вид $\sim \mathbf{A}$, либо вид $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ (где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — пп-формулы) и в каждом из этих двух случаев она представима в таком виде единственным способом. В пп-формуле $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ правильно построенные части $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются соответственно *антецедентом* и *консеквентом*, а вхождение знака $\supset$ между ними называется *главным знаком импликации*.

Правила вывода в исчислении P_2 те же самые, что и в исчислении P_1:

*200. Из $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$. (*Правило модус поненс.*)

*201. Из $\mathbf{A}$ следует $\mathrm{S}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{B}}\, \mathbf{A}|$. (*Правило подстановки.*)

Аксиомами исчисления P_2 являются:

†202. $p \supset . q \supset p$.

†203. $s \supset [p \supset q] \supset . s \supset p \supset . s \supset q$.

†204. $\sim p \supset \sim q \supset . q \supset p$.

Аксиомы в указанной последовательности суть *закон утверждения консеквента, закон самодистрибутивности импликации* и *обратный закон контрапозиции*. Записывая эти аксиомы, мы использовали то же самое соглашение об опускании скобок и употреблении больших точек, которое было разъяснено в § 11, и в дальнейшем мы будем пользоваться этим соглашением в отношении всякой формулировки пропозиционального исчисления, не оговаривая этого. В исчислении P_2 мы также будем пользоваться определениями-схемами D3—11 из § 11, конечно, понимая появляющийся в них знак „$\sim$" как исходный символ $\sim$ исчисления P_2.

Главная интерпретация исчисления P_2 задается следующими семантическими правилами:

a. Переменные суть переменные с областью значений t и f.

b. Пп-формула, состоящая из одной только переменной **a**, принимает значение t для значения t переменной **a** и принимает значение f для значения f переменной **a**.

c. Для заданного распределения значений по переменным формулы **A** значением формулы $\sim$ **A** будет f, если значением формулы **A** является t, и значением формулы $\sim$ **A** будет t, если значением формулы **A** является f.

d. Для заданного распределения значений по переменным формул **A** и **B** значением формулы [**A** $\supset$ **B**] будет t, если значением **B** является t или если значением **A** является f, и значением формулы [**A** $\supset$ **B**] будет f, если значением **B** является f и в то же время значением **A** является t.

21. Теорема дедукции для исчисления P_2. Как и в случае P_1, мы сразу получаем в качестве производного правила вывода *правило одновременной подстановки*:

*210. Если $\vdash \mathbf{A}$ и если $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ суть попарно различные переменные, то $\vdash \mathrm{S}^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_n} \mathbf{A} |$.

Мы имеем также в качестве теоремы исчисления P_2:

†211. $p \supset p$. (*Закон рефлексивности импликации*.)

Доказательство. Одновременной подстановкой в †203:

$$\vdash p \supset [q \supset p] \supset . p \supset q \supset . p \supset p.$$

Следовательно, по †202 и *модус поненс*:

$$\vdash p \supset q \supset . p \supset p.$$

Отсюда, подставляя $q \supset p$ вместо q и применяя †202 и снова *модус поненс*:

$$\vdash p \supset p.$$

Доказательство теоремы дедукции в § 13 требовало лишь $p \supset p$, закона утверждения консеквента и закона самодистрибутивности импликации (вместе с правилами *модус поненс* и одновременной подстановки). Следовательно, мы получаем с помощью того же самого доказательства в качестве метатеорем исчисления P_2 теорему дедукции и ее следствия:

*212. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$.

*213. Если $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Так же, как и раньше, доказываются, далее, аналоги метатеорем *133 и *134:

*214. Если каждая пп-формула, хотя бы один раз встречающаяся среди $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, встречается также хотя бы один раз среди $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ и если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

*215. Если $\vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

22. Некоторые дальнейшие теоремы и метатеоремы исчисления $\mathbf{P}_2$. Начиная с этого параграфа, мы будем более сокращенно записывать доказательства в исчислении P_2 и, в дальнейшем, в других логистических системах. В частности, мы часто будем опускать явные ссылки на использование подстановки, *модус поненс* или теоремы дедукции.

†220. $\sim p \supset . p \supset q$. (*Закон отрицания антецедента.*)

Доказательство. По †202, $\sim p \vdash \sim q \supset \sim p$.
Следовательно, по †204, $\sim p \vdash p \supset q$.
После этого применяется теорема дедукции.

†221. $\sim\sim p \supset p$. (*Закон двойного отрицания.*)

Доказательство. По †220, $\sim\sim p \vdash \sim p \supset \sim\sim\sim p$.
Следовательно, по †204, $\sim\sim p \vdash \sim\sim p \supset p$.
Далее используется *модус поненс* и затем теорема дедукции.

†222. $p \supset \sim\sim p$. (*Обратный закон двойного отрицания.*)

Доказательство. По †221, $\vdash \sim\sim\sim p \supset \sim p$.
Затем используется †204.

†223. $p \supset q \supset . \sim q \supset \sim p$. (*Закон контрапозиции.*)

Доказательство. По †221, $p \supset q, \sim\sim p \vdash q$.

Следовательно, по †222, $p \supset q, \sim\sim p \vdash \sim\sim q$.
Следовательно, $p \supset q \vdash \sim\sim p \supset \sim\sim q$.
Используем †204, затем применяем теорему дедукции.

†224. $p \supset [r \not\subset r] \supset \sim p$.

Доказательство. По †221, $p \supset [r \not\subset r], \sim\sim p \vdash r \not\subset r$.
Следовательно, $p \supset [r \not\subset r] \vdash \sim\sim p \supset . r \not\subset r$.
Следовательно, по †204, $p \supset [r \not\subset r] \vdash r \supset r \supset \sim p$.
Следовательно, по †211, $p \supset [r \not\subset r] \vdash \sim p$.
После этого применяется теорема дедукции.

Для эффективного метода проверки правильности построения, о котором говорилось в § 20, так же как и для некоторого числа других метатеорем, следующих ниже, мы используем тот же прием подсчета скобок, который описан в § 10. А именно, мы начинаем с начала формулы (т. е. с ее левого конца) и, двигаясь слева направо, считаем каждое вхождение [за $+1$ и каждое вхождение] за -1 и суммируем. Число, которое мы таким образом приписываем некоторому вхождению скобки, называется *индексом* этого вхождения скобки в данную формулу.

Из определения правильно построенной формулы следует, что если ппф содержит скобки, то она должна оканчиваться вхождением], являющимся ее заключительным символом; его мы будем называть *заключительной скобкой* пп-формулы. Методом математической индукции по общему числу вхождений $\supset$ и $\sim$ легко получается следующая лемма: *Индекс всякого вхождения скобки в пп-формулу является положительным числом, кроме вхождения заключительной скобки, индексом которого является число* 0, *и индекс всякого вхождения* [*в пп-формулу, кроме первого вхождения* [, *больше* 1.

** 225. Всякая пп-формула, не являющаяся отдельной переменной, имеет либо форму $\sim \mathbf{A}$, либо форму $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, и в любом из этих двух случаев она представима в соответствующем виде единственным образом.

Доказательство. Первая половина теоремы тривиальна в силу определения правильно построенной формулы.

Очевидно также, что если пп-формула представима в виде $\sim \mathbf{A}$, то она представима так единственным образом (т. е. в этом случае $\mathbf{A}$ определяется однозначно), поскольку мы можем получить $\mathbf{A}$, просто отбрасывая $\sim$ от начала данной пп-формулы.

Остается показать, что если пп-формула представима в виде $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, то она представима в этом виде единственным образом. Предположим, что $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и $[\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ — одна и та же пп-формула. Если $\mathbf{A}$ не содержит скобок, то первое вхождение знака $\supset$ в $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ находится непосредственно за $\mathbf{A}$, так как из определения пп-формулы следует, что первому вхождению знака $\supset$ в некоторую пп-формулу должно предшествовать какое-либо вхождение [; отсюда — по тем же соображениям — вытекает, что **C** совпадает с **A**. Аналогичное рассуждение показывает, что если **C** не содержит скобок, то **C** и **A** совпадают. Если как **A**, так и **C** содержат скобки, то заключительная скобка в **A** является первым вхождением в **A** скобки с индексом 0 и поэтому вторым вхождением в $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ скобки с индексом 1, а заключительная скобка в **C** является первым вхождением в **C** скобки с индексом 0 и поэтому вторым вхождением в $[\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ скобки с индексом 1; из этого следует, что заключительные скобки в **A** и **C** совпадают и, следовательно, совпадают сами **A** и **C**. Мы получили, таким образом, что **A** и **C** совпадают во всех случаях, а из этого уже очевидным образом следует, что совпадают **B** и **D**.

** 226. Пп-часть [200] формулы $\sim \mathbf{A}$ либо совпадает с $\sim \mathbf{A}$, либо является пп-частью формулы **A**.

Доказательство. Мы должны показать невозможность существования пп-части **M** формулы $\sim \mathbf{A}$, которая получалась бы отбрасыванием одного или большего числа симі олов от конца (т. е. справа) формулы $\sim \mathbf{A}$ без отбрасывания каких-либо символов от начала (т. е. слева). Если **M** содержит скобки, то эта невозможность является следствием того, что в противном случае заключительная скобка формулы **M** имела бы в формуле **A** индекс 0, хотя она и не является заключительной скобкой формулы **A**. Если же **M** не содержит скобок, то невозможность легко получается математической индукцией по числу знаков $\sim$, стоящих друг за другом в начале формулы **A**.

** 227. Пп-часть формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ либо совпадает с $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, либо является пп-частью формулы **A** или пп-частью формулы **B** [201].

Доказательство. Мы должны доказать невозможность существования пп-части формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, которая, не совпадая с $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, включала бы главный знак импликации формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, или заключительную скобку формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, или вхождение знака [, стоящее в начале формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$.

Предположим, что **M** есть такая пп-часть формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$. Тогда **M** содержит скобки. Либо заключительная скобка формулы **M** предшествует заключительной скобке формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и поэтому имеет индекс 0 в формуле **M** и положительный индекс в формуле $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$; либо же первое вхождение [в **M** стоит позже вхождения [, стоящего в начале формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, и поэтому имеет индекс 1 в формуле **M**, но больший индекс в формуле $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$. Мы получаем, что во всех случаях всякое вхождение скобки в **M** имеет в **M** индекс, меньший нежели в $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$. Из этого следует, что заключительная скобка формулы **M** должна предшествовать заключительной скобке формулы [**A** ⊃ **B**], и, кроме того, одновременно первое вхождение [в **M** должно стоять позже, нежели вхождение [, стоящее в начале формулы [**A** ⊃ **B**].

Так как остается единственная возможность, состоящая в том, что формула **M** включает главный знак импликации формулы [**A** ⊃ **B**], то формула **M** должна где-то содержать по меньшей мере одну скобку, предшествующую главному знаку импликации и поэтому лежащую в **A**. Таким образом, **A** содержит скобки. Заключительная скобка формулы **A** имеет в **A** индекс 0 и поэтому индекс 1 в [**A** ⊃ **B**], а потому некоторый меньший индекс в **M**, что, однако, невозможно, так как она не является заключительной скобкой формулы **M**.

** 228. Если **A**, **M**, **N** — пп-формулы и **Γ** получается из **A** подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** и **A**), то **Γ** есть пп-формула.

Доказательство. Результат получается сразу для двух частных случаев: (a) формула **N** подставляется вместо нуля вхождений **M** в **A**, и (b) **M** совпадает с **A** и подстановка формулы **N** совершается вместо этого одного вхождения **M** в **A**. Действительно, в случае (a) **Γ** совпадает с **A**, а в случае (b) **Γ** совпадает с **N**.

Для того чтобы доказать ** 228 в общем случае, мы применяем математическую индукцию по общему числу вхождений знаков ⊃ и ~ в формулу **A**. Если это общее число вхождений равно нулю, то мы имеем либо случай (a), либо случай (b) и, как мы видели, результат получается сразу. Поэтому рассмотрим пп-формулу **A**, в которой это общее число больше нуля; возможно только два следующих случая:

Случай 1: **A** имеет вид ~ $\mathbf{A}_1$. Тогда по ** 226 [если только мы не имеем случай (b), который был только что рассмотрен] **Γ** имеет вид ~ $\mathbf{\Gamma}_1$, где $\mathbf{\Gamma}_1$ получается из $\mathbf{A}_1$ подстановкой формулы **N** вместо нуля или большего числа вхождений формулы **M**. По предположению индукции, $\mathbf{\Gamma}_1$ правильно построена. Следовательно, по 20ii, правильно построена и формула **Γ**.

Случай 2: **A** имеет вид [$\mathbf{A}_1$ ⊃ $\mathbf{A}_2$]. Тогда по ** 227 [если только не имеет места уже рассмотренный случай (b)] **Γ** имеет вид [$\mathbf{\Gamma}_1$ ⊃ $\mathbf{\Gamma}_2$], где $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ получаются из $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ соответственно подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений формулы **M**. По предположению индукции, $\mathbf{\Gamma}_1$ и $\mathbf{\Gamma}_2$ правильно построены. Следовательно, по 20iii правильно построена и **Γ**.

Тем самым доказательство посредством математической индукции завершено.

* 229. Если **B** получается из **A** подстановкой пп-формулы **N** вместо нуля или большего числа вхождений пп-формулы **M** (не

обязательно вместо всех вхождений пп-формулы $\mathbf{M}$ в пп-формулу $\mathbf{A}$), то

$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$$

и

$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}.$$

Доказательство. В двух частных случаях это получается сразу: (a) когда $\mathbf{N}$ подставляется вместо нуля вхождений формулы $\mathbf{M}$ в формулу $\mathbf{A}$ и (b) когда $\mathbf{M}$ совпадает с $\mathbf{A}$ и формула $\mathbf{N}$ подставляется в $\mathbf{A}$ вместо этого одного вхождения $\mathbf{M}$. В самом деле, в случае (a) это вытекает из †211, а в случае (b) из того, что $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ совпадают с $\mathbf{M} \supset \mathbf{N}$ и $\mathbf{N} \supset \mathbf{M}$ соответственно.

Для того чтобы доказать * 229 в общем случае, мы применяем математическую индукцию по общему числу вхождений символов $\supset$ и $\sim$ в формулу $\mathbf{A}$. Если это общее число равно нулю, то мы имеем один из частных случаев (a) или (b) и, как мы уже видели, утверждение метатеоремы * 229 получается сразу. Рассмотрим теперь пп-формулу $\mathbf{A}$, в которой это общее число больше нуля; тогда возможны только следующие два случая:

Случай 1: $\mathbf{A}$ имеет вид $\sim \mathbf{A}_1$. Тогда по ** 226 [если только не имеет места уже рассмотренный случай (b)] $\mathbf{B}$ имеет вид $\sim \mathbf{B}_1$, где $\mathbf{B}_1$ получается из $\mathbf{A}_1$ подстановкой формулы $\mathbf{N}$ вместо нуля или большего числа вхождений формулы $\mathbf{M}$. По предположению индукции имеем

$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{A}_1 \supset \mathbf{B}_1,$$
$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{B}_1 \supset \mathbf{A}_1.$$

Утверждение * 229 получаем отсюда подстановкой в † 223 и применением *модус поненс.*

Случай 2: $\mathbf{A}$ имеет вид $\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2$. Тогда по ** 227 [если только не имеет места уже рассмотренный частный случай (b)] $\mathbf{B}$ имеет вид $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ получаются из $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ соответственно с помощью подстановки формулы $\mathbf{N}$ вместо нуля или большего числа вхождений формулы $\mathbf{M}$. По предположению индукции имеем

$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{A}_1 \supset \mathbf{B}_1,$$
$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{B}_1 \supset \mathbf{A}_1,$$
$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{A}_2 \supset \mathbf{B}_2,$$
$$\mathbf{M} \supset \mathbf{N},\ \mathbf{N} \supset \mathbf{M} \vdash \mathbf{B}_2 \supset \mathbf{A}_2.$$

По *модус поненс*

$$\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2 \supset \mathbf{B}_2,\ \mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2,\ \mathbf{B}_1 \vdash \mathbf{B}_2,$$
$$\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2 \supset \mathbf{A}_2,\ \mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2,\ \mathbf{A}_1 \vdash \mathbf{A}_2.$$

Утверждение метатеоремы * 229 получается теперь по теореме дедукции.

Таким образом, доказательство * 229 посредством математической индукции полностью закончено.

23. Связь исчисления P_2 с исчислением P_1. Несмотря на то, что константа f отсутствует в исчислении P_2, мы, тем не менее, сумеем показать эквивалентность систем P_1 и P_2 в некотором смысле, который предполагает использование в исчислении P_2 пп-формулы $r \not\subset r$ (т. е. $\sim [r \supset r]$) вместо константы f исчисления P_1.

В главной интерпретации исчислений P_1 и P_2 константа f из P_1 и пп-формула $r \not\subset r$ из P_2 имеют в действительности различное содержание. Первая является константой, обозначающей f, а вторая — сингулярной формой, принимающей значение f для всякого значения ее переменной r. Тем не менее эти содержания достаточно сходны для того, чтобы $r \not\subset r$ могла быть использована в P_2 для большинства целей, для которых нужна константа, обозначающая f.

Если **A** есть какая-либо пп-формула исчисления P_2, то с помощью процесса поочередной взаимно однозначной замены каждой пп-части вида $\sim \mathbf{C}$ на $\mathbf{C} \supset [r \not\subset r]$ мы можем из **A** получить пп-формулу $\mathbf{A}_0$ исчисления P_2, в которой $\sim$ встречается только как составная часть пп-формул $r \not\subset r$. Мы можем наложить дополнительное ограничение, состоящее в том, что в тех случаях, когда $\sim \mathbf{C}$ имеет вид $r \not\subset r$, замена $\sim \mathbf{C}$ на $\mathbf{C} \supset [r \not\subset r]$ не должна совершаться. Тогда из данной пп-формулы **A** мы получаем с помощью только что описанного процесса однозначно определенную пп-формулу $\mathbf{A}_0$, которую мы будем называть *раскрытием формулы* **A** *относительно отрицания*. Если мы затем всюду в $\mathbf{A}_0$ заменим $r \not\subset r$ на f, то получим пп-формулу $\mathbf{A}_f$ исчисления P_1, которую будем называть *представителем формулы* **A** *в* P_1.

Имеют место следующие метатеоремы (в случае очевидности доказательства опускаются):

*230. Если **B** получается из **A** заменой одного вхождения $\sim \mathbf{C}$ на $\mathbf{C} \supset [r \not\subset r]$, то $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$.

Доказательство. Это следует из * 229 по *модус поненс*, так как подстановка в †220 и †224 дает

$$\vdash \sim \mathbf{C} \supset . \mathbf{C} \supset [r \not\subset r],$$

$$\vdash \mathbf{C} \supset [r \not\subset r] \supset \sim \mathbf{C}.$$

*231. Если $\mathbf{A}_0$ есть раскрытие формулы **A** относительно отрицания, то $\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_0 \vdash \mathbf{A}$.

*232. Если две пп-формулы **A** и **B** исчисления P_2 имеют одного и того же представителя в P_1, то $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$.

*233. Если две пп-формулы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ исчисления P_2 имеют одного и того же представителя в P_1, то $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

*234. Пп-формула $\mathbf{A}$ исчисления P_2 является теоремой в P_2, если ее представитель $\mathbf{A}_f$ в P_1 является теоремой в P_1.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_0$ — раскрытие формулы $\mathbf{A}$ относительно отрицания. В силу * 231 достаточно показать, что $\mathbf{A}_0$ является теоремой исчисления P_2, если $\mathbf{A}_f$ является теоремой исчисления P_1. Так как $\mathbf{A}_0$ есть

$$\mathrm{S}^{f}_{\sim[r \supset r]} \mathbf{A}_f \Big|,$$

то мы рассуждаем следующим образом.

Вначале замечаем, что если пп-формула $\mathbf{X}$ — аксиома исчисления P_1, то

$$\mathrm{S}^{f}_{\sim[r \supset r]} \mathbf{X} \Big|$$

является теоремой исчисления P_2. Действительно, если $\mathbf{X}$ есть †102 или †103, то это непосредственно следует из †202 и †203, если же $\mathbf{X}$ есть †104, то это следует из †221 и *231.

Если дано доказательство в P_1 формулы $\mathbf{A}_f$, в котором не встречается переменная r, мы всюду в этом доказательстве заменяем f на $\sim[r \supset r]$. Получаемая таким способом последовательность пп-формул становится доказательством формулы $\mathbf{A}_0$ в P_2 после добавления доказательства для

$$\mathrm{S}^{f}_{\sim[r \supset r]} \mathbf{X} \Big|$$

всюду, где это необходимо (в действительности это нужно только тогда, когда $\mathbf{X}$ есть †104).

Если в данном доказательстве формулы $\mathbf{A}_f$ в исчислении P_1 используется переменная r, то мы предварительно выбираем некоторую переменную $\mathbf{a}$, которая в доказательстве не используется, и повсюду заменяем r на $\mathbf{a}$. После этого мы действуем так же, как прежде, т. е. заменяем повсюду f на $\sim[r \supset r]$ и всюду, где это необходимо, добавляем доказательства (в исчислении P_2) для

$$\mathrm{S}^{f}_{\sim[r \supset r]} \mathbf{X} \Big|.$$

После этого мы используем * 201 для того, чтобы подставить r вместо $\mathbf{a}$.

Используя те же самые истинностные таблицы для $\supset$ и $\sim$, которые были даны в § 15, мы можем определить *значение* пп-формулы исчисления P_2 для данной системы значений ее переменных таким же образом, как и в случае пп-формул исчисления P_1. Таким же путем, как и раньше, можно проводить и фактическое вычисление значений пп-формулы для всех систем значений ее переменных и называть пп-формулу *тавтологией*, если она принимает значение t для всех систем значений ее переменных, и *противоречием*, если она для всех систем значений принимает значение f.

**235. Всякая теорема исчисления P_2 есть тавтология.

Доказательство. Три аксиомы исчисления P_2 суть тавтологии, и два правила вывода исчисления P_2 обладают свойством сохранять тавтологичность. (Ср. доказательство метатеоремы ** 150.)

** 236. Если две пп-формулы исчисления P_2 имеют одного и того представителя в P_1, то они принимают одинаковые значения для всякой системы значений входящих в них переменных.

Доказательство. С помощью *233, **235 и истинностной таблицы для $\supset$.

** 237. Пп-формула **A** исчисления P_2 является тавтологией тогда и только тогда, когда ее представитель $\mathbf{A}_f$ в исчислении P_1 является тавтологией.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_0$ — раскрытие формулы **A** относительно отрицания. Так как пп-формула $\sim[r \supset r]$ исчисления P_2 всегда принимает значение f, то $\mathbf{A}_0$ является тавтологией тогда и только тогда, когда тавтологией является $\mathbf{A}_f$. (Для того чтобы дать полное доказательство этого утверждения, читатель должен доказать аналог леммы, которая была использована при доказательстве метатеоремы** 150.) Поэтому **237 следует из **236.

238. Пп-формула **A исчисления P_2 является теоремой в P_2 только в том случае, если ее представитель $\mathbf{A}_f$ в исчислении P_1 есть теорема в $\mathbf{P}_1$.

Доказательство. Если **A** — теорема исчисления P_2, то в силу ** 235 она является тавтологией. Поэтому в силу **237 тавтологией является и $\mathbf{A}_f$. Отсюда в силу *152 получаем, что $\mathbf{A}_f$ — теорема исчисления P_1.

Метатеоремы *234 и **238 являются точными формулировками того, в каком смысле исчисления P_1 и P_2 эквивалентны. А именно соответствие, сопоставляющее каждой пп-формуле исчисления P_2 ее представителя в исчислении P_1, является таким много-однозначным соответствием между пп-формулами исчислений P_2 и P_1, при котором теоремам соответствуют теоремы, а не-теоремам соответствуют не-теоремы. И это много-однозначное соответствие обладает такими структурными свойствами, что если $\mathbf{A}_f$ и $\mathbf{B}_f$ — представители формул **A** и **B** соответственно, то $\mathbf{A}_f \supset \mathbf{B}_f$ есть представитель формулы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_f \supset f$ есть представитель формулы $\sim \mathbf{A}$, если только **A** не есть $[r \supset r]$ [202].

Из этой эквивалентности двух исчислений и из **237 мы получаем теорему, обратную к **235:

* 239. Если пп-формула **A** исчисления P_2 является тавтологией, то $\vdash \mathbf{A}$.

Метатеоремы **235 и *239 вместе с алгоритмом проверки тавтологичности пп-формул дают решение проблемы разрешения для исчисления P_2. В этой связи читатель должен сам убедиться в том, что доказательство метатеоремы *239 (совместно с доказательствами предшествующих метатеорем, на которые опирается доказательство метатеоремы *239) непосредственно дает эффективную процедуру для построения доказательства формулы **A** в исчислении P_2, если проверка показала, что **A** есть тавтология.

Как и в случае исчисления P_1, непротиворечивость и полнота исчисления P_2 в различных смыслах, рассмотренных в главе I, вытекают теперь как следствия из этого решения проблемы разрешения.

Принципы дуальности для исчисления P_2, аналогичные метатеоремам *161, *164, *165, тоже получаются тем же путем, что и для исчисления P_1.

Упражнения к § 23

23.0. Пусть P_{2L} — логистическая система, которая отличается от исчисления P_2 только тем, что в ней пп-формулы исчисления P_2 переписаны в бесскобочной системе обозначений Лукасевича. Постройте исходный базис исчисления P_{2L}, затем сформулируйте и докажите аналоги метатеорем **225—**227 для исчисления P_{2L}. (Ср. с упражнением 12.2 и примечанием 91.)

23.1. Исследуйте методами § 19 независимость аксиом и правил исчисления P_2.

23.2. В качестве следствия из * 229 получите для исчисления P_2 аналог метатеоремы *159 (подстановочность эквивалентности).

23.3. Докажите, что в P_2 всякая тавтология является теоремой, пользуясь при этом методом, который аналогичен содержащемуся в §§ 12—15 доказательству соответствующей метатеоремы для исчисления P_1 и который поэтому не опирается на **226—*229.

23.4. В соответствии с нашими соглашениями выражение „$\sim p \supset_{\centerdot} q \not\subset p$" является сокращением некоторой пп-формулы исчисления P_1 и некоторой (другой) пп-формулы исчисления P_2. Запишите каждую из этих пп-формул, не применяя сокращений, отличных от опускания скобок. Для каждой записанной таким образом пп-формулы проведите подсчет ее значений для всех систем значений ее переменных. Проверьте, что соответствующие значения этих пп-формул всегда совпадают, и объясните, почему это должно иметь место во всех подобных случаях.

23.5. По аналогии с § 16 детально исследуйте проблему дуальности в исчислении P_2.

23.6. Пусть P_F — логистическая система с теми же, что в P_2, исходными символами, с *200 и *201 в качестве правил вывода и со следующими шестью аксиомами:

$$p \supset\centerdot q \supset p,$$
$$s \supset [p \supset q] \supset\centerdot s \supset p \supset\centerdot s \supset q,$$
$$p \supset [q \supset r] \supset\centerdot q \supset\centerdot p \supset r,$$
$$p \supset q \supset\centerdot \sim q \supset \sim p,$$
$$\sim\sim p \supset p,$$
$$p \supset \sim\sim p.$$

(1) Докажите †204 в качестве теоремы исчисления P_F и покажите, таким образом, что теоремы исчисления P_F те же самые, что и исчисления P_2. (2) Исследуйте независимость аксиом исчисления P_F.

23.7. Пусть $\mathrm{P}_{\text{Ł}}$ — логистическая система с теми же, что и в P_2, исходными символами и пп-формулами, с *200 и *201 в качестве правил вывода и со следующей единственной аксиомой:

$$p_1 \supset [q_1 \supset p_1] \supset [\sim r \supset [p \supset \sim s] \supset [r \supset [p \supset q] \supset\centerdot s \supset p \supset\centerdot s \supset q] \supset p_2] \supset\centerdot q_2 \supset p_2.$$

Докажите, что теоремы исчисления $\mathrm{P}_{\text{Ł}}$ — те же самые, что и исчисления P_2: покажите для этого, что (1) единственная аксиома исчисления $\mathrm{P}_{\text{Ł}}$ является тавтологией и что (2) аксиомы исчисления P_2 являются теоремами исчисления $\mathrm{P}_{\text{Ł}}$.

23.8. Докажите тот же результат для исчисления $\mathrm{P}_{\text{ł}}$, которое отличается от $\mathrm{P}_{\text{Ł}}$ только тем, что используется следующая (несколько более короткая) единственная аксиома:

$$[p \supset\centerdot \sim q \supset [r \supset s] \supset\centerdot s \supset q \supset\centerdot p_1 \supset\centerdot r \supset q] \supset [\sim q_1 \supset [q_1 \supset r_1] \supset s_1] \supset s_1.$$

23.9. Докажите тот же самый результат для исчисления P_S, которое отличается от $\mathrm{P}_{\text{Ł}}$ только тем, что используется следующая единственная аксиома:

$$r_1 \supset [p \supset q \supset s \supset q_1] \supset [s_1 \supset\centerdot s \supset p_1 \supset\centerdot \sim p \supset \sim r] \supset\centerdot s_1 \supset\centerdot s \supset p \supset\centerdot r \supset p.$$

(Используйте результат упражнения 18.4.)

24. Исходные связки пропозиционального исчисления. В исчислении P_2 мы использовали импликацию и отрицание в качестве исходных связок пропозиционального исчисления, а в P_1 — импликацию и константу f. Мы переходим теперь к рассмотрению других возможностей выбора исходных связок (включая сюда, ради удобств изложения, и константы как 0-арные связки).

За одним только исключением, мы не будем рассматривать связок, имеющих более двух операнд. Исключение составляет тернарная связка, для которой, если она применена к операндам **A**, **B**, **C**, мы используем обозначение [**A**, **B**, **C**]. Мы называем эту связку *условной дизъюнкцией* и приписываем ей следующую истинностную таблицу [203]:

p	q	r	$[p, q, r]$
t	t	t	t
t	t	f	t
t	f	t	t
t	f	f	f
f	t	t	f
f	t	f	f
f	f	t	t
f	f	f	f

(Отсюда следует, что дуальным к $[p, q, r]$ является выражение $[r, q, p]$ в том смысле, что истинностная таблица выражения $[p, q, r]$ превращается в истинностную таблицу выражения $[r, q, p]$, если поменять между собой t и f.)

Сингулярными и бинарными связками, которые мы будем рассматривать, являются связки § 05 [204] с истинностными таблицами, приведенными в § 15. Константы суть t и f с приписанными им значениями t и f соответственно. Если мы добавим еще истинностную таблицу

p	p
t	t
f	f

то в рассмотрение окажутся введенными все возможные истинностные таблицы (для связок, являющихся не более чем бинарными), исключая только такие истинностные таблицы, в которых значения, стоящие в последнем столбце, не зависят от одного из предыдущих столбцов.

Если задано некоторое число связок вместе с обычным бесконечным перечнем пропозициональных переменных, то правильно построенные формулы легко определяются по аналогии с §§ 10, 20, а значение некоторой пп-формулы для всякой системы значений ее переменных задается с помощью определения, аналогичного определению § 15. Ясно, что значения некоторой пп-формулы для всех систем значений ее переменных могут быть полностью заданы в конечной таблице, подобной истинностной таблице связки; эту таблицу мы будем называть *истинностной таблицей* данной пп-формулы.

Система исходных связок пропозиционального исчисления будет называться *полной*, если все возможные истинностные таблицы, содержащие не менее двух столбцов [205], имеются в числе истинностных таблиц тех пп-формул, которые получаются при такой системе связок. Какая-либо определенная связка из их числа будет называться *независимой*, если после ее отбрасывания ее истинностная таблица не будет встречаться среди истинностных таблиц получающихся пп-формул — или, в случае константы *t* или *f*, если после ее отбрасывания среди получающихся пп-формул не будет такой, которая принимала бы значение t или соответственно f для всех систем значений своих переменных.

Систематическим изучением полных систем независимых исходных связок пропозиционального исчисления занимался Пост [206]. Мы не будем исследовать здесь этого вопроса исчерпывающим образом, а ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев. Мы начинаем со следующего:

Условная дизъюнкция, t и f составляют полную систему независимых связок пропозиционального исчисления.

Полнота доказывается математической индукцией по числу различных переменных, входящих в пп-формулу, построенную из этих связок. Ясно, что среди пп-формул, не содержащих переменных, мы найдем все возможные системы значений, так как пп-формула *f* имеет значение f, а пп-формула *t* имеет значение t. Предположим, что среди пп-формул, содержащих n переменных, имеются все возможные системы значений, т. е. все возможные истинностные таблицы, и рассмотрим некоторую произвольную систему значений для пп-формулы, содержащей $n+1$ переменных, т. е. некоторую произвольную истинностную таблицу T с $n+2$ столбцами. Пусть первый столбец в истинностной таблице T является столбцом значений переменной $\mathfrak{b}$. Пусть T_1 будет истинностной таблицей, которая получается из T отбрасыванием всех тех строк, которые имеют в первом столбце букву f, и затем отбрасыванием самого первого столбца. Пусть T_2 будет истинностной таблицей, которая получается из T отбрасыванием всех тех строк, которые имеют в первом столбце букву t, и затем отбрасыванием самого первого столбца. По предположению индукции, существуют пп-формулы **A** и **C**, истинностные таблицы которых суть T_1 и T_2 соответственно. Тогда пп-формула [**A**, b, **C**] имеет истинностную таблицу T, как в этом можно убедиться, обращаясь к истинностной таблице условной дизъюнкции. (Таким образом, полнота данной системы элементарных связок доказывается математической индукцией.)

Независимость условной дизъюнкции очевидна, так как без нее мы имели бы только такие пп-формулы, которые состоят из одного единственного символа (либо f либо t, либо переменной).

Независимость t может быть доказана ссылкой на последнюю строку истинностной таблицы условной дизъюнкции, так как из этой последней строки видно, что если пп-формула построена из условной дизъюнкции и f (без использования t), то она должна принимать значение f, если придать значение f всем ее переменным. Аналогично ссылкой на первую строку истинностной таблицы условной дизъюнкции можно доказать независимость f.

Теперь мы можем доказывать полноту других систем исходных связок, определяя через них (в манере § 11) три связки — условную дизъюнкцию, t и f — и показывая, что эти определения приписывают значение t константе t, значение f константе f и требуемую истинностную таблицу условной дизъюнкции. Так, полнота импликации и f вытекает из D1 (см. § 11) и определения

D 12. $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}] \rightarrow [\mathbf{B} \supset \mathbf{A}] [\sim \mathbf{B} \supset \mathbf{C}]$.

В случае систем исходных связок, которые не содержат констант, невозможно дать определения для t и f. Однако при доказательстве полноты достаточно вместо этого привести пример пп-формулы, которая для всех систем значений ее переменных принимала бы значение t, т. е. была бы тавтологией, и пример пп-формулы, которая для всех систем значений ее переменных принимала бы значение f, т. е. была бы противоречием. Так, полнота импликации и отрицания следует из приведенного выше определения D12 (переистолкованного для случая, когда исходными связками являются импликация и отрицание) и каких-либо примеров тавтологии, скажем $r \supset r$, и противоречия, скажем $r \not\subset r$.

В каждой из систем — импликация и f, импликация и отрицание — независимость второй связки следует из того, что никакая пп-формула, построенная из одной только импликации, не может быть противоречием (как можно показать математической индукцией, используя истинностную таблицу импликации). Независимость импликации в обоих случаях очевидна из-за крайней ограниченности класса пп-формул, которые могут быть построены без нее. Таким образом:

Каждая из систем — импликация и f, импликация и отрицание — является полной системой независимых исходных связок пропозиционального исчисления.

Получив этот результат, мы можем теперь доказывать полноту некоторой системы исходных связок, определяя с их помощью либо импликацию и f, либо импликацию и отрицание и показывая, что эти определения дают нужные истинностные таблицы (и, если определяется f, то они приписывают константе f значение f).

В частности, полнота отрицания и дизъюнкции следует из определения $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ как $\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, а полнота отрицания и конъюнкции следует из определения $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ как $\sim [\mathbf{A} \sim \mathbf{B}]$. В каждом из этих случаев независимость можно доказать аналогично тому, как была доказана независимость импликации и отрицания. Таким образом:

Каждая из систем — отрицание и дизъюнкция, отрицание и конъюнкция — является полной системой независимых исходных связок пропозиционального исчисления.

Мы предоставляем читателю доказать следующее утверждение:

Импликация и обратная антиимпликация образуют полную систему независимых исходных связок пропозиционального исчисления.

Эта последняя система исходных связок, подобно системе, состоящей из условной дизъюнкции, t и f, имеет то существенное преимущество, что она является самодуальной в том смысле, что дуал какой-либо исходной связки либо сам является исходной связкой, либо получается из исходной связки перестановкой ее операнд. Действительно, ясно, что исследование дуальности, подобное проведенному в § 16 для исчисления P_1, было бы значительно проще в случае такой формулировки пропозиционального исчисления, которая основывается на самодуальной системе исходных связок.

Из двух указанных самодуальных систем исходных связок та, которая состоит из импликации и обратной антиимпликации, имеет следующий недостаток: в ней нельзя определить отрицание так, чтобы оно было *самодуальным* в том смысле, что дуалом к $\sim \mathbf{A}$ является $\sim \mathbf{A}_1$, где $\mathbf{A}_1$ дуально к $\mathbf{A}$. Поэтому становится необходимым ввести (для удобства дуализации) два определения отрицания, дуальных друг к другу. Тогда, если для обозначения этих двух отрицаний выбрать символы $\sim$ и $\backsim$, дуалом для $\sim \mathbf{A}$ будет $\backsim \mathbf{A}_1$.

Самодуальная система, состоящая из обусловленной дизъюнкции, t и f, не имеет этого недостатка, но она страдает очевидными недостатками, связанными с использованием в качестве исходной связки такой, которая имеет более двух операнд.

По этим соображениям иногда высказывалась мысль об отказе от требования независимости в интересах использования более удобной системы исходных связок. В частности, предлагалась система, состоящая из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Другой возможной системой является, конечно, отрицание, импликация и обратная антиимпликация.

Для некоторых целей выгодно иметь полную систему исходных связок, состоящую из одной связки, хотя для получения такой системы приходится выбирать нужную связку весьма искусственным образом (и отказаться от каких бы то ни было требований самодуальности, если исходная связка должна быть не более чем бинарной). Мы предоставляем читателю доказать следующее предложение [207]:

Антиконъюнкция, взятая отдельно, образует полную систему исходных связок пропозиционального исчисления. То же самое верно для отдельно взятой антидизъюнкции. Эти две связки являются единственными, которые, будучи не более чем бинарными, обладают свойством образовывать, каждая в отдельности, полную систему исходных связок пропозиционального исчисления.

Упражнения к § 24

24.0. Считая условную дизъюнкцию, t и f исходными, дайте определения всех остальных сингулярных и бинарных связок. Найдите возможно более простые определения, подчиненные требованию, чтобы определения взаимно дуальных связок были дуальны друг к другу и чтобы определение отрицания было самодуальным.

24.1. Считая импликацию и обратную антиимпликацию исходными, дайте определения сингулярным и остающимся бинарным связкам. Среди определений выберите возможно более простые, которые были бы подчинены требованию, чтобы определения взаимно дуальных связок были дуальны друг к другу. Как указано в тексте, дайте определения двух отрицаний, дуальных друг к другу.

24.2. Предположите, что задана некоторая формулировка пропозиционального исчисления с условной дизъюнкцией, t и f в качестве исходных связок, в которой каждая теорема является тавтологией и каждая тавтология является теоремой. Рассмотрите для этой формулировки пропозиционального исчисления проблему дуальности аналогично тому, как это было сделано для исчисления P_1 в § 16. Рассмотрите вначале дуализацию собственно пп-формул, а затем дуализацию выражений, которые в соответствии с определениями из 24.0 являются сокращениями пп-формул.

24.3. Покажите, что эквивалентность, дизъюнкция и f образуют полную систему независимых связок пропозиционального исчисления. (Ср. упражнение 15.7 и примечание 186.)

24.4. Покажите независимость связок в каждой из следующих систем связок пропозиционального исчисления: (1) отрицание и дизъюнкция; (2) отрицание и конъюнкция; (3) импликация и обратная антиимпликация.

24.5. Считая антиконъюнкцию единственной исходной связкой, дайте определения сингулярных и остающихся бинарных связок. Отвлекаясь от вопросов дуальности, выберите среди определений те, в которых определяющие являются наиболее краткими (если их полностью выписать в терминах исходных связок).

24.6. Покажите, что эквивалентность и антиэквивалентность не составляют полной системы исходных связок пропозиционального исчисления. Выясните все возможные способы добавлением одной или нескольких не более чем бинарных связок сделать эту систему полной системой независимых связок пропозиционального исчисления.

24.7. Может случиться, что хотя все связки некоторой полной системы связок пропозиционального исчисления и независимы, система все же может быть упрощена без потери полноты при помощи замены одной из связок на такую другую, которая может быть определена через одну только заменяемую связку и содержит меньшее число операнд, чем эта последняя. Для этих целей всякую тавтологию можно считать определением для t, а всякое противоречие — определением для f, хотя они и не являются, строго говоря, определениями (ср. замечание на этот счет в тексте). Если полную систему независимых исходных связок пропозиционального исчисления нельзя упростить таким образом, то она называется *специализированной* системой связок пропозиционального исчисления (в смысле Поста). Определите, какие из упомянутых в тексте полных систем независимых связок пропозиционального исчисления являются специализированными системами. Те из них, которые не являются специализированными системами, сведите всевозможными способами к специализированным.

24.8. Проделайте то же самое по отношению ко всем полным системам независимых связок, найденным в 24.6.

24.9. Рассмотрите формулировку пропозиционального исчисления, в которой исходными связками являются отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Мы говорим что пп-формула **B**, содержащая n различных переменных, находится в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме*, если выполнены следующие условия:

(i) $\mathbf{B}$ имеет вид дизъюнкции $\mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{C}_m$; (ii) каждый член $\mathbf{C}_i$ этой дизъюнкции имеет вид конъюнкции $\mathbf{C}_{i1}\mathbf{C}_{i2} \ldots \mathbf{C}_{in}$; (iii) каждое $\mathbf{C}_{ik}(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ есть либо $\mathbf{b}_k$, либо $\sim \mathbf{b}_k$, где $\mathbf{b}_k$ есть k-я переменная в алфавитном порядке переменных (§ 20), входящая в $\mathbf{B}$; (iv) члены $\mathbf{C}_i$ все различны между собой и упорядочены таким образом, что если $\mathbf{C}_{i1}, \mathbf{C}_{i2}, \ldots, \mathbf{C}_{i(k-1)}$ совпадают с $\mathbf{C}_{j1}, \mathbf{C}_{j2}, \ldots, \mathbf{C}_{j(k-1)}$ соответственно и $\mathbf{C}_{ik}$ есть $\mathbf{b}_k$, а $\mathbf{C}_{jk}$ есть $\sim \mathbf{b}_k$, то $i < j$. Введите соответствующим определением материальную эквивалентность и назовите пп-формулу $\mathbf{B}$ *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* пп-формулы $\mathbf{A}$, если $\mathbf{B}$ находится в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, содержит те же самые переменные, что и $\mathbf{A}$, и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ является тавтологией. Покажите, что всякая не являющаяся противоречием пп-формула имеет единственную совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Затем с помощью двух законов де Моргана и законов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции (ср. упражнения 15.5, 15.7, 15.8) покажите, как эту пп-формулу свести к ее совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Покажите, что пп-формула является тавтологией тогда и только тогда, когда в ее совершенной дизъюнктивной нормальной форме $m = 2^n$.

24.10. Для формулировки пропозиционального исчисления, в которой исходными связками являются условная дизъюнкция, t и f, можно дать следующее определение *нормальной формы* с помощью рекурсии по числу различных переменных, входящих в пп-формулу: пп-формула, не содержащая переменных, находится в нормальной форме тогда и только тогда, когда она является одной из пп-формул t или f; пп-формула, различные переменные которой в их алфавитном порядке суть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, находится в нормальной форме тогда и только тогда, когда она имеет вид $[\mathbf{A}, \mathbf{b}_n, \mathbf{C}]$, где каждая из пп-формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ содержит все переменные $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{b}_{n-1}$, не содержит переменной $\mathbf{b}_n$ и находится в нормальной форме. Получите для этого случая результат о сведении к нормальной форме, аналогичный результату из 24.9 о сведении к совершенной дизъюнктивной нормальной форме в случае, когда исходными связками являются отрицание, конъюнкция и дизъюнкция.

25. Другие формулировки пропозиционального исчисления. Формулировки пропозиционального исчисления, которые были нами до сих пор рассмотрены как в тексте, так и в упражнениях, основывались все либо на импликации и f, либо на импликации и отрицании, как на исходных связках. Мы переходим теперь к краткому описанию некоторых формулировок, основанных на других исходных связках.

Хорошо известна формулировка $\mathrm{P_R}$ пропозиционального исчисления, использованная в *Principia Mathematica*. Исходными связками в ней являются отрицание и дизъюнкция. Правилами вывода являются подстановка и *модус поненс* (последний в виде: из $\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$). Аксиомами являются пять следующих, в которых $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ следует понимать как сокращение вместо $\sim \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$:

$$p \vee p \supset p;$$
$$q \supset p \vee q;$$
$$p \vee q \supset q \vee p;$$
$$p \vee [q \vee r] \supset q \vee [p \vee r];$$
$$q \supset r \supset_{\centerdot} p \vee q \supset p \vee r.$$

Было предложено много упрощений этой системы. Среди них наиболее просто получается система $\mathrm{P_B}$. К ней мы приходим, отбрасывая четвертую аксиому, которая в действительности не независима. Другим упрощением является система $\mathrm{P_N}$, в которой пять аксиом заменены следующими четырьмя:

$$p \vee p \supset p;$$
$$p \supset p \vee q;$$
$$p \vee [q \vee r] \supset q \vee [p \vee r];$$
$$q \supset r \supset_{\centerdot} p \vee q \supset p \vee r.$$

Еще одним упрощением является система $\mathrm{P_G}$, в которой пять аксиом заменены следующими тремя:

$$p \vee p \supset p;$$
$$p \supset p \vee q;$$
$$q \supset r \supset_{\centerdot} p \vee q \supset r \vee p.$$

Для некоторых целей удобно иметь такую формулировку пропозиционального исчисления, которая основывается на только одной исходной связке, на только одной аксиоме и, помимо правила подстановки, на только одном правиле вывода, хотя для достижения этого и приходится выбирать единственную исходную связку весьма искусственным образом и позволить единственной аксиоме быть сравнительно длинной. До тех пор, пока сама процедура построения логистической системы рассматривается как пробная и вопрос о том, какие допущения (в форме аксиом или правил) будут приняты в конце концов, остается открытым, предпочтение должно быть отдано естественности выбора исходных связок и простоте отдельных аксиом и правил, а не минимальности их числа. Так же следует поступать и тогда, когда упор делается на выяснение основ теорем и метатеорем, в смысле определения предположений, лежащих в основании каждой из них. С другой стороны, весьма возможно, что в некоторых случаях доказательство нужных метатеорем может быть упрощено уменьшением числа исходных связок, аксиом и правил, даже за счет естественности и простоты, а метатеорема, однажды доказанная для какой-либо формулировки, иногда может быть распространена на другие формулировки с помощью установления эквивалентности этих формулировок (в некотором подходящем смысле).

Нико первым нашел для пропозиционального исчисления формулировку указанного вида. Его система, будем называть ее $\mathrm{P_n}$, основана на антиконъюнкции как на исходной связке. Правилами вывода являются правило подстановки и следующее правило: из $\mathbf{A} \mathbf{|}_{\bullet} \mathbf{B} | \mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ вытекает $\mathbf{C}$. Единственной аксиомой является:

$$p \mathbf{|} [q|r] \mathbf{|}_{\bullet}\, p_1 \mathbf{|} [p_1|p_1] \mathbf{|}_{\bullet}\, s|q|_{\bullet}\, p|s|_{\bullet}\, p|s.$$

В другой такой формулировке пропозиционального исчисления, $\mathrm{P_w}$, исходные связки и правила вывода — те же самые, что и в $\mathrm{P_n}$, а единственная аксиома — следующая:

$$p \mathbf{|} [q|r] \mathbf{|}_{\bullet} [s|r \mathbf{|}_{\bullet}\, p|s \mathbf{|}_{\bullet}\, p|s] \mathbf{|}_{\bullet}\, p \mathbf{|}_{\bullet}\, p|q.$$

(Эта аксиома, в отличие от аксиомы Нико, является *органической* в смысле Вайсберга и Лесьневского, т. е. никакая пп-часть ее, не совпадающая с целым, не является тавтологией.)

В еще одной такой формулировке пропозиционального исчисления, $\mathrm{P_L}$, исходные связки и правила вывода по-прежнему те же самые, что и в $\mathrm{P_n}$, а единственная аксиома —

$$p \mathbf{|} [q|r] \mathbf{|}_{\bullet}\, p \mathbf{|} [r|p] \mathbf{|}_{\bullet}\, s|q|_{\bullet}\, p|s|_{\bullet}\, p|s.$$

(Эта аксиома ближе к аксиоме Нико и вместе с тем является органической.)

Упражнения к § 25

25.0. Докажите достаточность $\mathrm{P_R}$ для пропозиционального исчисления. Для этого развейте систему настолько, чтобы либо прямо доказать, что пп-формула является теоремой тогда и только тогда, когда она является тавтологией, либо показать эквивалентность $\mathrm{P_R}$ и $\mathrm{P_2}$ аналогично тому, как это было сделано в § 23 для $\mathrm{P_1}$ и $\mathrm{P_2}$. (Для облегчения построения нужно как можно раньше обосновать следующее правило вывода: если $\mathbf{M}, \mathbf{N}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ удовлетворяют условиям, сформулированным в *229, и если $\vdash \mathbf{M} \supset \mathbf{N}$ и $\vdash \mathbf{N} \supset \mathbf{M}$, то $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.)

25.1. Покажите достаточность $\mathrm{P_B}$ для пропозиционального исчисления, доказав четвертую аксиому исчисления $\mathrm{P_R}$ как теорему.

25.2. Исследуйте независимость аксиом и правил исчисления $\mathrm{P_B}$.

25.3. Покажите достаточность $\mathrm{P_N}$ для пропозиционального исчисления, доказав вторую и третью аксиомы исчисления $\mathrm{P_R}$ как теоремы.

25.4. Исследуйте независимость аксиом и правил исчисления $\mathrm{P_N}$.

25.5. Докажите достаточность $\mathrm{P_G}$ для пропозиционального исчисления, доказав в качестве теорем аксиомы исчисления $\mathrm{P_R}$. (Главная трудность — доказать теорему $p \supset p$. Для этого, следуя Расёвой, нужно предварительно доказать последовательно следующие теоремы:

$$p \supset \sim\sim p, \quad q \vee p \supset . \sim p \supset q, \quad \sim\sim . \sim\sim\sim p \supset \sim p,$$
$$\sim p \vee . p \vee \sim\sim\sim p, \quad \sim\sim [p \supset r] \supset . s \vee [q \bar{\vee} p] \supset r \vee q \vee s.)$$

25.6. Исследуйте независимость аксиом и правил исчисления $\mathrm{P_G}$.

25.7. Покажите достаточность $\mathrm{P_n}$ для пропозиционального исчисления, доказав эквивалентность исчислений $\mathrm{P_n}$ и $\mathrm{P_R}$ аналогично тому, как это было сделано в § 23 для $\mathrm{P_1}$ и $\mathrm{P_2}$.

25.8. Покажите достаточность $\mathrm{P_n}$ для пропозиционального исчисления без использования исчисления $\mathrm{P_R}$, доказав эквивалентность исчислений $\mathrm{P_n}$ и $\mathrm{P_2}$ аналогично тому, как это было сделано в § 23 для $\mathrm{P_1}$ и $\mathrm{P_2}$.

25.9. Исследуйте независимость аксиом и правил исчисления $\mathrm{P_n}$. (На этот вопрос можно ответить, исходя из непосредственно очевидных соображений, без использования истинностных таблиц или обобщенных систем истинностных значений в смысле § 19.)

25.10. Выясните с помощью методов § 19 или как-нибудь иначе, остается ли $\mathrm{P_n}$ достаточным для пропозиционального исчисления, если его второе правило вывода изменить следующим образом: из $\mathbf{A} \mid . \mathbf{B} \mid \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$.

25.11. Покажите достаточность $\mathrm{P_w}$ для пропозиционального исчисления, доказав в качестве теоремы аксиому исчисления $\mathrm{P_n}$.

25.12. Покажите достаточность $\mathrm{P_L}$ для пропозиционального исчисления.

25.13. [208] (1) Считая импликацию и обратную антиимпликацию исходными связками, а подстановку и *модус поненс* правилами вывода, подберите аксиомы таким образом, чтобы получающаяся система была достаточна для пропозиционального исчисления. Постарайтесь, насколько будет возможно, сделать отдельные аксиомы простыми, а затем — сделать их число небольшим. (2) Обеспечьте независимость аксиом и правил.

25.14. [208] Считая отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию исходными связками, подберите аксиомы и правила вывода так, чтобы получающаяся логическая система была достаточной для пропозиционального исчисления. При этом сделайте систему аксиом и правил самодуальной в таком смысле, чтобы из этого непосредственно следовала теорема, аналогичная метатеореме *161 (принцип дуальности). Постарайтесь, насколько возможно, не нарушая этого правила, сделать отдельные аксиомы простыми, а число их — небольшим. Можно ли сделать эти аксиомы и правила независимыми без чрезмерных усложнений и без потери свойства самодуальности?

25.15. [208] Ответьте на те же вопросы, считая исходными связками условную дизъюнкцию, t и f.

25.16. [208] Пусть исходными связками будут условная дизъюнкция, t и f. Пусть правилами вывода будут правило подстановки и следующее правило: из $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ и $\mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}$. Подберите аксиомы таким образом, чтобы получающаяся система была достаточна для пропозиционального исчисления. Постарайтесь, насколько будет возможно, сделать отдельные аксиомы простыми, а число их — небольшим. (Игнорируйте вопрос дуальности.)

26. Частичные системы пропозиционального исчисления. До сих пор мы занимались логистическими системами, которые соответствовали всему пропозициональному исчислению в целом, т. е. они в том или ином смысле были эквивалентны исчислению P_1 или исчислению P_2. В то же время изучены также различные частичные системы, не адэкватные пропозициональному исчислению в целом, и в настоящем параграфе мы кратко опишем некоторые из них.

Один из видов частичных систем пропозиционального исчисления составляют системы, основанные на неполной системе исходных связок и на так подобранных аксиомах и правилах, что теоремы совпадают с тавтологиями, построенными из этих связок. Примером такой системы является *импликативное пропозициональное исчисление*, которое формулируется, например, с помощью логистической системы $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{I}}$ упражнения 18.3 или с помощью системы $\mathrm{P}_{\mathrm{Ł}}^{\mathrm{I}}$ из 18.4. Другие примеры читатель найдет в упражнениях к этому параграфу.

Системы этого вида представляют, по-видимому, интерес главным образом как переходные ступени к формулировкам пропозиционального исчисления в целом. Так, например, результат упражнения 18.4 вместе с результатом упражнения 12.7 ведет к формулировке P_λ пропозиционального исчисления, исходными связками которой являются импликация и f, правилами вывода — *модус поненс* и подстановка, а аксиомами — две следующих:

$$p \supset q \supset r \supset . r \supset p \supset . s \supset p; \quad f \supset p.$$

Эта формулировка полного пропозиционального исчисления изящна своей краткостью и четко разграничивает роль константы f и роль импликации, в то же время она не дает возможности четко разграничить то, что можно было бы рассматривать как различные предположения относительно импликации. Если бы мы пожелали выделить из числа прочих свойств импликации те, которые охватываются теоремой дедукции, то мы могли бы начать с логистической системы P^+ упражнения 19.6 (или с какого-нибудь ее эквивалента) — с *позитивного импликативного пропозиционального исчисления* Гильберта, — а затем добавлять исходные связки и аксиомы, с тем чтобы получить формулировку полного пропозиционального исчисления.

Близким к позитивному импликативному пропозициональному исчислению является *позитивное пропозициональное исчисление* Гильберта, задачей которого является воплощение той части пропозиционального исчисления, которую можно назвать в некотором смысле независимой от существования отрицания. Ее можно следующим образом формулировать в виде логистической системы P^P. Исходными связками являются импликация, конъюнкция, дизъюнкция и эквивалентность (которые, следовательно, не являются независимыми даже в качестве исходных связок этой частичной системы пропозиционального исчисления). Правилами вывода являются *модус поненс* и подстановка, а аксиомами — одиннадцать следующих:

$$p \supset . \, q \supset p;$$
$$s \supset [p \supset q] \supset . \, s \supset p \supset . \, s \supset q;$$
$$pq \supset p;$$
$$pq \supset q;$$
$$p \supset . \, q \supset pq;$$
$$p \supset p \vee q;$$
$$q \supset p \vee q;$$
$$p \supset r \supset . \, q \supset r \supset . \, p \vee q \supset r;$$
$$p \equiv q \supset . \, p \supset q;$$
$$p \equiv q \supset . \, q \supset p;$$
$$p \supset q \supset . \, q \supset p \supset . \, p \equiv q.$$

Систему P^P можно расширить до формулировки полного пропозиционального исчисления путем добавления отрицания к исходным связкам и добавления одной или нескольких соответствующим образом подобранных аксиом, содержащих отрицание, к имеющимся аксиомам. Мы можем, например, использовать †204 в качестве единственной дополнительной аксиомы и получить тем самым формулировку пропозиционального исчисления, которую мы в дальнейшем будем называть исчислением P_H.

С другой стороны, добавляя к исчислению P^P более слабую аксиому или аксиомы, содержащие отрицание, мы можем получить некоторую формулировку *интуиционистского пропозиционального исчисления* Гейтинга [209].

Математический интуиционизм Брауэра будет рассмотрен в главе XII. Чтобы уже в этой главе дать читателю представление о нем, скажем, что он отвергает некоторые принципы логики — и среди них некоторые законы пропозиционального исчисления, в частности закон двойного отрицания и закон исключенного третьего, — которые до этого по традиции принимались математиками без каких-либо сомнений. (Из этого, конечно, вытекает, что отвергается и такая интерпретация пропозиционального исчисления, как та, что была дана в § 10 или § 20, если не сама по себе, то, во всяком случае, в свете реального использования пропозиционального исчисления как части более сильного языка.)

Гейтинговская логистическая формализация идей Брауэра (признанная Брауэром) придала этим идеям недостававшую им прежде точность и играла важную роль в последующем обсуждении достоинств интуиционистской критики классической математики. Мы принимаем для интуиционистского пропозиционального исчисления не первоначальную формулировку Гейтинга, а более новую эквивалентную ей формулировку P^i_S.

Исходными связками в исчислении P^i_S являются импликация, конъюнкция, дизъюнкция, эквивалентность и отрицание. Правила вывода — *модус поненс* и подстановка. Аксиомами являются одиннадцать аксиом исчисления P^P и две следующие аксиомы:

$p \supset \sim p \supset \sim p.$ (*Частный закон приведения к абсурду* ⟨*reductio ad absurdum*⟩.)

$\sim p \supset . \, p \supset q.$ (*Закон отрицания антецедента.*)

В *минимальном пропозициональном исчислении* Колмогорова и Иогансона[210] имеет место еще более решительное неприятие классических законов, содержащих отрицание. Формулировка P^m_0 этого исчисления может быть получена из исчисления P^i_S заменой двух предыдущих аксиом одной следующей:

$p \supset q \supset . \, p \supset \sim q \supset \sim p.$ (*Закон приведения к абсурду.*)

Вайсберг показал[211], что всякая теорема **A** исчисления P^i_S может быть доказана с использованием только двух первых аксиом из числа рассмотренных тринадцати и еще таких аксиом, которые содержат входящие в **A** связки, отличные от импликации. В качестве следствия то же самое может быть получено для исчисления P^m_0. Отсюда вытекает, что теоремы интуиционистского пропозиционального исчисления P^i_S или минимального пропозиционального исчисления P^m_0, которые не содержат отрицания, совпадают с теоремами позитивного пропозиционального исчисления, а те теоремы какого-нибудь из этих трех исчислений, единственной связкой которых является импликация, совпадают с теоремами импликативного пропозиционального исчисления.

Проблема разрешения для исчисления P^{i}_{S} была вначале решена Генценом, а затем Вайсбергом [212]. С помощью результатов, упомянутых в предыдущем абзаце, из этого получаются решения проблемы разрешения для исчислений P^{P} и P^{+}, а с помощью результата упражнения 26.19 (2) получается также решение проблемы разрешения для исчисления P^{m}_{0}.

Упражнения к § 26

26.0. Пусть P^{E}_{W} — частичная система пропозиционального исчисления, основанная на эквивалентности в качестве единственной исходной связки, причем правилами вывода являются подстановка и правило: из $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$, а аксиомами служат две следующие:

$$p \equiv q \equiv_{\centerdot} q \equiv p;$$
$$p \equiv [q \equiv r] \equiv_{\centerdot} p \equiv q \equiv r.$$

Докажите следующие теоремы исчисления P^{E}_{W}:

$$p \equiv p \equiv q \equiv q;$$
$$p \equiv p;$$
$$p \equiv q \equiv_{\centerdot} r \equiv_{\centerdot} p \equiv_{\centerdot} q \equiv r;$$
$$[s \equiv_{\centerdot} p \equiv_{\centerdot} q \equiv r] \equiv_{\centerdot} p \equiv q \equiv r \equiv s;$$
$$r \equiv p \equiv [q \equiv r] \equiv_{\centerdot} p \equiv q;$$
$$q \equiv r \equiv_{\centerdot} p \equiv q \equiv_{\centerdot} p \equiv r;$$
$$p_1 \equiv q_1 \equiv_{\centerdot} p_2 \equiv q_2 \equiv_{\centerdot} p_1 \equiv p_2 \equiv_{\centerdot} q_1 \equiv q_2.$$

(Указанный порядок теорем является одним из возможных порядков, в котором они могут быть доказаны. Решение упражнений 26.0 и 26.2 эвристически облегчается, если заметить, что данные аксиомы являются полными законами коммутативности и ассоциативности эквивалентности.)

26.1. Отсюда, используя метод, аналогичный примененному в доказательстве *229, докажите следующую метатеорему исчисления P^{E}_{W}: Если $\mathbf{B}$ получается из $\mathbf{A}$ подстановкой $\mathbf{N}$ вместо нуля или большего числа вхождений $\mathbf{M}$ (не обязательно вместо всех вхождений $\mathbf{M}$ в $\mathbf{A}$) и если $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$, то $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

26.2. Докажите отсюда, что пп-формула исчисления P^{E}_{W} является теоремой тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в нее четное число раз [213]. Следовательно, теоремы исчисления P^{E}_{W} совпадают с теми тавтологиями, в которых единственной связкой является эквивалентность.

26.3. (1) Пусть P^{E}_{w} — система, получающаяся из P^{E}_{W} заменой двух аксиом на одну следующую:

$$p \equiv [q \equiv r] \equiv [r \equiv s \equiv s] \equiv_{\centerdot} p \equiv q.$$

Докажите, что теоремы исчисления P_{w}^{E} совпадают с теоремами исчисления P_{W}^{E}.

(2) Пусть $P_{Ł}^{E}$ будет системой, получающейся из исчисления P_{W}^{E} заменой двух аксиом одной следующей аксиомой:

$$q \equiv r \equiv_{\blacksquare} p \equiv q \equiv_{\blacksquare} r \equiv p.$$

Докажите, что теоремы исчисления $P_{Ł}^{E}$ совпадают с теоремами исчисления P_{W}^{E}.

(3) Следуя Лукасевичу, докажите, используя результат упражнения 26.2 и метод § 19, что никакая более короткая аксиома не может аналогичным образом заменить две аксиомы исчисления P_{W}^{E}.

26.4. Пусть P^{EN} будет системой, которая получается из исчисления P_{W}^{E} добавлением отрицания в качестве дополнительной исходной связки и добавлением следующей дополнительной аксиомы:

$$\sim p \equiv \sim q \equiv_{\blacksquare} p \equiv q.$$

Покажите эквивалентность в смысле § 23 системы P^{EN} и системы P^{Ef}, которая получается из исчисления P_{W}^{E} добавлением f в качестве дополнительного исходного символа без добавления какой-либо дополнительной аксиомы, причем отрицание определяется в P^{Ef} так:

$$\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \equiv f.$$

Затем докажите, что пп-формула исчисления P^{EN} является теоремой в том и только в том случае, если всякая ее переменная и знак $\sim$ входят в нее четное число раз (если они вообще в нее входят) [214]. Следовательно, теоремы исчислений P^{EN} и P^{Ef} совпадают с тавтологиями в терминах эквивалентности и отрицания, в терминах эквивалентности и f соответственно.

26.5. Покажите, что система P^{EN} не полна в смысле Поста, так как пп-формулу $p \equiv \sim p$ можно добавить в качестве аксиомы без того, чтобы пп-формула p стала теоремой [215].

26.6. Пусть имеется частичная система пропозиционального исчисления, исходными связками которой являются эквивалентность и дизъюнкция, а правилами вывода, помимо правила подстановки, два следующих правила вывода: из $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ следует $\mathbf{B}$; из $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ [216]. (1) Подберите такие аксиомы, чтобы теоремы совпадали с тавтологиями, выраженными в терминах эквивалентности и дизъюнкции. (2) Используя любые результаты, доказанные ранее в тексте или в упражнениях, покажите, что основанная на этих аксиомах система полна в смысле Поста. (3) Исследуйте также независимость аксиом и правил вывода.

26.7. Используя (в меру их применимости) результаты, уже полученные в отношении исчисления P_2, покажите, что пп-формула исчисления P_H является теоремой тогда и только тогда, когда она является тавтологией.

26.8. (1) При помощи следующих истинностных таблиц, в которых выделенными значениями являются 0 и 1, покажите независимость формулы $p \supset . q \supset p$ как аксиомы исчисления P_H.

p	q	$p \supset q$	pq	$p \vee q$	$p \equiv q$	$\sim p$
0	0	0	1	1	1	3
0	1	1	1	1	1	
0	2	2	4	1	4	
0	3	2	4	1	4	
0	4	4	4	1	4	
1	0	0	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	
1	2	2	4	1	4	
1	3	2	4	1	4	
1	4	4	4	1	4	
2	0	0	4	1	4	3
2	1	1	4	1	4	
2	2	0	4	4	1	
2	3	0	4	4	4	
2	4	1	4	4	1	
3	0	2	4	1	4	3
3	1	1	4	1	4	
3	2	2	4	4	4	
3	3	2	4	4	4	
3	4	1	4	4	1	
4	0	0	4	1	4	0
4	1	1	4	1	4	
4	2	0	4	4	1	
4	3	0	4	4	1	
4	4	1	4	4	1	

(2) С помощью некоторого изменения этих истинностных таблиц покажите также независимость формулы $p \supset . q \supset p$ как аксиомы исчисления P_S^i. [*Указание*: Чтобы сделать работу по механической проверке тавтологии минимальной, используйте как в части (1), так и в части (2) как можно больше рассуждений общего характера.]

26.9. Исследуйте независимость остальных аксиом (1) системы P_H и (2) системы P_S^i.

26.10. Рассмотрите систему истинностных значений 0, 1, ..., ν с 0 в качестве единственного выделенного истинностного значения и следующими истинностными таблицами для связок исчисления P_S^i: значение $p \supset q$ равно 0, если значение переменной p не меньше значения переменной q, и равно значению переменной q в противном случае; значение pq равно наибольшему из значений переменных p и q; значение $p \vee q$ равно наименьшему из значений переменных p и q; значение $p \equiv q$ равно 0, если значения переменных p и q равны между собой, и равно наибольшему из этих значений в противном случае; значение $\sim p$ равно 0, если значение p равно ν, и равно ν во всех остальных случаях. Покажите, что все теоремы исчисления P_S^i являются тавтологиями относительно этих истинностных таблиц.

26.11. Далее, покажите, что следующие законы не являются теоремами исчисления P_S^i: закон двойного отрицания; закон исключенного третьего; обратный закон контрапозиции; *закон косвенного доказательства*

$$\sim p \supset q \supset . \sim p \supset \sim q \supset p.$$

26.12. Следуя Курту Гёделю, покажите, используя те же истинностные таблицы, что выражение

$$[p_1 \equiv p_2] \vee [p_1 \equiv p_3] \vee \ldots \vee [p_1 \equiv p_n] \vee$$
$$[p_2 \equiv p_3] \vee \ldots \vee [p_2 \equiv p_n] \vee \ldots \vee [p_{n-1} \equiv p_n]$$

не является теоремой исчисления P_S^i (при любом n); далее, что эта пп-формула превращается в теорему исчисления P_S^i, если отождествить любые две ее переменные (т. е. если подставить одну ее переменную вместо всех вхождений другой ее переменной); наконец, что *не существует* такой *системы истинностных таблиц с конечным числом истинностных значений*, при которой не только все теоремы исчисления P_S^i были бы тавтологиями, но и все тавтологии были бы теоремами исчисления P_S^i [217].

26.13. С помощью теоремы дедукции (которая может быть доказана в исчислении P_S^i так же, как в исчислении P_2) покажите, что следующие выражения являются теоремами исчисления P_S^i:

$p \supset q \supset . \, p \supset \sim q \supset \sim p$. (*Закон приведения к абсурду.*)

$p \supset \sim \sim p$. (*Обратный закон двойного отрицания.*)

$\sim \sim \sim p \supset \sim p$. (*Закон тройного отрицания.*)

$p \supset q \supset . \sim q \supset \sim p$. (*Закон контрапозиции.*)

$\sim \sim . \, p \vee \sim p$. (*Слабый закон исключенного третьего.*)

$\sim . \, p \sim p$. (*Закон противоречия.*)

26.14. Пусть P_{Γ} — система, получающаяся добавлением закона исключенного третьего, $p \vee \sim p$, к исчислению $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ в качестве дополнительной аксиомы. Докажите †204 как теорему в исчислении P_{Γ}. Покажите, далее, что теоремы исчисления P_{Γ} совпадают с теоремами исчисления P_{H} и что поэтому, в силу результата упражнения 26.7, теоремы исчисления P_{Γ} совпадают с тавтологиями (соответствующими обычным двузначным истинностным таблицам, § 15).

26.15. Используя результаты упражнений 26.13 и 26.14, докажите следующий результат В. Гливенко: Если пп-формула **A** исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ является тавтологией в соответствии с обычными двузначными истинностными таблицами, то $\sim \sim \mathbf{A}$ — теорема исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$. Пп-формула $\sim \mathbf{A}$ исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ является теоремой исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ тогда и только тогда, когда она является тавтологией в соответствии с обычными двузначными истинностными таблицами.

26.16. Из результата упражнения 26.15 получите в качестве следствия следующий результат Гёделя [218] : пп-формула **A** исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$, в которой единственными связками являются конъюнкция и отрицание, есть теорема исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ в том и только в том случае, если она является тавтологией в соответствии с обычными двузначными истинностными таблицами.

26.17. Исследуйте независимость аксиом исчисления P_{Γ} (упражнение 26.14) и, в частности, покажите, что аксиома $p \supset \sim p \supset \sim p$ не независима.

26.18. Пусть $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{2}$ — система, которая получается из $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ заменой аксиомы $p \supset \sim p \supset \sim p$ следующими двумя аксиомами:

$$\sim . \, p \sim p;$$

$$p \supset q \supset . \sim q \supset \sim p.$$

(1) Покажите, что теоремы исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{2}$ совпадают с теоремами исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$. (2) Покажите, что теоремы исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{2}$, которые можно доказать без аксиомы $\sim p \supset . \, p \supset q$, совпадают с теоремами исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{m}}_{0}$. (3) Исследуйте вопрос о независимости аксиом исчисления $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{2}$.

26.19. Пусть P^{i}_{W} будет системой, которая получается из P^{p} добавлением f в качестве дополнительного исходного символа и $f \supset p$ в качестве дополнительной аксиомы. Пусть P^{m}_{J} — система, которая получается из P^{p} добавлением f в качестве дополнительного исходного символа и без добавления каких-либо дополнительных аксиом. Покажите, что *229 имеет место как метатеорема в системах P^{i}_{S} и P^{m}_{0}. (1) Выведите отсюда эквивалентность в смысле § 23 систем P^{i}_{S} и P^{i}_{W}. (2) Аналогично, докажите эквивалентность в смысле § 23 систем P^{m}_{0} и P^{m}_{J} [219].

26.20. Получите следующий результат (по существу — упомянутый в примечании 210 результат Колмогорова): если в некоторой теореме полного пропозиционального исчисления P_2, в которой нет связок, отличных от импликации и отрицания, заменить все вхождения каждой переменной **a** на ее двойное отрицание $\sim \sim \mathbf{a}$, то получающаяся формула будет теоремой минимального исчисления P^{m}_{0}.

26.21. Докажите эквивалентность системы P^{m}_{0} и системы P^{m}_{w}, которая получается из P^{m}_{0} заменой последней аксиомы (закона *приведения к абсурду*) на аксиому $p \supset \sim q \supset_{\blacksquare} q \supset \sim p$.

26.22. Для системы P^{P} покажите, что импликация может быть выражена через конъюнкцию и эквивалентность, в том смысле, что $p \supset q \equiv_{\blacksquare} p \equiv pq$ является теоремой этой системы.

26.23. Для системы P^{P} покажите в аналогичном смысле, что как импликация, так и конъюнкция могут быть выражены через дизъюнкцию и эквивалентность. Следовательно, дизъюнкция, эквивалентность и f составляют (в соответствующем смысле) полную систему независимых исходных связок исчисления P^{i}_{W} (см. 26.19) [220].

26.24. При помощи истинностных таблиц упражнения 26.10 при $\nu = 2$ покажите для системы P^{i}_{S}, что эквивалентность нельзя выразить через дизъюнкцию и отрицание. Из результата предыдущего упражнения следует поэтому, что дизъюнкция, эквивалентность и отрицание образуют (в соответствующем смысле) полную систему независимых исходных связок системы P^{i}_{S} [220].

27. Формулировки, использующие аксиомные схемы. Каждая из рассмотренных до сих пор формулировок пропозиционального исчисления базировалась на конечном числе аксиом, хотя программа § 07 допускает и бесконечное число аксиом, если только имеется эффективный метод, позволяющий для всякой пп-формулы выяснить, является ли она аксиомой или нет.

Если число аксиом бесконечно, то их, разумеется, нельзя выписать полностью и становится необходимым задать их (за исключением, быть может, конечного числа) с помощью одного или нескольких предложений синтаксического языка, каждое из которых вводит бесконечный класс аксиом. Такое предложение синтаксического языка всегда может быть переформулировано в виде правила вывода с пустым классом посылок, и в этом смысле различие между бесконечным и конечным числом аксиом иллюзорно. Более важным является различие между формулировками, которые в большей или меньшей степени опираются на синтаксические предложения (такие, как правила вывода), заменяющие отдельно сформулированные в языке-объекте аксиомы, — однако никаких четких границ здесь провести нельзя.

В некоторых случаях формулировки описываемого вида, т. е. опирающиеся на бесконечное число аксиом, имеют важные преимущества. В этом параграфе мы рассматриваем частный вид таких формулировок, а именно те, исходный базис которых содержит *аксиомные схемы*[221].

Аксиомная схема представляет бесконечное число аксиом при помощи выражения, содержащего синтаксические переменные, т. е. при помощи формы в смысле § 02, значениями которой являются пп-формулы[222]. Каждое значение этого выражения считается аксиомой. Для удобства мы будем указывать это, записывая само выражение наподобие аксиомы.

Примером формулировки пропозиционального исчисления с аксиомными схемами является следующая система P.

Исходные символы и пп-формулы в системе P — те же самые, что и в системе P_2 (§ 20). Аксиомы, множество которых бесконечно, задаются следующими тремя аксиомными схемами:

$$\mathbf{A} \supset_{\centerdot} \mathbf{B} \supset \mathbf{A};$$

$$\mathbf{A} \supset [\mathbf{B} \supset \mathbf{C}] \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{C};$$

$$\sim \mathbf{A} \supset \sim \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{B} \supset \mathbf{A}.$$

Единственным правилом вывода (если не считать за правила вывода аксиомные схемы) является правило *модус поненс*.

*270. Всякая теорема системы P есть теорема системы P_2.

Доказательство. Каждая аксиома системы P либо есть аксиома системы P_2, либо получается из некоторой аксиомы системы P_2 с помощью подстановки (*201) или одновременной подстановки (*210), а единственное правило вывода системы P является в то же время и правилом вывода системы P_2.

**271. Всякая теорема системы P_2 есть теорема системы P.

Доказательство. Так как всякая аксиома системы P_2 есть аксиома системы P и так как правила вывода, за исключением правила подстановки (*201), в обеих системах одни и те же, то нам достаточно показать, что правило подстановки является производным правилом вывода в системе P. Это делается следующим образом.

Пусть при каком-либо применении правила *модус поненс* большой посылкой является $\mathbf{C} \supset \mathbf{D}$, малой посылкой — $\mathbf{C}$, а заключением — $\mathbf{D}$. Если теперь подставить пп-формулу $\mathbf{B}$ вместо всех вхождений переменной $\mathfrak{b}$ в обе посылки и в заключение, то ввиду того, что

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{C} \supset \mathbf{D}|$$

есть та же пп-формула, что и

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{C}| \supset \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{D}|,$$

получающиеся три пп-формулы

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{C} \supset \mathbf{D}|, \quad \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{C}|, \quad \mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{D}|$$

также будут посылками и заключением некоторого применения правила *модус поненс*. Так как единственным правилом вывода системы P является *модус поненс* и так как результат подстановки пп-формулы $\mathbf{B}$ вместо всех вхождений переменной $\mathfrak{b}$ в некоторую аксиому системы P есть снова аксиома системы P, то мы можем получить доказательство пп-формулы

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$$

как теоремы системы P из доказательства пп-формулы $\mathbf{A}$ как теоремы P, если подставим пп-формулу $\mathbf{B}$ вместо всех вхождений переменной $\mathfrak{b}$ в каждую пп-формулу этого доказательства.

Этим завершается доказательство метатеоремы **271 [223]. Ее можно, разумеется, использовать как производное правило системы P, но мы отметили ее номером с двумя звездочками, как метатеорему системы P_2.

В качестве следствия из **271 мы получаем также следующую метатеорему системы P_2:

**272. Существует эффективный процесс, с помощью которого доказательство всякой теоремы системы P_2 можно преобразовать в другое доказательство той же теоремы системы P_2, в котором подстановка применяется только к аксиомам (т. е. каждая подстановка есть одна из цепи последовательных подстановок, применяемых к одной из аксиом исчисления P_2).

Мы выбрали систему P в качестве примера, потому что она тесно связана с теми формулировками функционального исчисления первого порядка, которые мы будем изучать в следующей главе. Однако ясно, что всякую формулировку пропозиционального исчисления или какой-либо частичной системы пропозиционального исчисления, правилами вывода которой являются *модус* *понене* и подстановка, можно переформулировать таким же образом, т. е. мы можем заменить каждую аксиому соответствующей аксиомной схемой и взять *модус понене* в качестве единственного правила вывода, получив при этом новую систему с теми же теоремами, что и в исходной системе.

Аналогичная переформулировка возможна и в тех случаях, когда правилами вывода являются подстановка и одно или несколько правил, сходных по характеру с правилом *модус понене*. Например, систему P_L из § 25 можно следующим образом переформулировать в виде системы $P_{I\sigma}$, теоремы которой совпадают с теоремами системы P_L. Единственным правилом вывода является правило: из $\mathbf{A} \mid {}_{\centerdot} \mathbf{B} \mid \mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{C}$. А аксиомами являются пп-формулы

$$\mathbf{A} \mid [\mathbf{B} \mid \mathbf{C}] \mid {}_{\centerdot}\, \mathbf{A} \mid [\mathbf{C} \mid \mathbf{A}] \mid {}_{\centerdot}\, \mathbf{D} \mid \mathbf{B} \mid {}_{\centerdot}\, \mathbf{A} \mid \mathbf{D} \mid {}_{\centerdot}\, \mathbf{A} \mid \mathbf{D},$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ — пп-формулы (взятые всеми возможными способами).

28. Расширенное пропозициональное исчисление и прототетика.

Расширенное пропозициональное исчисление Рассела и Лукасевича—Тарского[224] содержит, помимо обозначений пропозиционального исчисления, также *квантор всеобщности*, или *квантор существования*, или и тот и другой (ср. § 06), с пропозициональными переменными в качестве операторных переменных.

Исходные символы для формулировки расширенного пропозиционального исчисления можно выбрать различными способами, среди которых наиболее естественным может казаться добавление одного или обоих кванторов к исходным символам какой-нибудь формулировки пропозиционального исчисления. Однако ввиду того, что этот метод, будучи применен к системам P_1 или P_2, приводит к зависимости исходных связок и операторов, Лукасевич и Тарский предложили импликацию и квантор всеобщности в качестве исходных связки и оператора[225]. Другие связки и операторы вводятся затем с помощью определений. Например, могут быть даны следующие определения[226]:

$$f \rightarrow (s)s,$$
$$\sim \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \supset f,$$
$$(\exists c)\ \mathbf{A} \rightarrow \sim (c) \sim \mathbf{A},$$
$$t \rightarrow (\exists s)\ s,$$
$$[\mathbf{A} \supset_c \mathbf{B}] \rightarrow (c)\ [\mathbf{A} \supset \mathbf{B}].$$

Затем другие сентенциональные связки могут быть определены, как в § 11.

Принимая исходные связку и оператор Лукасевича—Тарского и приведенные выше определения, так же как и соглашение об опускании скобок, аналогичное соглашению § 11, мы можем привести следующие выражения в качестве примеров пп-формул (предложений или пропозициональных форм), которые в подразумеваемой интерпретации либо истинны, либо всегда принимают значение истина и которые поэтому должны были бы быть теоремами:

$$p \supset q \supset_q [q \supset r] \supset r;$$
$$p \supset q \equiv {}_{\centerdot}\, q \supset r \supset_r {}_{\centerdot}\, p \supset r;$$
$$pq \equiv {}_{\centerdot}\, p \supset [q \supset r] \supset_r r;$$
$$(p)\ (\exists q)\ (r)\ {}_{\centerdot}\, p \supset q \supset {}_{\centerdot}\, q \supset p \supset r.$$

Используя все те же исходные связку и оператор и опираясь на подразумеваемую интерпретацию, мы можем показать, что расширенное пропозициональное исчисление и формулировка P_1 пропозиционального исчисления эквивалентны друг другу в некотором смысле, подобном тому, в котором, как показано в § 23, эквивалентны друг другу системы P_1 и P_2. В самом деле, ясно, что $(\mathfrak{b})\mathbf{B}$ равносильно (в смысле § 02) конъюнкции $\mathbf{CD}$[227], где $\mathbf{C}$ получено из $\mathbf{B}$ подстановкой $f \supset f$ [т. е. $(s)s \supset (s)s$] вместо всех свободных вхождений переменной $\mathfrak{b}$, а $\mathbf{D}$ получено из $\mathbf{B}$ подстановкой f [т. е. $(s)s$] вместо всех свободных вхождений переменной $\mathfrak{b}$. Если нам дана некоторая пп-формула $\mathbf{A}$ расширенного пропозиционального исчисления, то мы можем повторно применять прием замены пп-частей $(\mathfrak{b})\mathbf{B}$ на только что описанную конъюнкцию $\mathbf{CD}$, учитывая при этом единственное ограничение, что заменяемая пп-часть $(\mathfrak{b})\mathbf{B}$ не должна быть пп-формулой $(s)s$. После достаточного числа повторений пп-формула $\mathbf{A}$ превратится в пп-формулу $\mathbf{A}_0$, в которой квантор всеобщности будет встречаться только в пп-частях $(s)s$. После замены всех вхождений $(s)s$ на исходный символ f системы P_1 формула $\mathbf{A}_0$ превратится в пп-формулу $\mathbf{A}_f$ системы P_1. Соответствие между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_f$ является много-однозначным соответствием между пп-формулами расширенного пропозиционального исчисления и пп-формулами системы P_1. В силу допущения (4) § 02, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_f$ равносильны. Поэтому из решения проблемы разрешения для системы P_1 мы получаем решение семантической проблемы разрешения для расширенного пропозиционального исчисления, а формулируя расширенное пропозициональное исчисление как логистическую систему, мы можем руководствоваться требованием, чтобы решение проблемы разрешения для доказуемости совпадало с решением семантической проблемы разрешения.

Прототетика Лесьневского[228] содержит, помимо обозначений расширенного пропозиционального исчисления, еще переменные, значениями которых являются истинностные функции (в смысле последнего абзаца § 05), например,

$$f^1,\ g^1,\ h^1,\ f_1^1,\ g_1^1,\ h_1^1,\ f_2^1,\ \ldots$$

в качестве переменных, область значений которых составляют сингулярные истинностные функции,

$$f^2,\ g^2,\ h^2,\ f_1^2,\ g_1^2,\ h_1^2,\ f_2^2,\ \ldots$$

в качестве переменных, область значений которых составляют бинарные истинностные функции,

$$f^3,\ g^3,\ h^3,\ f_1^3,\ g_1^3,\ h_1^3,\ f_2^3,\ \ldots$$

в качестве переменных, область значений которых составляют тернарные истинностные функции, и т. д. Далее, среди исходных символов имеются такие, которые предназначены для обозначения применения функции к ее аргументу или ее аргументам (см. § 03). Кроме того, допускается использование в качестве операторных переменных в кванторах не только пропозициональных переменных, но и переменных любого рода. Лесьневский допускает переменные и других типов, например переменные, значениями которых являются пропозициональные функции (от) истинностных функций. Они, однако, не играют, видимо, особо важной роли, и мы решаемся исключить их из прототетики, изменяя тем самым терминологию Лесьневского[229]. Наконец, Лесьневский допускает утверждение только предложений, но не пп-формул, содержащих свободные переменные (ср. конец § 06); однако с некоторой точки зрения эта особенность несущественна, и мы хотели бы предложить, чтобы имя *прототетика* применялось бы также к системам, в которых допускается утверждение пп-формул со свободными переменными или без них и которые во всем остальном сходны с системами Лесьневского.

За исходные символы в формулировке прототетики мы можем, помимо переменных различных видов и символов для обозначения применения функции к ее аргументу или ее аргументам, использовать импликацию в качестве исходной сентенциональной связки и квантор общности в качестве исходного оператора (допуская для него в качестве операторных переменных переменные любого вида). Мы можем также, как это обнаружил Тарский[230], заменить импликацию в качестве исходной связки (материальной) эквивалентностью.

Аналогично тому, как была доказана эквивалентность расширенного пропозиционального исчисления и системы P_1, может быть доказана эквивалентность — в сходном смысле — прототетики и расширенного пропозиционального исчисления, т. е., в конце концов, эквивалентность прототетики и пропозиционального исчисления. Вместо того, чтобы точно определять много-однозначное соответствие между пп-формулами прототетики и расширенного пропозиционального исчисления (что было бы очень долгим), мы просто поясним это соответствие несколькими примерами. Для пп-формулы[231] $(f^1) \,.\, p \supset (q)f^1(q) \equiv (q) \,.\, p \supset f^1(q)$ прототетики соответствующей пп-формулой расширенного пропозиционального исчисления является конъюнкция четырех следующих пп-формул[232]:

$$p \supset (q)t \equiv (q) \,.\, p \supset t;$$
$$p \supset (q)q \equiv (q) \,.\, p \supset q;$$
$$p \supset (q) \sim q \equiv (q) \,.\, p \supset \sim q;$$
$$p \supset (q)f \equiv (q) \,.\, p \supset f.$$

Далее, для пп-формулы $(f^2) \,.\, p \equiv q \supset (r) \,.\, f^2(p, r) \equiv f^2(q, r)$ прототетики соответствующей пп-формулой расширенного пропозиционального исчисления является конъюнкция шестнадцати других пп-формул, которые мы не будем выписывать и среди которых имеются, например, следующие:

$$p \equiv q \supset (r) \,;\, t \equiv t;$$
$$p \equiv q \supset (r) \,.\, p \vee r \equiv q \vee r;$$
$$p \equiv q \supset (r) \,.\, p \subset r \equiv \,.\, q \subset r;$$
$$p \equiv q \supset (r) \,.\, p \equiv q;$$
$$p \equiv q \supset (r) \,.\, p \supset r \equiv \,.\, q \supset r;$$
$$p \equiv q \supset (r) \,.\, r \equiv r.$$

Для пп-формулы (скажем) $(f^3)\mathbf{B}$ прототетики, где $\mathbf{B}$ содержит f^3 только в качестве свободной переменной и не содержит других истинностно-функциональных переменных, соответствующая пп-формула расширенного пропозиционального исчисления была бы конъюнкцией 256 других пп-формул (так как имеется 256 различных тернарных истинностных функций и нам уже необходимо воспользоваться каким-либо систематическим методом для того, чтобы для каждой из них выписать пропозициональную форму, которая имела бы данную функцию своей присоединенной функцией[233]). Если данная пп-формула в целом (имеется в виду именно вся данная пп-формула, а не какая-либо ее пп-часть) содержит свободные истинностно-функциональные переменные, то сначала нужно эти переменные связать кванторами всеобщности, приписывая их слева к формуле, а затем уже применить указанный прием получения соответствующей пп-формулы расширенного пропозиционального исчисления.

Как расширенное пропозициональное исчисление, так и прототетика или какая-либо ее модифицированная форма[234] войдут, подобно пропозициональному исчислению, как части в более обширные логические системы, которые будут рассмотрены в дальнейшем, в частности, в функциональное исчисление второго или более высоких порядков. Однако в том изложении этих систем, которому мы будем следовать, расширенное пропозициональное исчисление и прототетика не играют той фундаментальной роли, которую играет пропозициональное исчисление. Поэтому мы ограничились в этом параграфе кратким обзором.

Упражнения к § 28

28.0. Используя указанное в тексте решение проблемы разрешения, проверьте четыре пп-формулы расширенного пропозиционального исчисления, которые приведены в качестве примеров истинных предложений или форм, всегда принимающих значение истина. (Чтобы сократить работу, используйте, конечно, где только возможно, известные результаты, относящиеся к пропозициональному исчислению.)

28.1. Таким же образом проверьте, что следующие пп-формулы прототетики всегда принимают значение истина[231]:

(1)[235] $p \equiv q \supset \boldsymbol{.}\, f(p) \equiv f(q).$

(2) $p \equiv q \equiv (f)\, \boldsymbol{.}\, f(p) \supset f(q).$

(3)[236] $pq \equiv (f)\, \boldsymbol{.}\, p \equiv \boldsymbol{.}\, f(p) \equiv f(q).$

(4) $f(p, p) \supset \boldsymbol{.}\, f(p, \sim p) \supset (q) f(p, q).$

(5) $g(p) \equiv g(t)\, p \vee g(f) \sim p.$ (*Булев закон развертывания*[237].)

(6) $g(p, q) \equiv g(t, t) pq \vee g(t, f) p \sim q \vee g(f, t) \sim pq \vee g(f, f) \sim p \sim q.$

(*Булев закон развертывания по двум переменным.*[237])

(7) $(\exists q)(p)\, \boldsymbol{.}\, f(g(p)) \equiv g(f(p)) \equiv q.$

(8)[238] $pq \equiv (f)\, \boldsymbol{.}\, f(p, q) \equiv f(t, t).$

(9)[238] $pq \equiv (f)\, \boldsymbol{.}\, f(p, q) \equiv f(q, p \equiv q).$

28.2. Используя указанное в тексте решение проблемы разрешения, докажите для основанной на исходном базисе Лукасевича—Тарского формулировки расширенного пропозиционального исчисления принцип дуальности, аналогичный принципу дуальности *161 для пропозиционального исчисления.

28.3. Докажите принцип дуальности также для формулировки прототетики, в которой единственной исходной связкой является импликация, а единственным исходным оператором—квантор всеобщности.

29. Исторический очерк. *Алгебра логики* возникла в 1847 г. [239] в работах Буля и Де Моргана [240]. Это была вначале алгебра, или исчисление классов, к которой затем была присоединена аналогичная алгебра отношений [241]. Настоящее пропозициональное исчисление с этой точки зрения впервые появляется, по-видимому, в работах Хью Мак-Кола начиная с 1877 г. [242], хотя оно и было предвосхищено в исследовании Буля о „Secondary Propositions".

Логистический метод впервые применил в 1879 г. Фреге в своем *Begriffsschrift*. В этой работе содержится, в частности, первая формулировка пропозиционального исчисления в виде логистической системы, а именно системы P_F из упражнения 23.6. Лукасевичу [243] принадлежит использованная нами в этой главе (§ 20) система P_2, являющаяся упрощением формулировки Фреге.

Однако работа Фреге еще долгое время после ее опубликования не встречала понимания и не пользовалась признанием, а пропозициональное исчисление развивалось на основе более старой точки зрения, как это можно видеть в работах Пирса, Эрнста, Шредера, Джузеппе Пеано и других. Начало некоторых перемен (хотя и не сам логистический метод) заметно в работах Пеано и его школы. Из этого источника почерпнуты многие ранние идеи Уайтхеда и Бертрана Рассела; впоследствии они познакомились с более глубокой работой Фреге и были, возможно, первыми, признавшими ее значение [244].

Первым, кто вслед за Фреге рассматривал пропозициональное исчисление с помощью логистического метода, был Рассел. Некоторые указания на такой подход можно найти в *The Principles of Mathematics* (1903). В этой работе рассматривается скорее расширенное пропозициональное исчисление (§ 28), а не пропозициональное исчисление; однако, учитывая определенные изменения в свете последующего развития, из рассуждений Рассела можно извлечь следующие аксиомы частичной системы $\mathrm{P}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{IK}}$ пропозиционального исчисления, в которой исходными связками являются импликация и конъюнкция, а правилами вывода — правило *модус поненс* (явно сформулированное Расселом) и правило подстановки (имеющееся неявно):

$$pq \supset p;$$
$$[p \supset q][q \supset r] \supset .\, p \supset r;$$
$$p \supset [q \supset r] \supset .\, pq \supset r;$$
$$pq \supset r \supset .\, p \supset .\, q \supset r;$$
$$[p \supset q]\,[p \supset r] \supset .\, p \supset qr;$$
$$p \supset q \supset \;\; p \supset p.$$

В 1906 г. [224] как часть расселовского исследования расширенного пропозиционального исчисления появилась формулировка P_{r} пропозиционального исчисления, в которой исходными связками были импликация и отрицание, правилами вывода — *модус поненс* и подстановка, а аксиомами —

$$p \supset p;$$
$$p \supset .\, q \supset p;$$
$$p \supset q \supset .\, q \supset r \supset .\, p \supset r;$$
$$p \supset [q \supset r] \supset .\, q \supset .\, p \supset r;$$
$$\sim \sim p \supset p;$$
$$p \supset \sim p \supset \sim p;$$
$$p \supset \sim q \supset .\, q \supset \sim p.$$

Формулировка P_R пропозиционального исчисления (§ 25) была опубликована Расселом в 1908 г. [245] и затем вновь использована Уайтхедом и Расселом в *Principia Mathematica* в 1910 г. Она может быть упрощена до системы P_B простым отбрасыванием аксиомы, зависимость которой от остальных обнаружил Пауль Бернайс [246]. Другими упрощениями являются система P_N, предложенная Нико [247], и система P_G, предложенная Гётлиндом и Расёвой [248].

В 1879 г. Фреге еще не дал формулировки правила подстановки, но она появляется уже в явном виде в *Grundgesetze der Arithmetik*, том 1 (1893) в связи с другой системой. Впервые специфичная для пропозиционального исчисления формулировка правила подстановки встречается у Луи Кутюра в *Les Principes des Mathématiques* (1905); его формулировка, однако, недостаточна, так как из нее еще не ясно, что выражение, подставляемое вместо (пропозициональной) переменной, само может содержать переменные. Рассел дал более удовлетворительную формулировку этого правила в 1906 г., но опустил его в 1908 г. А в *Principia Mathematica* авторы придерживались той точки зрения, что правило подстановки не может быть сформулировано; они писали: „Опознавание какого-либо предложения в качестве частного случая некоторого общего предложения, доказанного ранее, ... не может быть само возведено в общее правило". Это как будто показывает, что Уайтхед и Рассел отказались от метода Фреге синтаксически формулировать правила вывода или, быть может, даже никогда не принимали его полностью. Однако в 1913 г. Льюис в работе, непосредственно связанной с *Principia Mathematica*, явно сформулировал правило подстановки для предложенной им системы строгой импликации ⟨Strict Implication⟩ [249], а в *Survey of Symbolic Logic* (1918) дополнил этим правилом также и систему из *Principia*. Позднее Рассел в *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) признал, что от сутствие в *Principia* формулировки правила подстановки для пропозиционального исчисления является упущением.

Прием использования аксиомных схем, как в § 27, которое делает ненужным правило подстановки, был введен Джоном фон Нейманом [250].

Мак-Кол называл пропозициональное исчисление „calculus of equivalent statements". В Германии Шрёдером в 1890 и 1891 гг. было введено имя „Aussagenkalkul". Быть может, в качестве перевода этого имени Рассел использовал в 1903 г. и затем вновь в 1906 г. термин „propositional calculus", хотя, по крайней мере в 1903 г., он применял это имя не по отношению к собственно пропозициональному исчислению, а скорее по отношению к расширенному пропозициональному исчислению (в согласии с терминологией, общепринятой в настоящее время). Кутюра [251] переводит термин Рассела „propositional calculus" на французский язык как „calcul des propositions", однако он в то же время так изменяет метод Рассела, что это имя оказывается примененным к чистому пропозициональному исчислению. Термин „calculus of propositions" был использован Льюисом в серии статей начиная с 1912 г. и в *A Survey of Symbolic Logic* (1918). С тех пор термин „propositional calculus" или „calculus of propositions" стал общепринятым в том смысле или почти в том смысле, в котором мы использовали первый из них [252].

Формулировка пропозиционального исчисления, использующая одну-единственную аксиому, была предложена Нико в январе 1917 г. [253] — система P_n из § 25. Ее модификациями, также использующими только по одной аксиоме, являются системы P_w Вайсберга [254] и P_L Лукасевича [255]. Все эти три системы используют в качестве исходной связки штрих Шеффера (антиконъюнкцию) и более сильное, чем *модус поненс*, правило вывода.

Относительно формулировок пропозиционального исчисления с одной аксиомой и правилами *модус поненс* и подстановки в качестве единственных правил вывода см. исторический обзор Лукасевича и Тарского в статье, упомянутой в примечании 243. Из них система $P_Ł$ (упражнение 23.7) принадлежит Лукасевичу и опубликована в той же статье; система $P_ł$ (23.8) принадлежит также Лукасевичу (приписана ему в одной из статей Болеслава Собоцинского [256]); наконец, система P_S (23.9) получается по методу Собоцинского [256] из единственной аксиомы, приведенной в упражнении 18.4 для импликативного пропозиционального исчисления (система $P^I_Ł$), также принадлежащего Лукасевичу [257].

Другой формулировкой импликативного пропозиционального исчисления является система P^I_B из упражнения 18.3, принадлежащая Тарскому и Бернайсу [258]. Вайсберг показал [259], что если в качестве правил вывода брать все время *модус поненс* и подстановку, то полная формулировка импликативного пропозиционального исчисления превращается в полную формулировку (всего) пропозиционального исчисления с импликацией и f в качестве исходных связок при условии добавления $f \supset p$ в качестве дополнительной аксиомы. Система P_W (12.7) получается таким образом из системы P^I_B, а система P_λ (§ 26) получается тем же самым путем из $P^I_Ł$.

Так как Лесьневский пользовался определениями типа (3) из примечания 168 и выражал поэтому определения как в пропозициональном исчислении, так и в прототетике в виде (материальных) эквивалентностей, то он особенно интересовался эквивалентностью как исходной связкой [260]. Лесьневский дал первую формулировку частичного пропозиционального исчисления с эквивалентностью в качестве единственной исходной связки (в которой все тавтологии, выраженные в этой связке, были теоремами)[261]. Другими формулировками такого вида являются система P^E_W из упражнения 26.0, предложенная Вайсбергом[262], и системы с единственной аксиомой — P^E_w из 26.3 (1) Вайсберга и $P^E_Ł$ из 26.3(2) Лукасевича[263]. Система P^{EN} из 26.4 с эквивалентностью и отрицанием в качестве исходных связок принадлежит Михаилеску[264].

Возвращаясь к формулировкам полного ⟨full⟩ пропозиционального исчисления, мы укажем еще систему $P_Λ$ Лукасевича, в которой исходными связками являются импликация и отрицание, а правилами вывода — *модус поненс* и подстановка и которая содержит следующие три аксиомы:

$$p \supset q \supset . q \supset r \supset . p \supset r;$$
$$\sim p \supset p \supset p;$$
$$p \supset . \sim p \supset q.$$

Доказательство полноты системы $P_Λ$ (не совпадающее с исследованием этой системы, проведенным Лукасевичем[265]) намечено ниже в упражнении 29.2.

В противоположность таким формулировкам, как $P_λ$ и $P_Λ$, в которых главное внимание обращается на экономность, формулировки пропозиционального исчисления, предложенные Гильбертом[266], предназначены для выделения ролей различных связок, хотя и за счет неэкономности и потери независимости исходных связок. К этому типу относится система P_H (§ 26), являющаяся одной из родственных друг другу систем такого вида, приведенных Гильбертом и Бернайсом в первом томе их „*Grundlagen der Mathematik*" (1934)[267].

Отбрасывая от системы P_H отрицание и единственную аксиому, содержащую отрицание, мы получаем формулировку P^P того, что Гильберт и Бернайс называют „positive Logik", или *позитивным пропозициональным исчислением*. Здесь имеется в виду та часть пропозиционального исчисления, которая в некотором смысле независима от существования отрицания (например, закон Пирса не является в ней теоремой). Отбрасывая все связки, кроме импликации, и все аксиомы, содержащие такие связки, мы получаем формулировку P^+ *позитивного импликативного пропозиционального исчисления*.

Такая система, как P_H, имеет также то преимущество (указанное Гильбертом и Бернайсом), что представляет в очень удобной форме связь между полным ⟨full⟩ пропозициональным исчислением и интуиционистским пропозициональным исчислением. Так, системы P^i_S и P^m_0 из § 26 получены добавлением отрицания и соответствующих аксиом, содержащих отрицание, к системе P^P, т. е., другими словами, изменением только аксиом отрицания системы P_H. Формулировка P^i_S интуиционистского пропозиционального исчисления принадлежит Генриху Шольцу и Карлу Шрётеру [268]. Формулировка P^i_W интуиционистского пропозиционального исчисления (использующая f в качестве исходной связки вместо отрицания и добавляющая к системе P^p аксиому $f \supset p$) была предложена Вайсбергом [269], однако и Герхард Генцен [270] сделал сходное замечание относительно возможности использования f вместо отрицания при построении интуиционистского пропозиционального исчисления.

Формулировка P_{Γ} (26.14) полного пропозиционального исчисления может быть приписана В. Гливенко на основании сделанного им замечания, что формулировка полного пропозиционального исчисления получается из формулировки интуиционистского пропозиционального исчисления добавлением в качестве дополнительной аксиомы одного только закона исключенного третьего [271].

В литературе встречаются многие другие формулировки пропозиционального исчисления и частичных систем пропозиционального исчисления. В настоящем параграфе мы упоминаем только те из них, которые либо были нами действительно использованы в тексте или в упражнениях, либо представляют особый интерес, либо имеют историческое значение.

Табличная разрешающая процедура для пропозиционального исчисления (ср. § 15) была применена (неформальным образом) к некоторым специальным случаям Фреге в его *Begriffsschrift* в 1879 г. (в связи с импликацией и отрицанием в качестве исходных связок). Спустя шесть лет Пирс [272] впервые использовал ее в качестве общей разрешающей процедуры (в связи с импликацией и антиимпликацией в качестве исходных связок). Своим современным развитием этот метод в значительной степени обязан работам Лукасевича [273] и Поста [274]. Термин *тавтология* введен Витгенштейном [275].

Используя три истинностных значения вместо двух и истинностные таблицы в этих трех истинностных значениях, Лукасевич первый ввел в 1920 г. трехзначное пропозициональное исчисление [276] (ср. § 19). Он пришел к этому из соображений относительно модальности, согласно которым в дополнение к истине и лжи следует рассматривать еще третье истинностное значение — возможность, или, лучше, случайность; однако абстрактное значение этого нового исчисления выходит далеко за пределы всевозможных частных идей такого рода. Обобщение пропозиционального исчисления до исчисления с $\nu + 1$ истинностными значениями, среди которых $\mu + 1$ являются выделенными ($1 \leqslant \mu < \nu$), было проведено Постом в 1921 г. [277] независимо от Лукасевича и с чисто абстрактной точки зрения. Впоследствии, как утверждает Лукасевич, в 1922 г., он независимо от Поста обобщил свое трехзначное пропозициональное исчисление и построил более высокие многозначные пропозициональные исчисления, однако это было опубликовано лишь в 1929 и 1930 гг. [278]. Исчисления Лукасевича отличаются от исчисления Поста тем, что содержат только одно выделенное истинностное значение и не являются *полными* ⟨*full*⟩ (т. е. не всякая истинностная функция в этих ν истинностных значениях может быть представлена формой, которая имела бы ее своей присоединенной функцией). Если же многозначные пропозициональные исчисления Лукасевича дополнить до полных пропозициональных исчислений с помощью метода Слупецкого[279], то они становятся частными случаями исчислений Поста. Вайсберг указал для трехзначного пропозиционального исчисления Лукасевича исходный базис (в частности, аксиомы и правила вывода), который превратил это исчисление в логистическую систему[280], а Тарский и Лукасевич утверждают, что то же самое может быть сделано для всех конечнозначных пропозициональных исчислений Лукасевича. Для *полных* ⟨*full*⟩ многозначных пропозициональных исчислений базисы были указаны Слупецким[279]. Позднее вопрос об исходных базисах для конечнозначных пропозициональных исчислений (и функциональных исчислений) был исследован Расселом и Тюркеттом в серии статей в *The Journal of Symbolic Logic*. Лукасевич ввел также бесконечнозначное пропозициональное исчисление, однако вопрос об исходном базисе для него остается как будто бы до сих пор открытым.

Метод использования многозначных истинностных таблиц (с одним или несколькими выделенными значениями) для доказательства независимости аксиом пропозиционального исчисления был введен Бернайсом в его *Habilitationsschrift* от 1918 г., но не был опубликован до 1926 г. [281] Эта идея была также найдена Лукасевичем, но опубликована им не была. Хантингтон заметил, что этот метод может быть распространен на правила вывода[282]. Использованный в § 19 метод доказательства независимости правила подстановки принадлежит Бернайсу (и был сообщен им автору в 1936 г.).

Результаты независимости из задачи 26.11 и использованная для их получения трехзначная истинностная таблица принадлежат Гейтингу[283]. Результат из 26.12 и многозначная истинностная таблица из 26.10 (за исключением случаев $\nu = 1, 2$) принадлежат Гёделю[284].

Доказательства непротиворечивости и полноты пропозиционального исчисления, основанные на использовании истинностных таблиц, были впервые даны Постом[285]. С тех пор был опубликован целый ряд различных доказательств полноты пропозиционального исчисления, из которых мы укажем здесь только на доказательства Кальмара[286] и Куайна[287]. Куайн использует формулировку P_W пропозиционального исчисления с импликацией и f в качестве исходных связок. Формулировка P_1 пропозиционального исчисления, принадлежащая Вайсбергу[288], соединяет в себе некоторые свойства систем P_2 и P_W, а метод, с помощью которого мы в главе I доказали полноту системы P_1, является применением к данному случаю метода Кальмара. В частности, у Кальмара взяты, с очевидными изменениями, метод доказательства метатеоремы *152 (на которую существенно опирается доказательство полноты в § 18), идея использования метатеоремы * 151 в качестве леммы для *152 и метод доказательства метатеоремы *151.

Доказательство полноты для импликативного пропозиционального исчисления было опубликовано Вайсбергом[289] (более раннее доказательство полноты, принадлежащее Тарскому, не было, видимо, опубликовано). Указанный в 18.3 метод доказательства полноты импликативного пропозиционального исчисления принадлежит в общих чертах Кальмару [286], однако идея использования пропозициональной переменной вместо f взята у Вайсберга [289], а решающая идея взять в качестве $\mathbf{B}'$ выражение $\mathbf{B} \supset r \supset r$ (вместо $\mathbf{B}$) в тех случаях, когда значением $\mathbf{B}$ является t, так же как соответствующие изменения различных мест доказательств аналогов метатеорем *151 и *152, была сообщена автору Леоном Хенкиным в июле 1948 г.

Приведенное в § 23 доказательство эквивалентности систем P_2 и P_1 во многих случаях следует доказательству, использованному для аналогичных целей Вайсбергом [289].

Теорема дедукции (§ 13) не является специфической особенностью пропозиционального исчисления, а имеет аналоги во многих других логистических системах (в частности, в функциональном исчислении первого и более высоких порядков, как мы увидим в следующих главах). Идея теоремы дедукции и первое ее доказательство для частичной системы должны быть приписаны Эрбрану [290]. Тарскому принадлежит формулировка этой теоремы в виде общего методологического принципа для логистических систем [291]. Термин „deduction theorem" ⟨„теорема дедукции"⟩ является переводом немецкого термина „Deductionstheorem" Гильберта и Бернайса [292].

Идея использовать теорему дедукции в формулировках пропозиционального или функционального исчисления в качестве исходного правила вывода была независимо выдвинута Яськовским [293] и Генценом [294]. Такое исходное правило носит менее простой характер, чем это обычно принято (ср. примечание 181), и оно было бы неприемлемо для *логистической системы*, определенной так, как мы это сделали в § 07. Однако можно считать, что этот недостаток частично возмещается известной естественностью метода; действительно, принять теорему дедукции в качестве исходного правила вывода — это равносильно формальному признанию обычного неформального приема (принятого особенно в математических рассуждениях), когда для доказательства импликации делается предположение и выводится следствие.

При этом использование теоремы дедукции в качестве исходного или производного правила вывода нельзя смешивать с использованием *секвенций* ⟨*Sequenzen*⟩ у Генцена [295] (ср. дальше упражнения 39.10—39.12), так как его стрелка $\rightarrow$ не аналогична нашему синтаксическому знаку $\vdash$, а относится к его языку-объекту (как это ясно следует из того факта, что выражения, содержащие стрелку, встречаются в качестве посылок и заключений в применениях его правил вывода). Мы без труда могли бы ввести секвенции в связи с системой P_1 с помощью следующих определений-схем [296]:

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n \rightarrow$$
$$\rightarrow \mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_n \supset f,$$
$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \ldots,\ \mathbf{B}_m$$
$$\rightarrow \mathbf{A}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{A}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{B}_m,$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ и где в обоих случаях предполагается, что сокращение может быть применено только к целой утверждаемой пп-формуле (и никогда не может быть применено к пп-части утверждаемой пп-формулы). Таким способом мы получили бы все формальные свойства генценовских *секвенций* и, в частности, могли бы несколько более удобно сформулировать производные правила из 14.9.

Сами по себе производные правила из 14.9 (как альтернативная замена к использованию теоремы дедукции) следует приписать Фреге, так как в первом томе своей *Grudgesetze der Arithmetik* (1893) он пользуется очень сходными по свойствам и по применению правилами.

Производное правило подстановочности эквивалентности (*159) и связанные с ним метатеоремы из 15.2 были доказаны для пропозиционального исчисления, а именно для системы $\mathrm{P_R}$, Постом [297]. Родственная метатеорема *229 (в которой эквивалентность заменена двумя импликациями) была получена для импликативного пропозиционального исчисления Вайсбергом [298].

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (24.9) может быть отнесена к булевскому закону развертывания (28.1 (5), (6)), и на этой основе она использована Шрёдером в *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (1877). Как совершенная дизъюнктивная нормальная форма, так и дуальная к ней *совершенная конъюнктивная нормальная форма* были введены в 1880 г. Пирсом [299]. Шрёдер и Пирс строят нормальные формы для исчисления классов, однако распространение на пропозициональное исчисление получается непосредственно.

Принцип дуальности следует приписать Шрёдеру, который использует его для исчисления классов в только что упомянутой работе *Operationskreis* и затем вновь в *Algebra der Logic*. Шрёдер не распространяет принцип дуальности на пропозициональное исчисление, однако такое распространение является очевидным и, по-видимому, подразумевалось различными более поздними авторами, не будучи специально сформулировано (например, у Уайтхеда, Кутюра, Шеффера). Генрих Бэман в статье, упомянутой в примечании 299, явно сформулировал принцип дуальности в такой форме, которая соответствует метатеореме *165 не только для пропозиционального исчисления, но, в действительности, и для функционального исчисления первого и второго порядка (где к сентенциональным связкам добавлены еще кванторы — см. ниже, главы III—V); а Гильберт и Аккерман в первом издании своей *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928) доказывают аналоги метатеорем *164 и *165 для пропозиционального исчисления и для функционального исчисления первого порядка. Однако принцип дуальности, относящийся к кванторам, появляется уже в третьем томе *Algebra der Logik* Шрёдера.

Упражнения к § 29

29.0. (1) Докажите полноту системы P_Γ, доказывая как теоремы аксиомы какой-либо формулировки пропозиционального исчисления, которая имеет те же исходные связки и те же правила вывода и полнота которой уже известна. (2) Исследуйте независимость аксиом системы P_Γ.

29.1. (1) Докажите полноту частичной системы P_R^{IK} пропозиционального исчисления. (Ср. с 18.3.) (2) Исследуйте независимость аксиом системы P_R^{IK}.

29.2. Докажите полноту системы P_Λ, доказывая (последовательно) следующие теоремы системы P_Λ и используя затем результат упражнения 12.7:

$$\sim p \supset q \supset [\sim q \supset q] \supset_{\centerdot} p \supset_{\centerdot} \sim q \supset q;$$
$$\sim q \supset \sim p \supset_{\centerdot} p \supset_{\centerdot} \sim q \supset q;$$
$$\sim q \supset \sim p \supset_{\centerdot} \sim q \supset q \supset q \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$q \supset_{\centerdot} \sim q \supset q \supset q \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$p \supset_{\centerdot} \sim q \supset q \supset q;$$
$$\sim q \supset q \supset q \supset [p \supset q] \supset_{\centerdot} \sim [p \supset q] \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$\sim q \supset q \supset q \supset [p \supset q] \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$q \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$\sim q \supset \sim p \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$\sim p \supset_{\centerdot} p \supset q;$$
$$p \supset q \supset p \supset p.$$

29.3. Используя метод истинностных таблиц, докажите независимость трех аксиом и правила *модус поненс* в системе P_Λ. (За исключением случая первой аксиомы, достаточна система двух истинностных значений.)

29.4. Используйте результат упражнения 29.2 для доказательства полноты системы P_j пропозиционального исчисления, в которой исходные связки и правила вывода — те же самые, что и в системе P_H (см. § 26), а аксиомами являются девять следующих:

$$p \vee q \equiv . \, p \supset q \supset q;$$
$$p \supset q \supset . \, q \vee . \, p \supset r;$$
$$p \equiv q \supset . \, p \supset q;$$
$$p \equiv q \vee . \, q \vee p;$$
$$p \supset . \, q \equiv p \equiv q;$$
$$p \supset . \, pq \equiv q;$$
$$p \supset . \, q \supset . \, r \supset p;$$
$$p \equiv \sim p \supset q;$$
$$pq \supset p.$$

[Эта система, минимизирующая длину отдельных аксиом, а не общее их число, принадлежит Станиславу Яськовскому и опубликована им в *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, **1**, № 1 (1948).]

29.5. Исследуйте независимость аксиом системы P_j.

ГЛАВА III

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Функциональное исчисление первого порядка содержит или может содержать, помимо обозначений пропозиционального исчисления, еще *индивидные переменные*, кванторы с индивидными переменными в качестве операторных переменных (ср. § 06), *индивидные константы, функциональные переменные, функциональные константы*.

Многочисленные функциональные исчисления первого порядка различаются между собой тем, какие именно из этих символов в них вводятся. Однако индивидные переменные включаются в них всегда, а также всегда включаются либо какие-нибудь функциональные переменные, либо какие-нибудь функциональные константы. Кроме того, всегда включаются один или большее число кванторов — либо квантор общности, либо один или несколько других кванторов, которые (взятые вместе, при наличии других исходных обозначений) *дефиниционально эквивалентны* квантору общности в том смысле, что их можно получить из квантора общности, а квантор общности можно получить из них с помощью определений сокращения (ср. § 11 и примечание 168), воспроизводящих требуемые формальные свойства. Пропозициональные переменные могут и не быть включенными в функциональное исчисление, однако в нем должна иметься полная система исходных связок пропозиционального исчисления или же что-нибудь такое, из чего такая полная система сентенциональных связок может быть получена с помощью определений сокращения, воспроизводящих требуемые формальные свойства.

В этой главе мы изучаем некоторую частную формулировку любого из функциональных исчислений первого порядка, так как различные формулировки настолько подобны друг другу по своему построению, что их можно рассматривать одновременно без каких-либо смешений или неудобств. Там, где нет нужды уточнять, какое именно из многочисленных функциональных исчислений первого порядка имеется в виду, мы говорим просто о „функциональном исчислении первого порядка". Частная формулировка так понимаемого функционального исчисления первого порядка, изучаемая в этой главе, называется „F^1". Одним из функциональных исчислений первого порядка является *чистое функциональ-*

ное исчисление первого порядка (рассмотренное ниже в § 30), и мы называем нашу формулировку этого исчисления „F^{1p}". Таким образом, „F^1" — любая из различных логистических систем, одной из которых является F^{1p}.

В главе IV мы продолжим рассмотрение чистого функционального исчисления первого порядка, вводя, в частности, другую возможную его формулировку — F^{1p}_2.

30. Исходный базис исчисления F^1. Исходными символами в F^1 являются восемь несобственных символов

$$[\ \supset\ ]\ \sim\ (\ ,\ )\ \forall$$

и бесконечный перечень индивидных (предметных) переменных

$$x\ y\ z\ x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2\ldots,$$

а также некоторые — или все — из перечисленных ниже символов: бесконечный перечень пропозициональных переменных

$$p\ q\ r\ s\ p_1\ q_1\ r_1\ s_1\ p_2\ldots;$$

далее, для каждого положительного целого n бесконечный перечень n-арных (или n-местных) функциональных переменных, а именно: бесконечный перечень сингулярных (или одноместных) функциональных переменных

$$F^1\ G^1\ H^1\ F^1_1\ G^1_1\ H^1_1\ F^1_2\ldots,$$

бесконечный перечень бинарных (или двуместных) функциональных переменных

$$F^2\ G^2\ H^2\ F^2_1\ G^2_1\ H^2_1\ F^2_2\ldots$$

и т. д. Затем произвольное число индивидных (предметных) констант, произвольное число сингулярных (или одноместных) функциональных констант, произвольное число бинарных (или двуместных) функциональных констант, произвольное число тернарных (или трехместных) функциональных констант и т. д. При этом, однако, в число исходных символов обязательно входит либо один из бесконечных перечней функциональных переменных, либо по меньшей мере одна функциональная константа [300]. Мы не уточняем конкретные символы, которые должны употребляться в качестве функциональных констант, а позволяем вводить их по мере надобности, соблюдая при этом требования (B) и (I) из § 07 [относительно (B) см. также примечание 113].

Для каждой категории переменных порядок, в котором они приведены выше, называется их *алфавитным порядком.*

Правилами построения в F^1 являются:

30i. Отдельно взятая пропозициональная переменная есть ппф[301].

30ii. Если $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная или n-арная функциональная константа и если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ суть индивидные переменные, или индивидные константы, или и то и другое (не обязательно все различные), то $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ есть ппф.

30iii. Если $\mathbf{\Gamma}$ есть ппф, то $\sim \mathbf{\Gamma}$ есть ппф.

30iv. Если $\mathbf{\Gamma}$ и Δ суть ппф, то и $[\mathbf{\Gamma} \supset \Delta]$ есть ппф.

30v. Если $\mathbf{\Gamma}$ есть ппф и $\mathbf{a}$ является индивидной переменной, то $(\forall \mathbf{a})\mathbf{\Gamma}$ есть ппф.

Формула исчисления F^1 является пп-формулой тогда и только тогда, когда это следует из правил построения. Как и в случае исчислений P_1 и P_2 (см. §§ 10, 20), из этого обстоятельства для всякой данной частной системы F^1 следует эффективный метод проверки правильности построения. Доказательство этого предоставляется читателю.

Пп-части $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ пп-формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ называются ее *антецедентом* и *консеквентом* соответственно, а вхождение знака $\supset$ между ними называется *главным знаком импликации*. Утверждение единственности антецедента, консеквента и главного знака импликации всякой пп-формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ является частью метатеоремы **312 следующего параграфа.

Конверсией формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ является пп-формула $[\mathbf{B} \supset \mathbf{A}]$, получаемая взаимной заменой антецедента и консеквента. *Конверсией* формулы $(\forall \mathbf{a}_1)(\forall \mathbf{a}_2)\ldots(\forall \mathbf{a}_n)[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ служит

$$(\forall \mathbf{a}_1)(\forall \mathbf{a}_2)\ldots(\forall \mathbf{a}_n)[\mathbf{B} \supset \mathbf{A}].$$

Элементарными частями пп-формулы являются такие ее части, которые правильно построены в соответствии с 30i или 30ii, т. е. это такие правильно построенные части, которые имеют либо вид отдельной пропозициональной переменной, либо вид $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, где $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная или константа, а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — индивидные переменные или константы.

Вхождение переменной $\mathbf{a}$ в пп-формулу $\mathbf{A}$ называется *связанным вхождением* переменной $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$, если оно есть вхождение в такую пп-часть формулы $\mathbf{A}$, которая имеет вид $(\forall \mathbf{a})\mathbf{B}$; в противном случае оно называется *свободным вхождением* $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$. *Связанными переменными* формулы $\mathbf{A}$ являются те переменные, которые имеют связанные вхождения в $\mathbf{A}$, и *свободными переменными* формулы $\mathbf{A}$ являются те переменные, которые имеют свободные вхождения в $\mathbf{A}$ [302].

Из определения пп-формулы исчисления F^1 следует, что все вхождения пропозициональных и функциональных переменных являются свободными вхождениями. Но вхождение индивидной переменной в пп-формулу исчисления F^1 может быть как связанным, так и свободным.

Пп-формула является *n-арной формой*, если она имеет точно n свободных переменных, и *константой*, если она не имеет свободных переменных. В исчислении F^1 все формулы суть *пропозициональные* формы и все константы, являющиеся пп-формулами, суть пропозициональные константы или *предложения*. (Ср. примечание 117.)

В дополнение к синтаксическим обозначениям

$$S^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{A}\Big|, \qquad S^{\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2}_{\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2}\ \ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathbf{\Gamma}_n}\mathbf{A}\Big|,$$

разъясненным в §§ 10, 12, мы будем также пользоваться синтаксическим обозначением

$$\dot{S}^{\mathfrak{b}}_{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{A}\Big|$$

для результата подстановки $\mathbf{\Gamma}$ вместо всех свободных вхождений переменной $\mathfrak{b}$ в $\mathbf{A}$ и

$$\dot{S}^{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}_{\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{\Gamma}_2}\ \ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathbf{\Gamma}_n}\mathbf{A}\Big|$$

для результата одновременной подстановки $\mathbf{\Gamma}_1$ вместо всех свободных вхождений $\mathfrak{b}_1$ в $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Gamma}_2$ — вместо всех свободных вхождений $\mathfrak{b}_2$ в $\mathbf{A}$, ..., $\mathbf{\Gamma}_n$ — вместо всех свободных вхождений $\mathfrak{b}_n$ в $\mathbf{A}$ (обозначая точкой, что подстановка должна производиться только вместо свободных вхождений). Здесь $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma}_1$, $\mathbf{\Gamma}_2$, ..., $\mathbf{\Gamma}_n$ могут быть как пп-формулами, так и формулами, состоящими из отдельной переменной или константы.

Записывая пп-формулы из F^1, мы пользуемся теми же методами сокращения путем опускания скобок, которые были разъяснены в § 11, включая соглашение о группировке влево и об употреблении больших точек. Ради сокращения мы также опускаем верхние индексы у функциональных переменных. Так, например, мы пишем $F(x)$ вместо $F^1(x)$ и $F(x, y)$ вместо $F^2(x, y)$, поскольку верхние индексы, требующиеся для правильности построения формулы, всегда можно однозначно восстановить (ср. 30 ii).

Мы также принимаем для использования в исчислении F^1 определения-схемы D3—12, понимая встречающийся в них знак $\sim$ как исходный символ $\sim$ из F^1. В отличие от других скобок скобки, являющиеся частью обозначения $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$, вводимого при помощи D12, никогда не должны опускаться.

Мы, далее, добавляем следующие определения-схемы, в которых $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... должны быть индивидуальными переменными:

D13.[303] $(\mathbf{a})\,\mathbf{A} \to (\forall\mathbf{a})\,\mathbf{A}$.

D14.[304] $(\exists\,\mathbf{a})\,\mathbf{A} \to \sim(\mathbf{a}) \sim \mathbf{A}$.

D15.[305] $[\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}\ \ _{\mathbf{a}_n}\mathbf{B}] \to (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_n)\,\blacksquare\,\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

D16.[305] $[\mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}\ .\ \ _{\mathbf{a}_n}\mathbf{B}] \to (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_n)\,\blacksquare\,\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

D17. $[\mathbf{A}\,|\,_{\mathbf{a}}\mathbf{B}] \to (\mathbf{a})\,\blacksquare\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}$.

Как уже было сказано, мы используем при опускании скобок соглашение о группировке влево из § 11. Так же, как и в § 11, это соглашение модифицируется подразделением пар скобок на категории. При этом мы пользуемся тем же, что и в § 11, подразделением на категории со следующими, однако, добавлениями: (1) если один из знаков $\supset$, $\equiv$, $|$ используется вместе с нижними индексами (в соответствии с D15—17), то относящаяся к нему пара скобок считается принадлежащей той же категории, какой она принадлежала бы, если бы индекса не было; (2) комбинации символов ($\forall$**a**), (**a**), ($\exists$**a**) (простые кванторы с операторными переменными) помещаются вместе со знаком $\sim$ в четвертую (последнюю) категорию, в том же смысле, как это было разъяснено в § 11 для $\sim$.

Задавая правила вывода и аксиомные схемы исчисления F^1, мы (удобства ради) используем только что описанные определения-схемы и другие соглашения о сокращениях.

Правилами вывода являются два следующих:

*300. Из $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и **A** следует **B**. (*Правило модус поненс.*)

*301. Если **a** есть индивидная переменная, то из **A** следует (**a**)**A**. (*Правило обобщения.*)

В случаях применения правила *модус поненс* мы называем $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ *большой посылкой*, а **A** — *малой посылкой*. В случаях применения правила обобщения мы говорим, что было проведено *обобщение* по переменной **a**.

Число аксиом исчисления F^1 бесконечно и представлено с помощью аксиомных схем по способу § 27. Этими аксиомными схемами являются следующие:

*302. $\mathbf{A} \supset . \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

*303. $\mathbf{A} \supset [\mathbf{B} \supset \mathbf{C}] \supset . \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset . \mathbf{A} \supset \mathbf{C}$.

*304. $\sim \mathbf{A} \supset \sim \mathbf{B} \supset . \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

*305. $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset . \mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\mathbf{B}$, где **a** — произвольная индивидная переменная, не являющаяся свободной переменной в **A**.

*306. $(\mathbf{a})\mathbf{A} \supset \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}|$, где **a** — индивидная переменная, **b** — индивидная переменная или индивидная константа и где никакое свободное вхождение **a** в **A** не находится в такой пп-части формулы **A**, которая имеет вид (**b**)**C**.

В *305 и *306 мы впервые встречаемся с такими аксиомными схемами, которые в отличие от введенных в § 27 связаны определенными условиями (сформулированными в языке синтаксиса). Например, в соответствии с *305 не всякая пп-формула $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset . \mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\mathbf{B}$ является аксиомой, а только такая, которая удовлетворяет дополнительному требованию, что **A** не содержит свободных вхождений **a**.

Смысл схем *305 и *306 можно пояснить примерами, в которых мы будем предполагать, что пропозициональные переменные, а также сингулярные и бинарные функциональные переменные входят в число исходных символов исчисления F^1.

Так, одной из пп-формул, являющихся аксиомами в соответствии с *305, будет [306)]

$$p \supset_x F(x) \supset_{\bullet} p \supset (x)\, F(x),$$

или, как ее можно переписать, если не пользоваться сокращением из D15,

$$(x)\,[p \supset F(x)] \supset_{\bullet} p \supset (x)\, F(x).$$

(Эту последнюю можно назвать *основным частным случаем* схемы *305 в том смысле, что все остальные частные случаи схемы *305 можно получить из нее с помощью рассматриваемых в § 35 правил подстановки и что никакой более короткий частный случай схемы *305 не обладает этим свойством.) Далее, пп-формула

$$G(x) \supset_y H(y) \supset_{\bullet} G(x) \supset (y)\, H(y)$$

является аксиомой, будучи частным случаем схемы *305 (хотя и не основным случаем). Аксиомой в силу *305 является и

$$F(x) \supset_y [G(y,\ z) \supset_z H(z)] \supset_{\bullet} F(x) \supset_{\bullet} G(y,\ z) \supset_{yz} H(z),$$

и т. д., всего бесконечное число аксиом. Однако следующая пп-формула не является частным случаем схемы *305 и не является аксиомой:

$$F(x) \supset_x G(x) \supset_{\bullet} F(x) \supset (x)\, G(x).$$

Частными случаями схемы *306, и поэтому аксиомами, будут следующие пп-формулы (первые две являются основными случаями) [307)]:

$$(x)\, F(x) \supset F(y);$$

$$(x)\, F(x) \supset F(x);$$

$$F(x) \supset_x (y)\, G(y) \supset_{\bullet} F(y) \supset (y)\, G(y);$$

$$F(x) \supset_x (x)\, G(x) \supset_{\bullet} F(y) \supset (x)\, G(x);$$

$$F(x,y) \supset_x (z)\, G(x,\ z) \supset_{\bullet} F(y,\ y) \supset (z)\, G(y,\ z).$$

С другой стороны, следующие пп-формулы не являются частными случаями схемы *306 и не являются аксиомами [308)]:

$$(x)\,(y)\, F(x,\ y) \supset (y)\, F(y,\ y);$$

$$F(x) \supset_x (y)\, G(x,\ y) \supset_{\bullet} F(y) \supset (y)\, G(y,\ y).$$

Как и в случае формулировок пропозиционального исчисления, мы будем помещать знак $\vdash$ перед пп-формулой, если нужно показать, что она является теоремой.

Из числа различных функциональных исчислений первого порядка, F^1, исходные базисы которых были только что описаны, мы выделяем специальными названиями следующие. *Чистое функциональное исчисление первого порядка*, F^{1p}, это то, в число исходных символов которого входят все пропозициональные переменные и все функциональные переменные (сингулярные, бинарные, тернарные и т. д.), но не входят ни индивидные, ни функциональные константы. *Сингулярное функциональное исчисление первого порядка*, $F^{1,1}$, — это то, в число исходных символов которого входят все пропозициональные переменные и все сингулярные функциональные переменные, но не входят другие функциональные переменные, а также не входят ни индивидные, ни функциональные константы; если мы к этим исходным символам присоединим бинарные функциональные переменные, то получим *бинарное функциональное исчисление первого порядка*, $F^{1,2}$, и т. д. Функциональное исчисление первого порядка, в число исходных символов которого входят индивидные или функциональные константы, называется *прикладным функциональным исчислением первого порядка*; если в число исходных символов не включены ни пропозициональные, ни функциональные переменные, то мы имеем *простое прикладное функциональное исчисление первого порядка* (в этом случае должна иметься по крайней мере одна функциональная константа).

Эта терминология будет нам удобна в дальнейшем. Однако в этой главе нам, как правило, не нужно будет уточнять с помощью имен различные функциональные исчисления первого порядка, так как мы, давая построение, в равной мере приложимое к любому из многочисленных функциональных исчислений первого порядка, рассматриваем их, как уже было сказано ранее, одновременно.

Подразумеваемую главную интерпретацию функционального исчисления первого порядка можно приблизительно описать следующим образом: пропозициональные переменные и сентенциональные связки должны иметь то же содержание, что и в пропозициональном исчислении; квантор общности ($\forall$) должен иметь содержание, описанное в § 06, а функциональные переменные должны иметь своими значениями пропозициональные функции (от) индивидов (например, область значений сингулярной функциональной переменной состоит из сингулярных функций, отображающих индивиды в истинностные значения; аналогично в случае бинарных функциональных переменных и т. д.). Для применения функции к ее аргументу, или аргументам, используется обозначение, описанное в § 03. *Индивиды*, т. е. области значений индивидных переменных, мы можем выбирать самыми различными способами, получая таким образом различные главные интерпретации. В тех случаях, когда среди исходных символов нет индивидных или функциональных констант, обычно принято допускать в качестве индивидов любой четко определенный непустой класс[309]. Если же имеются индивидные или функциональные константы, то подразумеваемая их интерпретация может повлечь ограничения или даже специальный выбор класса индивидов.

Ради иллюстрации мы явно формулируем семантические правила для двух случаев, а именно для случая чистого пропозиционального исчисления первого порядка, F^{1p}, и для случая простого прикладного функционального исчисления первого порядка, F^{1h}, которое содержит две тернарные функциональные константы, Σ и Π, и не содержит среди своих исходных символов ни других функциональных констант, ни каких-либо индивидных констант.

В случае исчисления F^{1p} мы должны вначале выбрать некоторый непустой класс индивидов, после чего следующим образом получается одна из главных интерпретаций:

a. Индивидные переменные суть переменные, область значений которых составляют индивиды[310].

b_0. Пропозициональные переменные суть переменные, область значений которых состоит из t и f.

b_1. Сингулярные функциональные переменные суть переменные, область значений которых составляют (пропозициональные) функции, отображающие индивиды в истинностные значения[310].

b_2. Бинарные функциональные переменные суть переменные, имеющие своей областью значений бинарные пропозициональные функции, область определения которых составляют упорядоченные пары индивидов[310].

b_n. n-арные функциональные переменные суть переменные, области значений которых составляют n-арные пропозициональные функции, с областями определения, образованными упорядоченными n-ками индивидов[310].

c_0. Пп-формула, состоящая из одной отдельно взятой пропозициональной переменной **a**, принимает значение t для значения t переменной **a** и значение f для значения f переменной **a**.

c_n. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ будет пп-формулой, в которой $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная, а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — индивидные переменные, не обязательно все различные. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ — полный перечень различных индивидных переменных из числа $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Рассмотрим систему значений b для $\mathbf{f}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ для $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$; пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — значения, которые таким образом приписываются переменным $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ соответственно. Тогда $b(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — значение формулы $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ для системы значений $b, b_1, b_2, \ldots, b_m$ переменных $\mathbf{f}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ (взятых в этом порядке)[311].

d. Для всякой системы значений свободных переменных пп-формулы $\sim\mathbf{A}$ ее значением является f, если значением пп-формулы **A** является t; и ее значением является t, если значением **A** является f[312].

e. Значением пп-формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ для данной системы значений ее свободных переменных является t, если либо значением **B** является t, либо значением **A** является f, и значением $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ является f, если значением **B** является f и одновременно значением **A** является t.

f. Пусть **a** будет индивидной переменной, а **A** — произвольной пп-формулой. Значением пп-формулы $(\forall\mathbf{a})\mathbf{A}$ для данной системы значений ее свободных переменных является t, если (для той же системы значений свободных переменных) t является значением пп-формулы **A** для всех значений переменной **a**, и ее значением является f, если f является значением пп-формулы **A** для по меньшей мере одного значения переменной **a**[313].

Для удобства ссылок мы указали здесь бесконечный перечень правил $b_0, b_1, b_2, \ldots$ и бесконечный перечень правил $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Разумеется, их можно было бы заключить в формулировки только двух правил, b и c[314].

В случае исчисления F^{1h} индивидами будут *натуральные числа*, т. е. положительные целые числа и 0. Имеется следующая одна главная интерпретация:

α_0. Индивидные переменные суть переменные с непустой областью значений $\mathfrak{J}$.

α_1. Область значений $\mathfrak{J}$ индивидных переменных составляют натуральные числа.

β_0. Каждая из констант Σ и Π обозначает тернарную пропозициональную функцию элементов из $\mathfrak{J}$.

β_1. Σ обозначает тернарную пропозициональную функцию натуральных чисел, значением которой для любых натуральных чисел a_1, a_2, a_3, взятых (в этом порядке) в качестве аргументов, является t или f, в зависимости от того, является ли a_3 суммой чисел a_1 и a_2 или не является.

β_2. Π обозначает тернарную пропозициональную функцию натуральных чисел, значением которой для любых натуральных чисел a_1, a_2 a_3, взятых (в этом порядке) в качестве аргументов, является t или f, в зависимости от того, является ли a_3 произведением чисел a_1 и a_2 или нет.

γ. Пусть $\mathbf{f}$ — тернарная функциональная константа, обозначающая пропозициональную функцию b, и пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — индивидные переменные, не обязательно все различные. Тогда значением пп-формулы $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ для некоторой системы значений индивидных переменных является $b(a_1, a_2, a_3)$, где a_1, a_2, a_3 — соответственные значения переменных $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

δ. Совпадает по формулировке с приведенным выше правилом d

ε. Совпадает по формулировке с приведенным выше правилом e.

ζ. Совпадает по формулировке с приведенным выше правилом f.[313)]

Упражнения к § 30

30.0. Выразите следующее суждение с помощью пп-формулы исчисления F^{1h} (придерживаясь главной интерпретации исчисления F^{1h})· Для любых натуральных чисел a, b, c, если $a + b = c$, то $b + a = c$.

30.1. Аналогично, выразите в F^{1h}· Для любых натуральных чисел a, b либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$. [Вначале следует ввести определение сокращения, выражающее отношение $\leqslant$, например $[\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}] \to (\exists \mathbf{c}) \Sigma(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные индивидные переменные, а $\mathbf{c}$ — первая в алфавитном порядке переменных переменная, не совпадающая ни с $\mathbf{a}$, ни с $\mathbf{b}$.]

30.2. Аналогично, выразите в F^{1h}: Если произведение двух натуральных чисел равно 0, то одно из них равно 0. [Вначале с помощью определения сокращения должно быть введено некоторое обозначение, скажем $Z_0(\mathbf{a})$, для представления пропозициональной функции равенства нулю. После этого можно воспользоваться пп-формулой $(\exists z)_\blacksquare\ \Pi(x, y, z)\ Z_0(z)$, выражающей, что два натуральных числа (значения переменных x и y) дают в произведении 0.]

30.3. Аналогично, найдите в F^{1h} пп-формулы, которые как можно более точно выражали бы следующие суждения: (1) Натуральное число не меняется при умножении на 1. (2) Сумма двух нечетных чисел есть число четное. (3) Для каждого простого числа существует большее простое число. (4) Единственным четным простым числом является 2. (5) Для всяких натуральных чисел a и b и для всякого отличного от 0 натурального числа c, если $ac \leqslant bc$, то $a \leqslant b$. (6) Для всяких натуральных чисел a и b имеет место равенство $(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab$.

30.4. Рассмотрите прикладное функциональное исчисление первого порядка F^{1a}, содержащее функциональные константы Σ и Π с тем же, что и в F^{1h}, содержанием и в дополнение к этому все пропозициональные и функциональные переменные. Главная интерпретация легко получается по аналогии с теми, которые даны для F^{1p} и F^{1h}, причем индивидами являются опять натуральные числа. Следующие утверждения выразите в этом функциональном исчислении первого порядка как можно более точно с помощью пп-формул, содержащих свободные функциональные переменные: (1) В каждом непустом классе натуральных чисел имеется наименьшее число [315]. (2) Если среди чисел некоторого непустого класса натуральных чисел нет наибольшего, то для произвольного натурального числа в этом классе найдется большее. (3) Отношение $\leqslant$ между натуральными числами характеризуется следующими тремя свойствами[316]: оно имеет место между 0 и любым натуральным числом; никакое отличное от 0 натуральное число не находится в этом отношении к 0; наконец, оно имеет место (для произвольных натуральных чисел a и b) между $a+1$ и $b+1$ тогда и только тогда, когда оно имеет место между a и b. (4) Для всякого натурального числа k сумма меньших, чем $2k$, нечетных чисел равна k^2. (*Указание*: Если дан класс C натуральных чисел, то отношение между натуральным числом k и суммой меньших, чем k, натуральных чисел из C характеризуется следующими тремя свойствами: оно имеет место между 0 и 0; оно не имеет места между 0 и каким-либо отличным от 0 натуральным числом; для любых натуральных чисел a и b оно имеет место между $a+1$ и b в том и только в том случае, если существует такое натуральное число c, что оно имеет место между a и c, и b равно $c+a$ или c в зависимости от того, относится ли a к C или нет.) (5) Существуют совершенные числа[317].

30.5. Задавая интерпретацию исчисления F^{1p} теми же семантическими правилами a — f, что и в главной интерпретации, возьмем теперь в качестве индивидов нечетные совершенные числа[317]. (1) Если существуют нечетные совершенные числа, то полученная таким образом интерпретация является главной интепретацией; опираясь на эту гипотезу, покажите, что интерпретация эта правильна. (2) Принимая гипотезу, что не существует нечетных совершенных чисел, покажите, что интерпретация эта неправильна. (Выведите из последней гипотезы, что содержащая свободные индивидные переменные пп-формула должна считаться принимающей значение t для всякой системы значений ее свободных переменных и в то же время принимающей для всякой системы значений ее свободных переменных значение f; однако нельзя считать, что она принимает значение f для хотя бы одной системы значений ее свободных переменных.)

30.6. Оператор, или квантор, который был введен с помощью определения сокращения в D17, можно, конечно, использовать в качестве исходного (сингулярно-бинарного) квантора в формулировке функционального исчисления первого порядка. Дайте правила построения для такой формулировки чистого функционального исчисления первого порядка, в которой он является *единственной* исходной сентенциональной связкой или квантором; дайте семантические правила для главной интерпретации; приведите определения квантора общности, импликации и отрицания, которые обеспечивали бы такую согласованность содержания, которая была разъяснена в семантических абзацах конца § 11.

30.7. Подразумеваемая главная интерпретация *расширенного пропозиционального исчисления* (в смысле § 28) содержательно описана семантическими рассуждениями в §§ 04—06, 28. Дайте правила построения для такой формулировки расширенного пропозиционального исчисления, в которой единственной исходной сентенциональной связкой является импликация, а единственным исходным квантором является квантор общности; дайте также семантические правила для главной интерпретации.

30.8. Подразумеваемая главная интерпретация *прототетики* (в смысле § 28) содержательно описана семантическими рассуждениями §§ 04—06, 28. Дайте правила построения для такой формулировки прототетики, в которой единственной исходной сентенциональной связкой является эквивалентность, а единственным исходным квантором—квантор общности (операторной переменной которого теперь может быть либо пропозициональная переменная, либо истинностно-функциональная переменная); дайте семантические правила для главной интерпретации; наконец, приведите такие определения импликации и отрицания, которые обеспечивали бы соответствующую согласованность содержания.

31. Пропозициональное исчисление. Если в число исходных символов исчисления F^1 включены пропозициональные переменные, то всякая теорема пропозиционального исчисления, построенного на импликации и отрицании как на исходных связках, является также теоремой исчисления F^1. Это непосредственно следует из результатов § 27, так как в число аксиом исчисления F^1 входят аксиомы исчисления P § 27 (в *302, *303 и *304), а единственное правило вывода исчисления P является также правилом вывода исчисления F^1.

Даже в тех случаях, когда пропозициональные переменные не входят в число исходных символов исчисления F^1, мы все же можем получить аналогичное заключение, рассматривая *подстановковые частные случаи* теорем пропозиционального исчисления.

Под *подстановковым частным случаем* пп-формулы **A** произвольной формулировки пропозиционального исчисления мы понимаем выражение, или формулу

$$S^{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_n} \mathbf{A}|,$$

где $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — полный перечень (различных) пропозициональных переменных формулы **A**, а $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ — произвольные пп-формулы рассматриваемой в конкретном контексте логистической системы, в этой главе — логистической системы F^1.

Ясно, что подстановковый частный случай пп-формулы исчисления P является пп-формулой исчисления F^1. Более того, подстановковый частный случай

$$S^{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_n} \mathbf{A}|$$

теоремы **A** исчисления P должен быть теоремой исчисления F^1. Это следует из того, что всякий подстановковый частный случай аксиомы исчисления P является (в силу * 302—* 304) аксиомой исчисления F^1. Если же дано доказательство формулы **A** как теоремы исчисления P, то пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ — полный перечень (различных) встречающихся в нем пропозициональных переменных. Выберем тогда произвольные пп-формулы $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_m$ исчисления F^1 и повсюду в данном доказательстве подставим одновременно $\mathbf{B}_1$ вместо $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{B}_2$ вместо $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{B}_n$ вместо $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{C}_1$ вместо $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{C}_2$ вместо $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{C}_m$ вместо $\mathbf{c}_m$. Результат этой подстановки является доказательством пп-формулы

$$S^{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_n} \mathbf{A}|$$

как теоремы исчисления F^1, поскольку правильные применения *модус поненс* в P превращаются подстановкой в правильные применения *модус поненс* в F^1.

Так как мы знаем (в силу **235, **239, *270, **271), что теоремы исчисления P совпадают с *тавтологиями* исчисления P (в смысле § 15), то мы без какого-либо урона можем предыдущим результатам придать следующую форму:

*310. Всякая тавтология исчисления P является теоремой исчисления F^1, если она является пп-формулой F^1.

*311. Всякий подстановковый частный случай тавтологии исчисления P является теоремой исчисления F^1.

Использованный выше произвольный выбор пп-формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, . . ., $\mathbf{C}_m$ легко заменить выбором, производимым по некоторому определенному правилу. Так как $n > 0$, то мы можем, например, просто отождествить каждую из пп-формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, . . ., $\mathbf{C}_m$ с $\mathbf{B}_1$. Тем самым доказательство метатеоремы *311 становится эффективным в смысле § 12, и поэтому *311 (так же как и *310) может применяться в качестве производного правила вывода.

Использование *311 как производного правила вывода облегчается фактом существования эффективной процедуры для определения того, является ли или не является данная пп-формула исчисления F^1 подстановковым частным случаем некоторой тавтологии исчисления P, — и если да, то нахождения какой-либо тавтологии исчисления P, подстановковым частным случаем которой она являлась бы. Подробности мы предоставляем читателю. Мы будем ссылаться на эту процедуру в тех случаях, когда нам потребуется рассматривать какую-либо пп-формулу исчисления F^1 как подстановковый частный случай тавтологии исчисления P, предоставляя проверку читателю.

Мы часто будем использовать описанным образом *311 в качестве производного правила вывода. И обычно будем считать достаточным указанием на такое использование *311, будь то отдельно или с последующим однократным или многократным применением правила *модус поненс*, такие выражения, как „в силу P" или „используя P" и т. п.

Мы выписываем здесь для ссылок следующие пять метатеорем:

*312. Всякая пп-формула имеет один и только один из пяти приведенных ниже видов: отдельно взятая пропозициональная переменная; $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, где $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная или n-арная функциональная константа, а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — индивидные переменные, или индивидные константы, или и то и другое; $\sim \mathbf{A}$; $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$; $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$, где $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная. Во всех этих случаях она представима в таком виде однозначно.

313. Пп-часть формулы $\sim \mathbf{A}$ либо совпадает с $\sim \mathbf{A}$, либо является пп-частью формулы **A.

314. Пп-часть формулы $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ либо совпадает с $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, либо является пп-частью формулы **A, либо является пп-частью формулы **B**.

315. Пп-часть формулы $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$ либо совпадает с $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$, либо является пп-частью формулы **A.

316. Если **Г получается из **A** подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**), то **Г** правильно построена.

Эти метатеоремы используются, в частности, ниже при доказательстве метатеорем **323, **340 и **390. Их доказательство аналогично доказательству метатеорем **225—**228 и предоставляется читателю.

32. Непротиворечивость исчисления F^1. Пп-формула исчисления F^1 называется *бескванторной*, если она не содержит кванторов, или, что то же самое, если она не содержит вхождений символа $\forall$. Из пп-формулы исчисления F^1 мы получаем ее *присоединенную бескванторную формулу* (также правильно построенную), опуская все вхождения квантора всеобщности, т. е. опуская четыре символа $(\forall \mathbf{a})$ повсюду, где они встречаются подряд в указанном сочетании.

Из пп-формулы исчисления F^1 мы получаем ее *присоединенную формулу пропозиционального исчисления* (сокращенно „пфпи"), образуя вначале присоединенную бескванторную формулу, а затем заменяя в последней каждую ее пп-часть вида $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ на еще не использованную пропозициональную переменную согласно следующему правилу: две пп-части $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ и $\mathbf{g}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m)$ заменяются одной и той же пропозициональной переменной тогда и только тогда, когда **f** есть та же самая функциональная переменная или функциональная константа, что и **g** (это, конечно, может иметь место только при $m = n$).

Например, в исчислении F^{1p} пп-формула $G(x) \supset_y H(y) \supset_{\bullet} G(x) \supset (y)H(y)$ имеет в качестве присоединенной бескванторной формулы $G(x) \supset H(y) \supset_{\bullet} G(x) \supset H(y)$, и одной из ее пфпи является $p \supset q \supset_{\bullet} p \supset q$. Пп-формула $F(x, y) \supset_x (z)\, G(x, z) \supset_{\bullet} F(y, y) \supset (z)G(y, z)$ имеет своей присоединенной бескванторной формулой $F(x, y) \supset G(x, z) \supset_{\bullet} F(y, y) \supset G(y, z)$, и поэтому одной из ее пфпи является вновь $p \supset q \supset_{\bullet} p \supset q$.

Ясно, что все пфпи некоторой пп-формулы исчисления F^1 являются вариантами друг друга в смысле § 13. Следовательно, если одна из пфпи данной пп-формулы исчисления F^1 будет тавтологией, то и все остальные также будут тавтологиями.

Теперь легко проверяется, что всякая пфпи каждой аксиомы исчисления F^1 является тавтологией. Действительно, пфпи всякого частного случая $\mathbf{A} \supset_{\centerdot} \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ аксиомной схемы *302 должна иметь вид $\mathbf{A}_0 \supset_{\centerdot} \mathbf{B}_0 \supset \mathbf{A}_0$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ суть пфпи для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно; а $\mathbf{A}_0 \supset_{\centerdot} \mathbf{B}_0 \supset \mathbf{A}_0$ должна быть тавтологией, так как она может быть получена с помощью подстановки из тавтологии $p \supset_{\centerdot} q \supset p$. Аналогично пфпи частных случаев аксиомных схем *303—*305 должны иметь соответственно следующую форму:

$$\mathbf{A}_0 \supset [\mathbf{B}_0 \supset \mathbf{C}_0] \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_0 \supset \mathbf{B}_0 \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_0 \supset \mathbf{C}_0;$$

$$\sim \mathbf{A}_0 \supset \sim \mathbf{B}_0 \supset_{\centerdot} \mathbf{B}_0 \supset \mathbf{A}_0;$$

$$\mathbf{A}_0 \supset \mathbf{B}_0 \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_0 \supset \mathbf{B}_0.$$

А каждая из таких формул является, очевидно, тавтологией, так как получается подстановкой из заведомой тавтологии. В случае аксиомной схемы *306 выражения $\mathbf{A}$ и

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}|$$

отличаются друг от друга (если вообще отличаются) только тем, что вместо одной индивидной переменной подставлена другая индивидная переменная или индивидная константа, а следовательно, они должны иметь одну и ту же пфпи $\mathbf{A}_0$. Отсюда следует, что пфпи какого-нибудь частного случая аксиомной схемы *306 должна иметь вид $\mathbf{A}_0 \supset \mathbf{A}_0$, что, очевидно, является тавтологией, так как может быть получено подстановкой из заведомой тавтологии $p \supset p$.

Далее, правила вывода исчисления F^1 сохраняют свойство иметь тавтологию в качестве пфпи, т. е. если посылка или посылки обладают этим свойством, то им обладает также и заключение. Для *301 это очевидно. В случае *300 мы должны воспользоваться замечанием, что если одна из пфпи некоторой ппф является тавтологией, то тавтологиями являются и все остальные ее пфпи. Пусть $\mathbf{A}_0 \supset \mathbf{B}_0$ является одной из пфпи большой посылки $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_0$ являются пфпи для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Так как $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_0 \supset \mathbf{B}_0$ являются тавтологиями, то и $\mathbf{B}_0$ также является тавтологией в соответствии с истинностной таблицей для $\supset$ (ср. доказательство **150).

Так как все аксиомы имеют тавтологии своими пфпи и так как правила вывода сохраняют это свойство, то мы получаем следующую метатеорему:

** 320. Всякая теорема исчисления F^1 имеет в качестве пфпи некоторую тавтологию.

Теперь ясно, что если некоторая пп-формула **A** имеет своей пфпи тавтологию, то ее отрицание $\sim$ **A** имеет в качестве пфпи не тавтологию, а противоречие. Отсюда в силу **320 следует, что **A** и $\sim$ **A** не могут обе одновременно быть теоремами. Мы доказали, таким образом, непротиворечивость исчисления F^1 в следующем смысле [318]:

321. F^1 непротиворечиво относительно преобразования **A в $\sim$ **A**.

**322. F^1 абсолютно непротиворечиво.

Это доказательство непротиворечивости исчисления F^1 отличается от нашего доказательства непротиворечивости пропозиционального исчисления (§ 17) тем, что оно иначе связано с решением проблемы разрешения. Действительно, конверсия метатеоремы **320 не имеет места. Мы это покажем, приведя пример нетеоремы, имеющей тавтологию своей пфпи. Для этой цели докажем сначала две следующие метатеоремы:

**323. Для всякой бескванторной теоремы исчисления F^1 существует доказательство, состоящее из одних бескванторных формул.

Доказательство. Пусть дано некоторое доказательство бескванторной формулы **C**, и пусть $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$ — полный перечень индивидных переменных и индивидных констант, встречающихся в этом доказательстве. Тогда мы следующим образом заменим каждую пп-формулу **B**, входящую в доказательство (т. е. являющуюся одной из конечного числа пп-формул, образующих доказательство), на бескванторную формулу **B** ‡.

Выбираем индивидные переменные $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$, которые различаются между собой и отличны от всех переменных из числа $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$. Повсюду в пп-формуле **B** подставляем $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ вместо $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \ldots, \mathfrak{c}_n$ соответственно. В получившейся пп-формуле **B**′ заменяет каждую пп-часть вида $(\forall \mathfrak{b}_r)$ **A** на конъюнкцию $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_n$, где $\mathbf{A}_i$ есть

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{b}_r}_{\mathfrak{c}_i} \mathbf{A} |$$

($i = 1, 2, \ldots, n$). Если в пп-формуле **B**′ имеется более чем одна пп-часть, имеющая вид $(\forall \mathfrak{b}_r)$ **A**, то указанное замещение должно быть произведено сначала для одной из пп-частей $(\forall \mathfrak{b}_r)$ **A**, в которой **A** является бескванторной формулой (такая, конечно, найдется). После этого в получившейся пп-формуле следует выбрать другую пп-часть $(\forall \mathfrak{b}_r)$ **A**, в которой **A** является бескванторной формулой, и повторить описанное замещение. Последовательные замещения повторяются до тех пор, пока **B**′ не превращается в бескванторную формулу $\mathbf{B}\dagger$. Тогда $\mathbf{B}\ddagger$ будет конъюнкцией (в каком-либо установленном порядке) всех n^n пп-формул

$$S^{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\ \cdots\ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathfrak{d}_n}\mathbf{B}\dagger|,$$

где $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_n$ — произвольные переменные и константы из числа $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$, взятые в любом порядке и не обязательно различные.

Если $\mathbf{B}$ — аксиома, то $\mathbf{B}\ddagger$ — подстановковый частный случай некоторой тавтологии (из P), как читатель легко может проверить, рассматривая отдельно каждую из схем *302—*306. В силу *311 из этого следует, что $\mathbf{B}\ddagger$ является теоремой исчисления F^1, а метод, которым мы доказывали *311, дает нам возможность в действительности без труда получить доказательство для $\mathbf{B}\ddagger$, в котором встречались бы одни бескванторные формулы.

Если в данном доказательстве пп-формулы $\mathbf{C}$ формула $\mathbf{B}$ получается в соответствии с *300 из посылок $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A}\ddagger$ является конъюнкцией n^n пп-формул

$$S^{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\ \cdots\ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathfrak{d}_n}\mathbf{A}\dagger|,$$

а $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]\ddagger$ является конъюнкцией n^n пп-формул

$$S^{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\ \cdots\ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathfrak{d}_n}\mathbf{A}\dagger| \supset S^{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\ \cdots\ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathfrak{d}_n}\mathbf{B}\dagger|.$$

Поэтому из $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]\ddagger$ и $\mathbf{A}\ddagger$ можно серией шагов, использующих только методы пропозиционального исчисления (ср. § 31), получить каждую из n^n пп-формул

$$S^{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\ \cdots\ ^{\mathfrak{b}_n}_{\mathfrak{d}_n}\mathbf{B}\dagger|$$

и, следовательно, получить $\mathbf{B}\ddagger$ с помощью дальнейшей серии шагов, также использующих лишь методы пропозиционального исчисления. Все ,что нам при этом потребуется, это доказательства двух соответствующих подстановковых частных случаев для каждой из n^n тавтологий

$$p_1 p_2 \ldots p_{n^n} \supset p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n^n),$$

доказательство соответствующего подстановкового частного случая тавтологии

$$p_1 \supset_{\blacksquare} p_2 \supset_{\blacksquare} \ldots p_{n^n-1} \supset_{\blacksquare} p_{n^n} \supset p_1 p_2 \ldots p_{n^n}$$

и некоторое число применений правила *модус поненс*. С помощью примененного при доказательстве *311 метода все это можно выполнить с использованием одних только бескванторных формул.

Если в данном доказательстве формулы $\mathbf{C}$ формула $\mathbf{B}$ получена из посылки $\mathbf{A}$ путем обобщения по индивидной переменной $\mathfrak{c}_r$ (т. е. в соответствии с правилом *301), то $\mathbf{B}\dagger$ является конъюнкцией n пп-формул

$$\mathrm{S}^{b_r}_{c_i} \mathbf{A}\dagger|$$

($i = 1, 2, \ldots, n$), а $\mathbf{A}\ddagger$ является конъюнкцией n^n пп-формул

$$\mathrm{S}^{b_1 b_2}_{d_1 d_2} \ldots {}^{b_n}_{d_n} \mathbf{A}\dagger|.$$

Таким образом,

$$\mathbf{A}\ddagger \supset \mathrm{S}^{b_1 b_2}_{d_1 d_2} \ldots {}^{b_n}_{d_n} \mathbf{B}\dagger|$$

является подстановковым частным случаем тавтологии

$$p_1 p_2 \ldots p_{n^n} \supset p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_n}$$

(где нижние индексы $j_1, j_2, \ldots, j_n$ различны между собой и взяты из индексов $1, 2, \ldots, n^n$) и поэтому, в силу *311, является теоремой исчисления F^1. Следовательно, из $\mathbf{A}\ddagger$ мы можем с помощью *модус поненс* получить каждую из пп-формул

$$\mathrm{S}^{b_1 b_2}_{d_1 d_2} \ldots {}^{b_n}_{d_n} \mathbf{B}\dagger|,$$

и поэтому из соответствующего подстановкового частного случая тавтологии

$$p_1 \supset . \, p_2 \supset . \ldots p_{n^n} \supset p_1 p_2 \ldots p_{n^n}$$

можем с помощью *модус поненс* получить $\mathbf{B}\ddagger$. При помощи метода, примененного при доказательстве метатеоремы *311, все это также может быть осуществлено с применением одних только бескванторных формул.

Мы показали, таким образом, как данное доказательство формулы $\mathbf{C}$ может быть преобразовано в доказательство формулы $\mathbf{C}\ddagger$, в котором встречаются одни только бескванторные формулы. Однако, по предположению, $\mathbf{C}$ является бескванторной формулой. Поэтому $\mathbf{C}\dagger$ есть

$$\mathrm{S}^{c_1 c_2}_{b_1 b_2} \ldots {}^{c_n}_{b_n} \mathbf{C}|,$$

и $\mathbf{C}\ddagger$ есть конъюнкция пп-формул, одной из которых является $\mathbf{C}$. Следовательно, вновь используя пропозициональное исчисление, мы можем доказать $\mathbf{C}$ и, применяя метод доказательства метатеоремы *311, осуществить это с помощью одних только бескванторных формул.

** 324. Всякая бескванторная теорема исчисления F^1 является подстановковым частным случаем некоторой тавтологии исчисления P.

Доказательство. Если дана бескванторная теорема $\mathbf{C}$ исчисления F^1, то по метатеореме **323 мы можем найти такое ее доказательство, в котором встречаются одни только бескванторные

ные формулы. В этом доказательстве формулы **C** могут быть использованы только такие аксиомы, которые являются частными случаями схем *302, *303, *304 и поэтому являются подстановковыми частными случаями аксиом исчисления P, а единственным используемым правилом вывода должен быть *модус поненс.* Из этого мы выводим последовательно для каждой пп-формулы полученного доказательства формулы **C**, что она является подстановковым частным случаем некоторой теоремы из P. В конце концов мы получаем, что и **C** — подстановковый частный случай некоторой теоремы исчисления P, т. е. подстановковый частный случай некоторой тавтологии исчисления P.

Заметим, между прочим, что **324 дает нам новое доказательство непротиворечивости исчисления F^1. Действительно, абсолютную непротиворечивость исчисления F^1 можно вывести из ** 324 с помощью примера бескванторной формулы, не являющейся подстановковым частным случаем какой-либо тавтологии. А непротиворечивость исчисления F^1 относительно преобразования **A** в $\sim$ **A** следует из того, что в силу *311 и закона отрицания антецедента

$$\sim p \supset . p \supset . q$$

всякая пп-формула была бы теоремой, если бы какая-нибудь формула **A** была теоремой одновременно с $\sim$ **A**. (И это доказательство непротиворечивости исчисления F^1 также не опирается ни на какое общее решение проблемы разрешения для F^1, но предполагает решение проблемы разрешения для частного случая бескванторных формул.)

Теперь, в частности, пп-формула $F(x) \supset F(y)$ есть бескванторная формула исчисления F^{1p}, которая не является подстановковым частным случаем тавтологии и, следовательно, не является теоремой, хотя она и имеет тавтологию своей пфпи. Это можно обобщить следующим образом. Если $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная или n-арная функциональная константа и если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — индивидные переменные или индивидные константы, то

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \supset \mathbf{f}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$$

имеет своей пфпи тавтологию, но не является теоремой исчисления F^1, если только $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ не совпадают соответственно с $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Доказательство метатеоремы **320 не использует никаких свойств аксиом исчисления F^1, за исключением того, что каждая аксиома имеет своей пфпи тавтологию. Следовательно, присоединение к исчислению F^1 новой аксиомы, имеющей в качестве пфпи тавтологию, не изменило бы того обстоятельства, что каждая теорема системы имеет тавтологию своей пфпи, и поэтому не нарушило бы непротиворечивости системы. Из этого следует, что F^1 не полна ни в одном из определенных в § 18 смыслов. В частности:

****325.** F^1 не полна относительно преобразования **A** в $\sim$**A** и не полна также абсолютно.

Однако в § 44 мы докажем для системы F^{1p} и для эквивалентной ей системы F^{1p}_2 теорему полноты, устанавливая тем самым их полноту в более слабом смысле.

Неполноту исчисления F^{1p} можно просто объяснить с точки зрения интерпретации. Пп-формула $F(x) \supset F(y)$, например, принимает значение t для всех значений своих свободных переменных, если в интерпретации имеется точно один индивид. То же самое имеет место и независимо от числа индивидов, если интерпретация отличается от главной тем, что область значений всех сингулярных функциональных переменных — или только некоторых сингулярных функциональных переменных, среди которых, однако, находится переменная F, — ограничена двумя специальными сингулярными пропозициональными функциями индивидов, а именно пропозициональной функцией, всегда принимающей значение t, и пропозициональной функцией, всегда принимающей значение f. (Легко проверить, что такого рода интерпретация, не будучи главной, является все же правильной интерпретацией.) Если рассматриваются только такие интерпретации, как эти, то естественно ожидать, что $F(x) \supset F(y)$ является теоремой, а если нет, то добавить ее к числу аксиом. Однако в других главных интерпретациях исчисления F^1, в которых число индивидов превосходит единицу, ппф $F(x) \supset F(y)$ принимает значение t не для всех значений своих свободных переменных и поэтому для правильности интерпретации не должна быть теоремой.

Теорема полноты § 44 будет (семантически) утверждать, что теоремами являются все те пп-формулы исчисления F^{1p}, которые во всякой главной интерпретации принимают значение t для всех значений своих свободных переменных. Следовательно, теоремы любого функционального исчисления первого порядка можно описать, сказав, что это такие пп-формулы, которые истинны при естественной интерпретации связок и кванторов (1) для всех значений свободных переменных, (2) независимо от денотатов, приписанных константам, и (3) независимо от природы и числа индивидов, — если только индивиды существуют, значения индивидных переменных и денотаты индивидных констант ограничены индивидами, значения пропозициональных переменных ограничены истинностными значениями, а значения n-арных функциональных переменных и денотаты n-арных функциональных констант ограничены n-арными пропозициональными функциями индивидов.

33. Некоторые теоремные схемы исчисления F^1. *Теоремная схема* — это синтаксическое выражение, которое представляет множество теорем логистической системы (обычно — бесконечное число различных теорем) так же, как аксиомная схема представляет множество различных аксиом. При изучении исчисления F^1 мы будем оперировать не с отдельными теоремами, а с теоремными схемами, и для каждой теоремной схемы мы будем с помощью *схемы доказательства* эффективно показывать, что каждая представляемая ею отдельная теорема может быть доказана. Как и в случае производных правил вывода (рассмотренных в главе I), это оправдывается упомянутой эффективностью, которая позволяет по первому требованию представить конкретное доказательство любой теоремы, выраженной данной теоремной схемой. Таким образом, наши действия будут заключаться не в фактическом формальном построении системы F^1, а в указании эффективных инструкций, которыми следует руководствоваться при фактическом построении системы. Важно помнить, что теоремные схемы являются в действительности синтаксическими теоремами о системе F^1, и лишь их *частные случаи* — отдельные представляемые ими теоремы — суть теоремы исчисления F^1.

*330. $\vdash \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}| \supset (\exists \mathbf{a})\mathbf{A}$, где $\mathbf{a}$ — индивидная переменная, $\mathbf{b}$ — индивидная переменная или индивидная константа и никакое свободное вхождение $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в пп-части формулы $\mathbf{A}$ вида $(\mathbf{b})\,\mathbf{C}$.

Доказательство. По *306, $\vdash (\mathbf{a}) \sim \mathbf{A} \supset \sim \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}|$. Следовательно, в силу P [319], имеем $\vdash \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}| \supset \sim (\mathbf{a}) \sim \mathbf{A}$ [320].

*331. $\vdash (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{A}$ [321].

Доказательство. По *306, $\vdash (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$ [322]. По *330, $\vdash \mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{A}$ [323].

Затем используется закон транзитивности импликации [324].

*332. $\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Доказательство. По *306, $\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ [325]. Вновь по *306, $\vdash (\mathbf{a})\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$ [325].

После этого используем P [326].

*333. $\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

Доказательство. По *332 и правилу обобщения [327],
$\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Следовательно, по *305, $\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B}$ [328].
По *305, $\vdash (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

После этого используется закон транзитивности импликации [324].

*334. $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \equiv (\mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

Доказательство. По P, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Следовательно, по правилу обобщения и *333 [329], $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B}$.
Следовательно, по *333 и закону транзитивности импликации, $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

Далее, в силу P, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

Отсюда аналогичной серией шагов мы получаем $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} (\mathbf{a})\,\mathbf{B} \supset (\mathbf{a})\,\mathbf{A}$.

После этого используется P.

*335. $\vdash \mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})\, \mathbf{B} \equiv_{\bullet} \mathbf{A} \supset_{\mathfrak{a}} \mathbf{B}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. По *306, $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{B} \supset \mathbf{B}$.
Следовательно, в силу Р, $\vdash \mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})\, \mathbf{B} \supset_{\bullet} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.
Следовательно, по правилу обобщения и *305, $\vdash \mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})\, \mathbf{B} \supset_{\bullet} \mathbf{A} \supset_{\mathfrak{a}} \mathbf{B}$.
После этого используется *305 и Р.

*336. $\vdash (\mathfrak{a})\, (\mathfrak{b})\mathbf{A} \equiv (\mathfrak{b})\, (\mathfrak{a})\, \mathbf{A}$.

Доказательство. По *306, $\vdash (\mathfrak{b})\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$.
Следовательно, по правилу обобщения и *333, $\vdash (\mathfrak{a})(\mathfrak{b})\mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})\mathbf{A}$.
Следовательно, по правилу обобщения и *305, $\vdash (\mathfrak{a})(\mathfrak{b})\mathbf{A} \supset (\mathfrak{b})(\mathfrak{a})\mathbf{A}$.
Аналогично получаем $\vdash (\mathfrak{b})(\mathfrak{a})\mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})(\mathfrak{b})\mathbf{A}$.
После этого используется Р.

*337. $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. В силу Р, $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{A}$.
Следовательно, в силу правила обобщения и *305, $\vdash \mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})\mathbf{A}$.
По *306, $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$.
После этого используется Р.

*338. $\vdash \sim (\exists \mathfrak{a})\mathbf{A} \equiv (\mathfrak{a}) \sim \mathbf{A}$.

Доказательство. В силу Р, $\vdash \sim \sim (\mathfrak{a}) \sim \mathbf{A} \equiv (\mathfrak{a}) \sim \mathbf{A}$.

*339. $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \equiv (\mathfrak{b})\mathbf{B}$, если $\mathbf{B}$ есть $S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}\,|$, в $\mathbf{A}$ нет свободных вхождений $\mathfrak{b}$ и никакое свободное вхождение $\mathfrak{a}$ в $\mathbf{A}$ не входит в пп-часть формулы $\mathbf{A}$ вида $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$.

Доказательство. По *306, $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Следовательно, обобщая по переменной $\mathfrak{b}$ и используя затем *305, мы получаем $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \supset (\mathfrak{b})\mathbf{B}$. Далее, отношение между пп-формулами $(\mathfrak{a})\mathbf{A}$ и $(\mathfrak{b})\mathbf{B}$ взаимно, т. е. $\mathbf{A}$ есть $S^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}\mathbf{B}\,|$, в $\mathbf{B}$ нет свободных вхождений $\mathfrak{a}$ и никакое свободное вхождение $\mathfrak{b}$ в $\mathbf{B}$ не входит в пп-часть формулы $\mathbf{B}$ вида $(\mathfrak{a})\mathbf{D}$. Поэтому таким же образом получаем $\vdash (\mathfrak{b})\mathbf{B} \supset (\mathfrak{a})\mathbf{A}$. Поэтому, в силу Р, имеем $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \equiv (\mathfrak{b})\mathbf{B}$.

34. Подстановочность эквивалентности. В этом параграфе мы установим правило подстановочности эквивалентности (*342) и некоторые связанные с ним производные правила вывода. (Ср. *158, *159, 15.3 в пропозициональном исчислении.)

*340. Если $\mathbf{B}$ получается подстановкой $\mathbf{N}$ вместо нуля или большего числа вхождений $\mathbf{M}$ в $\mathbf{A}$ (не обязательно вместо всех вхождений $\mathbf{M}$ в $\mathbf{A}$) и если $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — некоторый перечень индивидных переменных, в числе которых во всяком случае имеются те свободные переменные формул **M** и **N** которые одновременно входят в качестве связанных пере менных в **A**, то $\vdash \mathbf{M} \equiv_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{N} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Доказательство. Мы применяем математическую индукцию по числу вхождений символов $\supset$, $\sim$, $\forall$ в формуле **A** аналогично тому, как мы это делали при доказательстве *229.

Вначале мы рассмотрим два частных случая: (a) когда **N** подставляется вместо нуля вхождений **M** в **A**; (b) когда **M** совпадает с **A** и **N** подставляется вместо этого одного вхождения **M** в **A**. В случае (a) **B** совпадает с **A** и поэтому, в силу P, мы имеем $\vdash \mathbf{M} \equiv_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{N} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. В случае (b) **A** и **B** совпадают с **M** и **N** соответственно, поэтому с помощью n-кратного применения *306 [330] и закона транзитивности импликации мы получаем $\vdash \mathbf{M} \equiv_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{N} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Если теперь общее число вхождений символов $\supset$, $\sim$ и $\forall$ в **A** равно 0, то должен иметь место один из случаев (a) или (b), и как мы видели, утверждение метатеоремы *340 получается легко. Рассмотрим поэтому пп-формулу **A**, в которой это общее число больше нуля; возможны следующие три случая:

Случай 1. **A** имеет вид $\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2$. Тогда [если только не имеет места только что рассмотренный случай (b)] **B** имеет вид $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ получаются подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ соответственно. По предположению индукции,

$$\vdash \mathbf{M} \equiv_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{N} \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{B}_1,$$

$$\vdash \mathbf{M} \equiv_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{N} \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{B}_2.$$

Отсюда мы получаем результат * 340 с помощью P, используя соответствующий подстановковый частный случай тавтологии

$$[p \supset_{\centerdot} q_1 \equiv r_1] \supset_{\centerdot} [p \supset_{\centerdot} q_2 \equiv r_2] \supset_{\centerdot} p \supset_{\centerdot} q_1 \supset q_2 \equiv_{\centerdot} r_1 \supset r_2.$$

Случай 2. **A** имеет вид $\sim \mathbf{A}_1$. Тогда [если только не имеет места уже рассмотренный случай (b)] **B** имеет вид $\sim \mathbf{B}_1$, где $\mathbf{B}_1$ получается подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в $\mathbf{A}_1$. По предположению индукции,

$$\vdash \mathbf{M} \equiv_{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathbf{N} \supset_{\centerdot} \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{B}_1.$$

Отсюда мы получаем утверждение метатеоремы *340 с помощью P, используя соответствующий подстановковый частный случай тавтологии

$$[p \supset_{\centerdot} q \equiv r] \supset_{\centerdot} p \supset_{\centerdot} \sim q \equiv \sim r.$$

Случай 3. **A** имеет вид $(\mathbf{a})\mathbf{A}_1$. Тогда [если только не имеет места уже рассмотренный частный случай (b)] **B** имеет вид $(\mathbf{a})\mathbf{B}_1$, где $\mathbf{B}_1$ получается подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в $\mathbf{A}_1$. По предположению индукции,

$$\vdash \mathbf{M} \equiv_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n} \mathbf{N} \supset_{\mathbf{.}} \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{B}_1.$$

Отсюда, обобщая по **a** и применяя затем *305 [331], мы получаем

$$\vdash \mathbf{M} \equiv_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n} \mathbf{N} \supset_{\mathbf{.}} \mathbf{A}_1 \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B}_1.$$

Теперь можно получить утверждение метатеоремы *340 с помощью * 334 и закона транзитивности импликации.

Таким образом, доказательство метатеоремы *340 посредством математической индукции закончено полностью.

В качестве следствий получаем две остающихся метатеоремы настоящего параграфа:

*341. Если **B** получается подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**) и если $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$, то $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Доказательство. По *340, *301 и *300.

* 342. Если **B** получается подстановкой **N** вместо нуля или большего числа вхождений **M** в **A** (не обязательно вместо всех вхождений) и если $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$ и $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B}$. [*Правило подстановочности* (*материальной*) *эквивалентности*.]

Доказательство. По *341 и P.

Упражнения к § 34

34.0. Используя результаты § 32, покажите, что следующие формулы не являются теоремами исчисления F^{1p}:

(1) $$F(x) \supset_x G(x) \supset (\exists x)_{\mathbf{.}} F(x)\, G(x).$$

(2) $$(\exists x)\, F(x) \supset (x)\, F(x).$$

(3) $$F(x) \supset_{x\,\mathbf{.}} F(y) \supset_y [G(x) \supset G(y)] \vee (z)\, F(z).$$

34.1. Покажите, что всякое доказательство пп-формулы вида (**a**)**A** в качестве теоремы исчисления F^1 должно содержать применение правила обобщения (*301), в котором переменной, по которой проводится обобщение, является **a** [332].

34.2. В какой мере может быть в *340 ослаблено требование, чтобы в числе переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ были все свободные переменные формул **M** и **N**, которые одновременно являются связанными переменными в **A**?

Докажите следующие теоремные схемы исчисления F^1, *используя при этом результаты* §§ 30—34, *но не используя результатов дальнейших параграфов:*

34.3. Теоремная схема, для которой $(x)(y)\,F(x, y) \supset (y)\,F(y, y)$ является основным частным случаем.

34.4. $\vdash \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \supset_{\bullet} (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

34.5. $\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\bullet} (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

34.6. $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\bullet} (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{A} \equiv (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

35. Производные правила подстановки. Используя метод аксиомных схем, описанный в § 27, мы сформулировали систему F^1, не применяя правил подстановки в качестве исходных правил вывода. Этот путь кажется даже единственно возможным в случае простых прикладных функциональных исчислений первого порядка. Однако, как мы увидим в § 40, в тех случаях, когда имеется достаточно сильный аппарат переменных, возможна другая формулировка, в которой имеются исходные правила подстановки (в дополнение к правилам *модус поненс* и обобщения) и число аксиом в которой конечно.

В настоящем параграфе мы получим эти правила вывода в качестве производных правил исчисления F^1. При этом нам нет необходимости различать отдельные виды функционального исчисления первого порядка, так как в действительности эти правила имеют место даже в случае простого прикладного функционального исчисления первого порядка. Однако в тех случаях, когда отсутствует какой-либо частный вид переменных, правило подстановки для переменных этого вида превращается, разумеется, в тривиальность.

*350. Пусть $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, не являющаяся свободной в $\mathbf{N}$, и $\mathbf{b}$—индивидная переменная, не входящая в $\mathbf{N}$; если $\mathbf{B}$ получается из $\mathbf{A}$ подстановкой формулы $\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{N}|$ вместо частного вхождения формулы $\mathbf{N}$ в $\mathbf{A}$ и если $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B}$.

[*Правило алфавитной замены связанной* (*индивидной*) *переменной.*]

Доказательство. В силу *339 и *342 [берем одну за другой различные пп-части формулы $\mathbf{N}$ вида $(\mathbf{a})\mathbf{A}_i$ в порядке появления слева направо их начальных символов].

*351. Пусть $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, а $\mathbf{b}$ — индивидная переменная или индивидная константа, причем никакое свободное вхождение $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ не входит в пп-часть формулы $\mathbf{A}$ вида $(\mathbf{b})\mathbf{C}$. Если $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}|$.

(*Правило подстановки индивидных переменных.*)

Доказательство. Это следует из *301 и *306.

Для того чтобы сформулировать правило подстановки для пропозициональных и функциональных переменных, мы вводим новое обозначение подстановки, используя для него букву Š.

Пусть **p** — пропозициональная переменная. Тогда выражение

$$\check{S}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$$

стоит вместо[333] **A**, если не выполнено следующее условие: (1) никакая пп-часть формулы **A** вида (**b**)**C**, где **b** является свободной переменной в **B**, не содержит свободных[334] вхождений **p**; если же это условие выполнено, то указанное выражение стоит вместо[333]

$$S^{\mathbf{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|.$$

Если **f** есть n-арная функциональная переменная, а $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — различные индивидные переменные, то выражение

$$\check{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$$

стоит вместо[335] **A**, если не выполнены следующие два условия: (1) никакая пп-часть формулы **A** вида (**b**)**C**, где **b** — отличная от $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ свободная переменная в **B**, не содержит свободных[336] вхождений **f**; (2) для произвольной n-ки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ индивидных переменных или индивидных констант (или и тех и других, причем не обязательно всех различных), для которой $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ имеет в **A** такое вхождение, в котором **f** входит в **A** свободно[336], никакая пп-часть формулы **B** вида $(\mathbf{a}_1)\mathbf{C}$, или $(\mathbf{a}_2)\mathbf{C}$,..., или $(\mathbf{a}_n)\mathbf{C}$, не содержит свободных вхождений переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ соответственно[337]. Если же эти два условия выполнены указанное выражение стоит вместо[335] результата замещения всех вхождений $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ в **A**, в которых **f** свободно[336], формулой

$$S^{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n}_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n}\mathbf{B}|,$$

причем это замещение должно быть осуществлено одновременно для всех упорядоченных n-ок $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ индивидных переменных или индивидных констант (или и тех и других, причем не обязательно всех различных), для которых $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ имеет такие вхождения в **A**, в которых **f** свободно.

*352_0. Если **p** — пропозициональная переменная и если $\vdash \mathbf{A}$, то

$$\vdash \check{S}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|.$$

(*Правило подстановки вместо пропозициональных переменных.*)

*352_n. Если **f** есть n-арная функциональная переменная, а $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — различные индивидные переменные и если

$\vdash \mathbf{A}$, то

$$\vdash \check{S}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)} \mathbf{A} \,|\,.$$

(*Правило подстановки вместо n-арных функциональных переменных.*)

Доказательство. Доказательство метатеорем *352$_0$, *352$_n$ аналогично доказательству метатеоремы **271.

Мы вводим в рассмотрение пп-формулу $\mathbf{B}'$, получающуюся из пп-формулы $\mathbf{B}$ такой алфавитной заменой связанных и свободных индивидных переменных пп-формулы $\mathbf{B}$, что: (i) никакие входящие в $\mathbf{B}'$ индивидные переменные нигде не встречаются в данном доказательстве пп-формулы $\mathbf{A}$ и (ii) одна и та же переменная имеет в $\mathbf{B}'$ вхождения в двух местах тогда и только тогда, когда в соответствующих местах в $\mathbf{B}$ находятся вхождения одной и той же переменной. Пусть y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — переменная, которая входит в $\mathbf{B}'$ вместо переменной x_i в $\mathbf{B}$, а если x_i не входит в $\mathbf{B}$, то пусть y_i — произвольная, до того не встречавшаяся индивидная переменная.

Мы замечаем, что если $\mathbf{E}$ является какой-нибудь аксиомой, встречающейся в данном доказательстве пп-формулы $\mathbf{A}$, то

$$\check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{p}} \mathbf{E} \,| \quad \text{или} \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)} \mathbf{E} \,|$$

(смотря по случаю) тоже является аксиомой.

Далее, пусть $\mathbf{C} \supset \mathbf{D}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ будут соответственно посылками и заключением в некотором применении правила *модус поненс* в данном доказательстве пп-формулы $\mathbf{A}$. Тогда

$$\check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{p}} \mathbf{C} \supset \mathbf{D} \,|, \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{p}} \mathbf{C} \,|, \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{p}} \mathbf{D} \,|$$

или

$$\check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)} \mathbf{C} \supset \mathbf{D} \,|, \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)} \mathbf{C} \,|, \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)} \mathbf{D} \,|$$

(смотря по случаю) также являются посылками и заключением некоторого применения правила *модус поненс* [338].

Пусть далее, $\mathbf{C}$ и $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$ — посылка и заключение в некотором применении правила обобщения в данном доказательстве пп-формулы $\mathbf{A}$. Тогда

$$\check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{p}} \mathbf{C} \,|, \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{p}} (\mathfrak{b}) \mathbf{C} \,|$$

или

$$\check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)} \mathbf{C} \,|, \quad \check{S}_{\mathbf{B}'}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)} (\mathfrak{b}) \mathbf{C} \,|$$

также являются посылкой и заключением некоторого применения правила обобщения [339].

Если поэтому в данном доказательстве

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$$

пп-формулы **A** мы заменим каждую пп-формулу $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) на

$$\check{S}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{B}'}\mathbf{A}_i| \quad \text{или} \quad \check{S}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)}_{\mathbf{B}'}\mathbf{A}_i|,$$

то мы получим доказательство пп-формулы

$$\check{S}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{B}'}\mathbf{A}| \quad \text{или} \quad \check{S}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)}_{\mathbf{B}'}\mathbf{A}|$$

(смотря по случаю).

Для того чтобы получить требуемое доказательство пп-формулы

$$\check{S}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}| \quad \text{или} \quad \check{S}^{\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$$

(если, конечно, эта пп-формула с самого начала не совпадает с **A**, что делало бы всю проблему тривиальной), мы используем только что найденное доказательство пп-формулы

$$\check{S}^{\mathrm{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}| \quad \text{или} \quad \check{S}^{\mathrm{f}(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n)}_{\mathbf{B}'}\mathbf{A}|$$

и дополняем его серией шагов, в которых требуемые алфавитные замены связанных индивидных переменных осуществляются с помощью *339 и *342 (как в доказательстве метатеоремы *350), а требуемые подстановки вместо свободных индивидных переменных осуществляются с помощью *301 и *306 (как в доказательстве метатеоремы *351) [340]. Для того чтобы внести в этот вопрос определенность, мы можем условиться, что вначале совершаются требуемые алфавитные замены связанных переменных в алфавитном порядке заменяемых переменных, а для каждой переменной в порядке появления слева направо вхождений пп-формулы **B′**; затем совершаются требуемые подстановки в алфавитном порядке подлежащих замене переменных.

Этим завершается доказательство метатеорем $*352_0$, $*352_n$, за исключением лишь того, что для возможности использования этих метатеорем в качестве производных правил вывода необходимо явно указать порядок выбора индивидных переменных пп-формулы **B′** и индивидных переменных $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n$. Мы сделаем это следующим образом. Вначале берутся различные индивидные переменные из **B** в порядке их первых вхождений в **B** и после этого остающиеся (если таковые окажутся) переменные из $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ в их порядке. Каждой из них приписывается (в **B′** или среди $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_n$) первая в алфавитном порядке переменных переменная, которая не встречается нигде в данном доказательстве пп-формулы **A** и не была до этого уже приписана [341].

Упражнения к § 35

35.0. В какой мере можно в *350 ослабить требование, чтобы $\mathfrak{a}$ не было свободно в **N**, а $\mathfrak{b}$ не входило в **N**, (1) если остальная часть метатеоремы остается неизменной и (2) если вместо $S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{N}|$ используется результат подстановки **b** вместо связанных вхождений **a** в **N** ?

35.1. В каждом из следующих случаев выпишите результат указанной подстановки:

(1) $\check{S}^{F(x,\, y)}_{(z)\,[F(y,\, z)\, \supset\, G(x,\, y)]}\,(\exists x)\,(y)\,F(y,\, x) \supset (\exists x)\,F(x,\, x)\,|$.

(2) $\check{S}^{F(x)}_{(y)\,F(x,\, y)}\,(x)\,F(x) \supset F(y)\,|$.

(3) $\check{S}^{F(x,\, y)}_{(x)\,G(x)\, \supset\, G(y)}\,F(x,\, z) \supset (\exists y)\,F(y,\, z)\,|$.

(4) $\check{S}^{F(x,\, y)}_{G(x,\, y,\, z)}\,F(x,\, y) \supset_{xy} (\exists z)\,F(x,\, z)\,|$.

(5) $\check{S}^{F(x,\, y)}_{G(x,\, z)\, \supset\, (y)\,G(y,\, z)}\,F(y,\, z) \supset_x G(x,\, y) \supset_{yz}\,.\, F(y,\, z) \supset (z)\,G(z,\, y)\,|$.

(6) $\check{S}^{F(x,\, y)}_{F(x,\, z)\, \supset\, F(z,\, y)}\,(x)\,F(z,\, x) \vee (y)\,F(y,\, z) \supset F(z,\, z)$.

35.2. Для того чтобы убедиться в невозможности отказаться от условий (1) и (2), фигурирующих в определении обозначения

$$\check{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2,\, \ldots,\, \mathbf{x}_n)}_{\mathbf{B}}\,\mathbf{A}\,|,$$

покажите на примерах, что $*352_1$ перестало бы быть верным, если бы какое-нибудь из условий (1) или (2) было опущено.

36. Теорема дедукции. Мы теперь докажем *теорему дедукции* для исчисления F^1, аналогичную теореме дедукции для пропозиционального исчисления (ср. § 13).

Понятие *варианта* некоторой пп-формулы, введенное в § 13 для системы P_1, можно естественным образом распространить на пп-формулы исчисления F^1 или других формулировок функционального исчисления первого порядка. А именно, вариант $\mathbf{B}'$ некоторой пп-формулы $\mathbf{B}$ отличается от $\mathbf{B}$ только такой алфавитной заменой всевозможных переменных пп-формулы $\mathbf{B}$ (связанных или свободных, индивидных, пропозициональных или функциональных), что одна и та же переменная встречается на двух местах пп-формулы $\mathbf{B}'$ тогда и только тогда, когда на соответствующих местах в пп-формуле $\mathbf{B}$ также стоит одна переменная. Что касается теоремы дедукции для исчисления F^1, то нам достаточно заметить, что вариант всякой аксиомы также является аксиомой. Однако в других случаях, как, например, в случае вводимой в § 40 формулировки функционального исчисления первого порядка, это уже не будет иметь места, и в таких случаях понятие варианта должно играть в нашем использовании теоремы дедукции роль, аналогичную той, которую это понятие играло в § 13.

Конечная последовательность пп-формул $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ исчисления F^1 называется *доказательством из гипотез* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, если для каждого i: либо (1) $\mathbf{B}_i$ является одной из пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$; либо (2) $\mathbf{B}_i$ является аксиомой; либо (3) $\mathbf{B}_i$ получается согласно *300 из большой посылки $\mathbf{B}_j$ и малой посылки $\mathbf{B}_k$, где $j < i$, $k < i$; либо (4) $\mathbf{B}_i$ получается согласно *301 (правило обобщения) из посылки $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где переменная, по которой проводится обобщение, не входит в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$; либо (5) $\mathbf{B}_i$ получается алфавитной заменой переменных в соответствии с *350 [342] из посылки $\mathbf{B}_j$, где $j < i$; либо (6) $\mathbf{B}_i$ получается согласно *351 [342] с помощью подстановки в посылку $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где заменяемая переменная $\mathbf{a}$ не входит в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$; либо (7) $\mathbf{B}_i$ получается согласно *352 [342] с помощью подстановки в посылку $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где заменяемая переменная $\mathbf{p}$ или $\mathbf{f}$ не входит в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

Такая конечная последовательность пп-формул, в которой $\mathbf{B}_m$ является последней пп-формулой, называется, более подробно, доказательством *пп-формулы* $\mathbf{B}_m$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. И мы используем (синтаксическое) обозначение

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_m$$

в качестве обозначения того, что существует доказательство пп-формулы $\mathbf{B}_m$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$.

При этом не исключается частный случай $n = 0$. Ввиду пунктов (5), (6) и (7) предыдущего определения, доказательство из пустого класса гипотез — не то же самое, что просто доказательство. Тем не менее, мы будем в дальнейшем использовать знак $\vdash \mathbf{B}_m$ как в смысле § 30, обозначая им, что существует доказательство рассматриваемой пп-формулы, так и в смысле настоящего параграфа, для обозначения того, что существует ее доказательство из пустого класса гипотез. При этом мы будем полагаться на то, что *350—*352 всегда дадут нам возможность (эффективно) получить доказательство всякой пп-формулы, для которой известно доказательство из пустого класса гипотез [343].

*360. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$. (*Теорема дедукции.*)

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ — доказательство пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ (так что $\mathbf{B}_m$ совпадает с $\mathbf{B}$). Введем в рассмотрение конечную последовательность пп-формул $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_m$. Мы покажем, как вставить в эту последовательность конечное число дополнительных пп-формул таким образом, чтобы получившаяся последовательность была доказательством пп-формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_m$, т. е. $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$, из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$.

Рассмотрим некоторую частную пп-формулу $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$, и если $i > 1$, то предположим, что перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_{i-1}$ все необходимые пп-формулы уже вставлены. Могут встретиться следующие восемь случаев:

Случай 1a: $\mathbf{B}_i$ есть $\mathbf{A}_n$. Тогда $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ есть $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{A}_n$, т. е. является подстановковым частным случаем тавтологии $p \supset p$. Поэтому вставляем перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ те пп-формулы, которые образуют ее доказательство по методу, использованному при доказательстве *311. (При этом не производится никаких подстановок или обобщений.)

Случай 1b: $\mathbf{B}_i$ есть одна из пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$, скажем $\mathbf{A}_r$. Тогда $\mathbf{A}_r \supset . \mathbf{A} \supset \mathbf{B}_i$ является частным случаем аксиомной схемы *302 и, следовательно, аксиомой. Поэтому вставляем перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ две пп-формулы $\mathbf{A}_r \supset . \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ и $\mathbf{A}_r$, из которых $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ получается с помощью *300 (*модус поненс*).

Случай 2: $\mathbf{B}_i$ является аксиомой. Тогда $\mathbf{B}_i \supset . \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ является частным случаем аксиомной схемы *302 и, следовательно, аксиомой. Поэтому вставляем перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ две пп-формулы $\mathbf{B}_i \supset . \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ и $\mathbf{B}_i$, которые обе являются аксиомами и из которых $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ следует по *модус поненс*.

Случай 3: $\mathbf{B}_i$ получается согласно *модус поненс* из большой посылки $\mathbf{B}_j$ и малой посылки $\mathbf{B}_k$, где $j < i$, $k < i$. Тогда $\mathbf{B}_j$ имеет вид $\mathbf{B}_k \supset \mathbf{B}_i$. Поэтому вставляем перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ сначала пп-формулу $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j \supset . \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_k \supset . \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ (которая является частным случаем аксиомной схемы *303 и, следовательно, аксиомой), а затем пп-формулу $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_k \supset . \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$ (которая сама может быть получена с помощью *модус поненс* и из которой затем может быть получена с помощью *модус поненс* и пп-формула $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$, так как необходимые малые посылки $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$ и $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_k$ находятся в числе пп-формул, уже имеющихся в создаваемой последовательности).

Случай 4: $\mathbf{B}_i$ получено по правилу обобщения из посылки $\mathbf{B}_j$, где $j < i$. Тогда $\mathbf{B}_i$ имеет вид $(\mathbf{a})\mathbf{B}_j$, где $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, не входящая в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i$. Сначала вставляем перед $\mathbf{A}_i \supset \mathbf{B}_i$ пп-формулу $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B}_j \supset . \mathbf{A}_i \supset \mathbf{B}$ (так как $\mathbf{a}$ не является свободной переменной в $\mathbf{A}_n$ [344], то она является частным случаем *305 и, следовательно, аксиомой), а затем пп-формулу $\mathbf{A}_n \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B}_j$ (которая сама может быть получена с помощью обобщения из предшествующей пп-формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$, уже имеющейся в создаваемой последовательности [344], и из которой затем с помощью *модус поненс* можно получить пп-формулу $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$).

Случай 5: $\mathbf{B}_i$ получается согласно *350 при помощи алфавитной замены связанной переменной из посылки $\mathbf{B}_j$, где $j < i$. В этом случае $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$ получается из $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$ соответствующей алфавитной заменой связанной переменной.

Случай 6: $\mathbf{B}_i$ получается согласно *351 с помощью подстановки в посылку $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где заменяемая (индивидная) переменная не входит в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. В этом случае мы получаем $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ из $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$ с помощью той же самой подстановки [345].

Случай 7: $\mathbf{B}_i$ получается согласно *352 с помощью подстановки в посылку $\mathbf{B}_j$, где $j < i$ и где заменяемая (пропозициональная или функциональная) переменная не входит в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$. В этом случае мы получаем $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ из $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_j$ с помощью той же самой подстановки [345].

Этим завершается доказательство теоремы дедукции. В качестве частного случая для $n = 1$ мы получаем следствие:

*361. Если $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, то $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

В дальнейшем при доказательстве теорем или теоремных схем мы часто будем пользоваться теоремой дедукции в качестве производного правила вывода. В этом отношении существенно, что данное нами доказательство этой теоремы эффективно [346]. Мы предоставляем читателю самому убедиться в том, что это так, получив конкретное частное доказательство пп-формулы $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{A}_n$ с помощью случая 1a.

Следующие метатеоремы, *362 и *363 [347], также необходимы в связи с использованием теоремы дедукции в качестве производного правила вывода. Особенно часто мы будем молчаливо использовать *363 [348].

* 362. Если всякая пп-формула, которая хотя бы один раз встречается среди пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, встречается также хотя бы один раз среди пп-формул $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ и если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ — полный перечень таких переменных всех видов (индивидных, пропозициональных, функциональных), которые встречаются в качестве свободных переменных в $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$, но не встречаются в качестве свободных переменных в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ (хотя в качестве связанных переменных некоторые из них, быть может, и встречаются в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$). Тогда данное доказательство пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ может не являться вместе с тем доказательством пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ только вследствие того, что в нем производилось обобщение по какой-либо переменной из числа $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ или же подстановка вместо одной из этих переменных. Пусть поэтому $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ будут отличными друг от друга переменными, не входящими ни в $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$, ни в данное доказательство пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ и такими, что $\mathbf{c}_1$ принадлежит к тому же типу переменных (индивидных, пропозициональных, сингулярных функциональных, бинарных функциональных и т. д.), что и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{c}_2$ принадлежит к тому же типу переменных, что и $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{c}_3$ принадлежит к тому же типу переменных, что и $\mathbf{a}_3$, и т. д. Заменим повсюду в данном доказательстве пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ переменные $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ на переменные $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ соответственно. В результате мы получаем доказательство пп-формулы

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_l}_{\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\ldots\mathbf{c}_l}\mathbf{B}\,|$$

из гипотез $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_r$, где $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_r$ отличаются от $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ соответственно самое большее некоторой алфавитной заменой связанных переменных. Это доказательство превращается в доказательство пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_r$ путем добавления, если нужно, к его концу серии алфавитных замен связанных переменных и подстановок [согласно пунктам (5), (6) и (7) определения доказательства из гипотез]. Наконец, мы получаем доказательство пп-формулы $\mathbf{B}$ из гипотез $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$, добавляя, если нужно, для различных i пп-формулы, образующие доказательство пп-формулы $\mathbf{D}_i$ из $\mathbf{C}_i$ с помощью алфавитных замен связанных переменных.

Для того чтобы этой метатеоремой можно было пользоваться как производным правилом вывода, необходимо уточнить некоторые места описанного построения. Например, должны быть даны четкие указания относительно выбора переменных $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ делающие этот выбор однозначным. Детали этого уточнения очевидны, но громоздки и могут быть предоставлены читателю [349].

Полагая в *362 $n = 0$, получаем в качестве следствия:

*363. Если $\vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

Переходим к доказательству нескольких производных правил (*366—*369), облегчающих использование квантора существования в связи с теоремой дедукции. Предварительно с помощью теоремы дедукции как производного правила вывода мы докажем две теоремные схемы (*364, *365).

*364. $\vdash \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \supset_{\blacksquare} (\exists \mathbf{a})\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. По *306, $\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

Следовательно, в силу P, имеем $\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \vdash \sim\mathbf{A} \supset \sim\mathbf{B}$.

Следовательно, в силу правила обобщения, $\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \vdash \sim\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \sim\mathbf{B}$ [350].

Следовательно, по *305, $\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \vdash \sim\mathbf{A} \supset (\mathbf{a}) \sim\mathbf{B}$.

Следовательно, в силу P, имеем $\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A} \vdash \sim(\mathbf{a}) \sim\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$. После этого используем теорему дедукции.

*365. $\vdash \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\blacksquare} (\exists \mathbf{a})\mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{a})\mathbf{B}$.

Доказательство. По *306, $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Следовательно, в силу P, $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \vdash \sim\mathbf{B} \supset \sim\mathbf{A}$.

Следовательно, в силу правила обобщения, $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \vdash \sim \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \sim \mathbf{A}$ [350].

Следовательно, по *333, $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \vdash (\mathbf{a}) \sim \mathbf{B} \supset (\mathbf{a}) \sim \mathbf{A}$.

Следовательно, в силу P, $\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \vdash \sim (\mathbf{a}) \sim \mathbf{A} \supset \sim (\mathbf{a}) \sim \mathbf{B}$.

После этого используем теорему дедукции.

*366. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ и если $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, не являющаяся свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$, $\mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, (\exists \mathbf{a})\mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ [351].

Доказательство. В силу теоремы дедукции,

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}.$$

Отсюда, обобщая по $\mathbf{a}$ и используя затем *364, мы получаем

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}.$$

Следовательно, по *модус поненс*,

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}.$$

*367. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, не являющаяся свободной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A}_n \vdash (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{B}$.

Доказательство. Доказывается так же, как и *366, но вместо *364 используется *365.

*368. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, не являющаяся свободной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}$, $\mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}, (\exists_n \mathbf{a})\, \mathbf{A}_{n-r+1}\, \mathbf{A}_{n-r+2} \ldots \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$.

Доказательство. В силу P,

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}, \mathbf{A}_{n-r+1}, \mathbf{A}_{n-r+2} \ldots \mathbf{A}_i \vdash \mathbf{B}.$$

Отсюда, используя *366, получаем требуемое.

*369. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, не являющаяся свободной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}, (\exists \mathbf{a})_{\blacksquare}\, \mathbf{A}_{n-r+1}\, \mathbf{A}_{n-r+2} \ldots \mathbf{A}_n \vdash (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{B}$.

Доказательство проводится так же, как и для *368, но вместо *366 используется *367.

37. Дуальность. Как и в § 16, мы начинаем применять процесс дуализации не к пп-формулам, а к выражениям, которые в соответствии с некоторыми определениями являются сокращениями пп-формул. А именно, мы допускаем сокращения в соответствии с D3—11 и D14, но не допускаем сокращений ни в соответствии с другими определениями-схемами [352], ни с помощью опускания скобок. Для такого выражения мы получаем *дуальное* к нему выражение, или его *дуал*, одновременно взаимно заменяя друг другом элементы каждой из следующих пар связок и кванторов (или, точнее, каждую из следующих пар символов): $\supset$ и $\not\subset$, дизъюнкция и конъюнкция, $\equiv$ и $\not\equiv$, $\subset$ и $\not\supset$, $\bar{\vee}$ и $|$, $\forall$ и $\exists$ повсюду, где они встречаются.

Если имеется пп-формула исчисления F^1, то мы следующим образом получаем некоторый ее *дуал*: вначале выписываем какое-либо выражение, являющееся ее сокращением указанного вида, затем дуализируем это выражение и, наконец, записываем пп-формулу, сокращением которой является полученное выражение. В частности, роль выражения, являющегося сокращением исходной пп-формулы, может играть сама эта пп-формула, и в этом случае мы получаем ее *главный дуал*.

Из D3—11 и D14 видно, что любые два дуала некоторой пп-формулы могут быть преобразованы друг в друга с помощью серии шагов, каждый из которых состоит либо в замене пп-части вида $\sim\sim \mathbf{N}$ на $\mathbf{N}$, либо в замене пп-части вида $\mathbf{N}$ на $\sim\sim \mathbf{N}$ (т. е., как можно выразиться, в снятии или в добавлении двойного отрицания). Следовательно, ввиду P и *341:

*370. Если $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ являются дуалами пп-формулы $\mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$.

Для того чтобы доказать для исчисления F^1 принцип дуальности, аналогичный метатеореме *161, мы должны показать, что отрицание любого дуала всякой аксиомы исчисления F^1 является теоремой исчисления F^1 и что если мы в каком-нибудь правиле вывода исчисления F^1 заменим посылки и заключение на отрицания их дуалов, то получающееся правило является производным правилом вывода в исчислении F^1. Из этого будет тогда следовать, что отрицание дуала всякой теоремы исчисления F^1 всегда является теоремой исчисления F^1.

Начнем с правил вывода и рассмотрим вначале *300. Здесь посылками являются $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$, заключением — $\mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{A}_1$ является дуалом пп-формулы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{B}_1$ — дуалом пп-формулы $\mathbf{B}$. Тогда одним из дуалов пп-формулы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ является $\mathbf{A}_1 \not\subset \mathbf{B}_1$. Если $\vdash \sim_{\centerdot} \mathbf{A}_1 \not\subset \mathbf{B}_1$ и $\vdash \sim \mathbf{A}_1$, то $\vdash \sim \mathbf{B}_1$ в силу P. Следовательно, в силу *370 и P, если отрицание какого-либо дуала пп-формулы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и отрицание какого-либо дуала пп-формулы $\mathbf{A}$ являются теоремами, то отрицание всякого дуала пп-формулы $\mathbf{B}$ также есть теорема.

Аналогично рассмотрим *301. Посылкой является $\mathbf{A}$, а заключением — $(\mathbf{a})\mathbf{A}$. Из $\sim \mathbf{A}_1$, отрицания какого-либо дуала пп-формулы $\mathbf{A}$, мы можем получить вначале $(\mathbf{a}) \sim \mathbf{A}_1$ с помощью *301, а уже отсюда $\sim(\exists \mathbf{a})\mathbf{A}_1$ с помощью *338 и P. Это отрицание одного из дуалов заключения, из которого отрицание всякого другого дуала заключения получается с помощью *370 и P.

Обращаясь к аксиомам, мы видим, что один из дуалов какой-либо аксиомы, являющейся частным случаем аксиомной схемы *302, *303 или *304, должен иметь соответственно один из видов (где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$ — дуалы пп-формул $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ соответственно):

$$\mathbf{A}_1 \not\subset {}_{\blacksquare} \mathbf{B}_1 \not\subset \mathbf{A}_1;$$

$$\mathbf{A}_1 \not\subset [\mathbf{B}_1 \not\subset \mathbf{C}_1] \not\subset {}_{\blacksquare} \mathbf{A}_1 \not\subset \mathbf{B}_1 \not\subset {}_{\blacksquare} \mathbf{A}_1 \not\subset \mathbf{C}_1;$$

$$\sim \mathbf{A}_1 \not\subset \sim \mathbf{B}_1 \not\subset {}_{\blacksquare} \mathbf{B}_1 \not\subset \mathbf{A}_1.$$

А отрицание каждой такой пп-формулы является, как легко видеть, подстановковым частным случаем некоторой тавтологии и поэтому, в силу *311, теоремой. Из этого, в силу *370 и P, следует, что теоремой является и отрицание всякого другого дуала той же аксиомы.

В случае аксиомы, являющейся частным случаем аксиомной схемы *306, один из ее дуалов имеет вид

$$(\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{A}_1 \not\subset \dot{\mathrm{S}}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} \mathbf{A}_1|,$$

где $\mathfrak{a}$ — индивидная переменная, $\mathfrak{b}$ — индивидная переменная или индивидная константа и никакое свободное вхождение $\mathfrak{a}$ в $\mathbf{A}_1$ не находится в пп-части вида $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$ пп-формулы $\mathbf{A}_1$ [353]. Из * 330 и P следует, что отрицание этого есть теорема. Следовательно, в силу *370 и P, теоремой является и отрицание всякого другого дуала этой аксиомы.

Для того чтобы доказать, что отрицание всякого дуала аксиомы, являющейся частным случаем схемы *305, является теоремой, нам нужна лишь следующая теоремная схема исчисления F^1:

*371. $\vdash \mathbf{A} \not\subset (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B} \supset (\exists \mathfrak{a})\, {}_{\blacksquare} \mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. В силу P, имеем $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{A} \equiv \sim \sim {}_{\blacksquare} \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

Следовательно, по *364 и *342, $\vdash (\mathfrak{a}) \sim \sim [\mathbf{B} \supset \mathbf{A}] \supset {}_{\blacksquare} (\exists \mathfrak{a}) \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$.

Затем используется закон контрапозиции († 223).

Мы показали, таким образом, что для всякой аксиомы исчисления F^1 отрицание всякого ее дуала является теоремой исчисления F^1 и что правила вывода исчисления F^1 сохраняют это свойство. Следовательно, этим свойством обладает каждая теорема исчисления F^1, т. е.:

*372. Если $\vdash \mathbf{A}$ и если $\mathbf{A}_1$ является дуалом пп-формулы $\mathbf{A}$, то $\vdash \sim \mathbf{A}_1$. (*Принцип дуальности.*)

Как и в § 16, мы получаем с помощью P в качестве следствий два *специальных принципа дуальности*:

*373. Если $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и если $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ — дуалы пп-формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, то $\vdash \mathbf{B}_1 \supset \mathbf{A}_1$.
[*Специальный принцип дуальности для (материальной) импликации.*]

*374. Если $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ и если $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$ — дуалы пп-формул $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, то $\vdash \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{B}_1$.
[*Специальный принцип дуальности для (материальной) эквивалентности.*]

Мы будем называть *дуалом* теоремной схемы или аксиомной схемы исчисления F^1 следующее: (1) если схема имеет вид импликации, то теоремную схему, полученную из нее по *373; (2) если схема имеет вид эквивалентности, то теоремную схему, полученную из нее по *374; (3) в остальных случаях — теоремную схему, полученную из нее по *372. В случае (1) антецедент и консеквент схемы должны быть дуализированы в том виде, в каком они записаны, и в соответствии с приведенными в первом абзаце настоящего параграфа инструкциями; аналогично, в случае (2) обе части схемы должны быть дуализированы в том виде, в каком они записаны, и в случае (3) схема должна быть дуализирована в том виде, в каком она записана, и также в соответствии с инструкциями, данными в первом абзаце настоящего параграфа. Таким образом, дуалы некоторой теоремной или аксиомной схемы могут различаться тем, какие сокращения использованы при написании схемы, но для фактически написанной схемы ее дуал определен однозначно. Подразумевается, что прежде чем дуализировать некоторую схему, из нее следует удалить все те и только те сокращения, которые произведены с помощью опускания скобок или с помощью D12, D13, D15—17.

При выписывании дуала какой-либо теоремной или аксиомной схемы нижние индексы 1 жирных заглавных букв, указывающие дуализацию — которые мы использовали, например, при доказательстве метатеоремы *372 — могут быть опущены, так как всякая пп-формула является дуалом некоторой пп-формулы. Если с теоремными или аксиомными схемами связаны какие-либо условия, выраженные словами (как, например, в случае *305, *306, *339), то эти условия должны быть дуализированы в каком-либо подходящем смысле. Однако в тех случаях, с которыми нам придется фактически иметь дело, эти условия будут совпадать со своими дуалами или будут им эквивалентны, и их поэтому можно будет оставлять без изменений [354].

В качестве иллюстрации того, как дуализируются теоремные и аксиомные схемы, мы можем привести следующие примеры. Дуалом схемы *302 является теоремная схема, утверждающая, что

$$\vdash \mathbf{B} \not\subset \mathbf{A} \supset \mathbf{A}.$$

Дуалом схемы * 304 является теоремная схема, утверждающая, что

$$\vdash \mathbf{B} \not\subset \mathbf{A} \supset_{\centerdot} \sim \mathbf{A} \not\subset \sim \mathbf{B}.$$

Дуалом для *305 является *371. Дуалом для *306 служит *330. Дуалом для *330 является *306, или, более точно, ее дуалом является непосредственное следствие схемы *306 — теоремная схема, утверждающая, что всякий частный случай схемы *306 является теоремой. Дуалом схемы *331 служит схема *331, т. е., как мы будем говорить, схема *331 *самодуальна*.

Далее, следующие теоремные схемы являются дуалами соответственно теоремных схем *336, *337, *338, *339:

*375. $\vdash (\exists \mathfrak{a})(\exists \mathfrak{b})\, \mathbf{A} \equiv (\exists \mathfrak{b})(\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{A}$.

*376. $\vdash (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

*377. $\vdash \sim (\mathfrak{a})\, \mathbf{A} \equiv (\exists \mathfrak{a}) \sim \mathbf{A}$.

*378. $\vdash (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{A} \equiv (\exists \mathfrak{b})\, \mathbf{B}$, если в $\mathbf{A}$ нет свободных вхождений переменной $\mathfrak{b}$, никакое свободное вхождение переменной $\mathfrak{a}$ в пп-формулу $\mathbf{A}$ не находится в пп-части пп-формулы $\mathbf{A}$ вида $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}$ есть $\mathrm{S}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}|$.

38. Несколько дальнейших теоремных схем

*380. $\vdash (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B} \supset \mathbf{A} \equiv {}_{\centerdot} \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{A}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. Дуализируя *335, получаем $\vdash \mathbf{A} \not\subset (\exists \mathfrak{a})\mathbf{B} \equiv (\exists \mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$.

Следовательно, по *377 и P, $\vdash \mathbf{A} \not\subset (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B} \equiv \sim (\mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$. После этого применяем P.

*381. $\vdash (\mathfrak{a})\, \mathbf{A} \supset (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B} \equiv (\exists \mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Доказательство. В силу P, имеем $\vdash \sim \mathbf{A} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Отсюда с помощью обобщения и *365 получаем $\vdash (\exists \mathfrak{a}) \sim \mathbf{A} \supset (\exists \mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Следовательно, по *377 и P, $\vdash \sim (\mathfrak{a})\, \mathbf{A} \supset (\exists \mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Далее, по *302, правилу обобщения и * 365, $\vdash (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B} \supset (\exists \mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Следовательно, в силу P [355], $\vdash (\mathfrak{a})\mathbf{A} \supset (\exists \mathfrak{a})\mathbf{B} \supset (\exists \mathfrak{a})_{\centerdot}\, \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

По *306 и *модус поненс*, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}, (\mathfrak{a})\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$.

Следовательно, по *367, $(\exists \mathfrak{a})[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}], (\mathfrak{a})\, \mathbf{A} \vdash (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B}$.

Следовательно, по теореме дедукции, $\vdash (\exists \mathfrak{a})\, [\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \supset {}_{\centerdot} (\mathfrak{a})\, \mathbf{A} \supset (\exists \mathfrak{a})\, \mathbf{B}$.

Затем применяется P.

*382. $\vdash \mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{B} \equiv (\exists \mathbf{a})\,_{\blacksquare}\,\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. По *381, *337, и *342.

*383. $\vdash (\mathbf{a})\mathbf{B} \supset \mathbf{A} \equiv (\exists \mathbf{a})\,_{\blacksquare}\,\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. По *381, *376 и *342.

*384. $\vdash [\sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]\,[\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}] \equiv_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}$.

Доказательство. В силу P[355)], $\sim \mathbf{A} \supset \mathbf{C},\ \mathbf{B} \supset \mathbf{C} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

Следовательно, по P и *306, $[\sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]\,[\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}] \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$.

Отсюда с помощью обобщения получаем $[\sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]\,[\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}] \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}$.

Следовательно, $\vdash [\sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]\,[\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}] \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}$.

В силу *306 и P, имеем $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C} \vdash \sim \mathbf{A} \supset \mathbf{C}$.

Отсюда с помощью обобщения — $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C} \vdash \sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}$. Вновь применяя *306, P и обобщение, получаем $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C} \vdash \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}$.

Следовательно, в силу P, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C} \vdash [\sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]\,[\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]$.

Следовательно, $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C} \supset [\sim \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]\,[\mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{C}]$.

После этого применяем P.

*385. $\vdash (\mathbf{a})\,[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A} \vee (\mathbf{a})\,\mathbf{B}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. В силу *335 и P, $\vdash (\mathbf{a})\,[\sim \mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \equiv_{\blacksquare} \sim \mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

После этого используются P и *342.

*386. $\vdash (\mathbf{a})\,[\mathbf{B} \vee \mathbf{A}] \equiv (\mathbf{a})\,\mathbf{B} \vee \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. В силу *385, P и *342.

*387. $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\blacksquare} (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{A} \equiv (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{B}$.

Доказательство. По *340 и *350.

*388. $\vdash \mathbf{A} \equiv_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \equiv (\exists \mathbf{a})\,\mathbf{B}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

Доказательство. По *387, *376 и *342.

Упражнения к § 38

38.0. Выпишите полный перечень пп-формул, которые должны быть вставлены перед $\mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}_i$ в доказательстве теоремы дедукции *360, случай 1a.

38.1. Напишите дуалы теоремных схем *383—*388.

38.2. Выведите при помощи дуализации теоремную схему *365 в качестве следствия из *333.

38.3. Аналогично выведите при помощи дуализации теоремную схему *387 в качестве следствия из *334.

38.4. Аналогично выведите при помощи дуализации следствие из схемы *332 [в выражении которого знак „$\sim$" должен встречаться только как составная часть сокращения „$(\exists\mathbf{a})$", заменяющего собой „$\sim(\mathbf{a})\sim$", и, в частности, не должен встречаться знак „ $\not\subset$ "].

38.5. Докажите следующие теоремные схемы исчисления F^1:

(1) $\vdash (\mathbf{a})\, \mathbf{A}(\mathbf{a})\, \mathbf{B} \equiv (\mathbf{a}) \centerdot \mathbf{AB}$.

(2) $\vdash (\mathbf{a})\, \mathbf{A}(\exists\mathbf{a})\, \mathbf{B} \supset (\exists\mathbf{a}) \centerdot \mathbf{AB}$.

(3) $\vdash (\mathbf{a})(\exists\mathbf{b})\, [\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \equiv (\exists\mathbf{b})(\mathbf{a}) \centerdot \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ не свободно в $\mathbf{B}$.

(4) $\vdash (\mathbf{a})(\exists\mathbf{b})\, [\mathbf{B} \supset \mathbf{A}] \equiv (\exists\mathbf{b})(\mathbf{a}) \centerdot \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ не свободно в $\mathbf{B}$.

38.6. Формулировку F^{1i} *интуиционистского функционального исчисления первого порядка* можно задать следующим образом. Исходными символами являются символы исчисления F^1, к которым добавляется все необходимое для того, чтобы квантор существования был исходным квантором наравне с квантором всеобщности, а также для введения всех исходных сентенциональных связок системы P_2^i (см. 26.18). Правилами образования являются правила системы F^1, к которым естественным образом добавляются новые правила, соответствующие дополнительным исходным символам. Определение *связанного* и *свободного* вхождения переменной должно быть изменено следующим образом: некоторое вхождение переменной $\mathbf{a}$ в пп-формулу $\mathbf{A}$ называется связанным, если оно находится в пп-части формулы $\mathbf{A}$ вида $(\forall\mathbf{a})\mathbf{B}$ или $(\exists\mathbf{a})\mathbf{B}$, и называется свободным в противном случае. Из определений-схем, применявшихся в связи с системой F^1, сохраняются лишь D13, D15 и D16. Сохраняются те же соглашения относительно опускания скобок, включая и соглашение об употреблении больших точек, а также соглашение об опускании верхних индексов в функциональных переменных. Правилами вывода являются *300 и *301, т. е. те же правила, что и в системе F^1. В число аксиом входят все подстановковые частные случаи аксиом исчисления P_2, а также все частные случаи четырех дополнительных аксиомных схем, которые, с очевидно необходимыми изменениями, совпадают с *305, *306, *330, *364 [356].

Так же или почти так же, как в F^1, доказывается, что в системе F^{1i} имеет место (с очевидными изменениями) следующее: модифицированная форма метатеоремы *311, в которой место тавтологий исчисления P занимают теоремы системы P^i_2; *331—*337; *339. Выведите отсюда, что в F^{1i} имеют место *365 и *340—*342.

38.7. Докажите, что в F^{1i} имеет место правило алфавитной замены связанных переменных — *350. (Из этого следует, что в F^{1i} имеют место *351, *352, *360—*363, *366—*369; доказательства такие же, как и в F^1.)

38.8. Опираясь на результаты двух предыдущих упражнений, а также на результаты, касающиеся интуиционистского пропозиционального исчисления, полученные в упражнениях к § 26, докажите следующие теоремные схемы исчисления F^{1i}:

(1) $\vdash (\exists \mathbf{a}) \sim \mathbf{A} \supset \sim (\mathbf{a})\, \mathbf{A}$.

(2) $\vdash \sim (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A} \equiv (\mathbf{a}) \sim \mathbf{A}$.

(3) $\vdash (\exists \mathbf{a}) \sim \sim \mathbf{A} \supset \sim \sim (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A}$.

(4) $\vdash \sim \sim (\mathbf{a})\, \mathbf{A} \supset (\mathbf{a}) \sim \sim \mathbf{A}$.

(5) $\vdash (\exists \mathbf{a}) (\exists \mathbf{b})\, \mathbf{A} \equiv (\exists \mathbf{b}) (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A}$.

(6) $\vdash (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

(7) $\vdash (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{B} \supset \mathbf{A} \supset_{\blacksquare} \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

(8) $\vdash (\exists \mathbf{a}) [\mathbf{B} \supset \mathbf{A}] \supset_{\blacksquare} (\mathbf{a})\, \mathbf{B} \supset \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

(9) $\vdash (\exists \mathbf{a}) [\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{B}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

(10) $\vdash (\exists \mathbf{a}) [\mathbf{A} \vee \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A} \vee (\exists \mathbf{a})\, \mathbf{B}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}$.

38.9. Формулировка F^1_Γ (обычного, или неинтуиционистского) функционального исчисления первого порядка может быть получена из F^{1i} добавлением аксиомной схемы $\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A}$. Сформулируйте и докажите соответствующую метатеорему об эквивалентности систем F^1_Γ и F^1. (Ср. с 26.14.)

38.10. Формулировку F^{1m} *минимального функционального исчисления первого порядка* можно получить из F^{1i} исключением аксиомной схемы $\sim \mathbf{A} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ (без каких-либо иных изменений). Распространите на F^{1m} те из результатов 38.6—38.8, относящихся к F^{1i}, для которых это возможно.

38.11. Другая формулировка, F^{1m}_J, минимального функционального исчисления первого порядка может быть получена из F^{1i} отбрасыванием исходного символа $\sim$, введением нового исходного символа f (пропозициональной константы) и соответствующим изменением правил построения, правил вывода и аксиомных схем. (Три аксиомные схемы, которые явно содержат символ $\sim$, при этом отбрасываются; остальные аксиомные схемы и правила вывода остаются неизменными, если не считать того, что в результате изменения правил построения изменилось и понятие правильно построенной формулы; никакие новые аксиомные схемы и правила вывода не добавляются.) Докажите эквивалентность систем F^{1m} и F^{1m}_J в смысле, аналогичном § 23. (ср. 26.19.)

38.12. Определим с помощью рекурсии для всякой пп-формулы **A** системы F^1_J присоединенную пп-формулу **A*** следующим образом. Если **A** является отдельно взятой пропозициональной переменной или если **A** имеет вид $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, где **f** есть n-арная функциональная переменная или константа, а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — индивидные переменные или константы, то **A*** есть $\sim\sim \mathbf{A}$; $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]^*$ есть $\sim\sim [\mathbf{A}^* \supset \mathbf{B}^*]$; $[\mathbf{AB}]^*$ есть $\sim\sim [\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*]$; $[\mathbf{A} \vee \mathbf{B}]^*$ есть $\sim\sim [\mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*]$; $[\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}]^*$ есть $\sim\sim [\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{B}^*]$; если **C** есть $\sim \mathbf{A}$, то **C*** есть $\sim \mathbf{A}^*$; если **C** есть $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$, то **C*** есть $\sim\sim (\forall \mathbf{a})\mathbf{A}^*$; если **C** есть $(\exists \mathbf{a})\mathbf{A}$, то **C*** есть $\sim\sim (\exists \mathbf{a})\mathbf{A}^*$. Покажите, что **A** является теоремой в F^1_J тогда и только тогда, когда **A*** — теорема в F^{1m} [357]. (Это можно сделать, показав, что присоединенная пп-формула всякой аксиомы системы F^1_J является теоремой системы F^{1m} и что правила вывода сохраняют это свойство.)

38.13. Как было определено в § 30, *элементарными частями* пп-формулы исчисления F^1 являются те ее пп-части, которые имеют вид либо отдельно взятой пропозициональной переменной, либо $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, где **f** есть n-арная функциональная переменная или константа, а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — индивидные переменные или константы. Пусть $\mathbf{A}_*$ — пп-формула, полученная из **A** заменой каждой элементарной части **E** пп-формулы **A** на $\sim\sim \mathbf{E}$. Покажите, что **A** является теоремой системы F^1 тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}_*$ является теоремой системы F^{1m}. [Используйте совместно результаты упражнений 38.12 и 26.20, а также 38.8 (4) в качестве теоремной схемы системы F^{1m} и *342 в качестве метатеоремы системы F^{1m}.]

38.14. Распространите результат упражнения 38.13 на такие пп-формулы **A** системы F^1_J, которые не содержат ни дизъюнкцию, ни квантор существования [358].

39. Предваренная нормальная форма. Если в пп-формуле **A** имеется пп-часть вида $(\forall \mathbf{a})\mathbf{C}$ или $(\exists \mathbf{a})\mathbf{C}$, то *областью* данного вхождения квантора, $(\forall \mathbf{a})$ или $(\exists \mathbf{a})$, в пп-формуле **A** называется то вхождение формулы **C**, которое непосредственно следует за данным вхождением квантора $(\forall \mathbf{a})$ или $(\exists \mathbf{a})$ [359].

Вхождение квантора $(\forall \mathbf{a})$ или $(\exists \mathbf{a})$ в некоторую пп-формулу называется *начально расположенным*, если либо он стоит в начале этой пп-формулы (т. е. перед ним нет никаких символов, даже скобок), либо ему предшествуют только кванторы ($\forall$) и ($\exists$), каждый со своей собственной операторной переменной [359].

Вхождение квантора, ($\forall\mathbf{a}$) или ($\exists\mathbf{a}$), в некоторую пп-формулу называется *вырожденным*, если в его области нет свободных вхождений его операторной переменной **a**. В противном случае вхождение называется *невырожденным* [359].

Мы говорим про некоторую пп-формулу, что она находится в *предваренной нормальной форме*, если все имеющиеся в ней вхождения кванторов ($\forall$) и ($\exists$) [359] невырождены и начально расположены.

Таким образом, пп-формула **A** находится в предваренной нормальной форме в том и только в том случае, если она имеет вид

$$\mathbf{\Pi}_1\mathbf{\Pi}_2 \ldots \mathbf{\Pi}_n\mathbf{M},$$

где **M** — правильно построенная и бескванторная формула, где каждое $\mathbf{\Pi}_i$ есть либо ($\forall\mathbf{a}_i$), либо ($\exists\mathbf{a}_i$) ($i = 1, 2, \ldots, n$) и где $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}$ — попарно различные переменные, каждая из которых имеет в **M** по крайней мере одно (свободное) вхождение. В этом случае формула

$$\mathbf{\Pi}_1\mathbf{\Pi}_2 \ldots \mathbf{\Pi}_n$$

носит название *префикса* или *приставки* пп-формулы **A**, а пп-формула **M** носит название *основы* пп-формулы **A**. (В частном случае мы можем иметь $n = 0$; в этом случае префикс является пустой формулой, а основа **M** совпадает с **A**.)

Для того чтобы получить то, что мы называем *стандартной предваренной нормальной формой* данной пп-формулы **A**, мы применяем следующие операции сведéния, применимые к таким пп-формулам, которые содержат не начально расположенные кванторы.

(i) Если первое (слева направо) не начально расположенное вхождение квантора находится в пп-части $\sim(\forall\mathbf{a})\mathbf{C}$, где **C** не начинается знаком $\sim$, то эта пп-часть (т. е. данное ее вхождение) заменяется на $(\exists\mathbf{a})\sim\mathbf{C}$. Ср. с *377.

(ii) Если первое не начально расположенное вхождение квантора находится в пп-части $\sim(\exists\mathbf{a})\mathbf{C}$, то эта пп-часть заменяется на $(\forall\mathbf{a})\sim\mathbf{C}$. Ср. с *338.

(iii) Если первое не начально расположенное вхождение квантора находится в пп-части $[(\forall\mathbf{a})\mathbf{C}\supset\mathbf{D}]$, то эта пп-часть заменяется на

$$(\exists\mathbf{b})[\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{C}| \supset \mathbf{D}],$$

где **b** есть либо **a** — в случае, если **a** не имеет свободных вхождений в **D**, — либо — в противном случае — первая после **a** в алфавитном порядке переменных индивидная переменная, которая не входит в **C** и не имеет свободных вхождений в **D**. Ср. с *350, *383.

(iv) Если первое не начально расположенное вхождение квантора находится в пп-части $[(\exists \mathfrak{a})\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$, то эта пп-часть заменяется на

$$(\forall \mathfrak{b})[S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{C}| \supset \mathbf{D}],$$

где $\mathfrak{b}$ определяется, как в (iii). Ср. с *350, *380.

(v) Если первое не начально расположенное вхождение квантора находится в пп-части $[\mathbf{D} \supset (\forall \mathfrak{a})\mathbf{C}]$, где $\mathbf{D}$ — бескванторная формула, то эта пп-часть заменяется на

$$(\forall \mathfrak{b})[\mathbf{D} \supset S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{C}|],$$

где $\mathfrak{b}$ определяется, как в (iii). Ср. с *350, *335.

(vi) Если первое не начально расположенное вхождение квантора находится в пп-части $[\mathbf{D} \supset (\exists \mathfrak{a})\mathbf{C}]$, где $\mathbf{D}$ — бескванторная формула, то эта пп-часть заменяется на

$$(\exists \mathfrak{b})[\mathbf{D} \supset S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{C}|],$$

где $\mathfrak{b}$ определяется, как в (iii). Ср. с *350, *382.

*390. С помощью конечного числа последовательных применений шагов свед́ения (i)—(vi) всякую пп-формулу $\mathbf{A}$ исчисления F^1 можно свести к некоторой пп-формуле $\mathbf{A}'$ исчисления F^1, в которой все кванторы начально расположены. Этот процесс свед́ения эффективен, и пп-формула $\mathbf{A}'$, являющаяся его результатом, однозначно определена, если задана пп-формула $\mathbf{A}$.

Доказательство. На каждом этапе этого процесса до тех пор, пока остаются какие-либо не начально расположенные кванторы, всегда применим один и только один из шагов сведения (i)—(vi), и результат применения этого шага сведения определен эффективно и однозначно. Остается только показать, что процесс должен окончиться в конечное число шагов.

Назовем некоторое вхождение знака $\supset$ или $\sim$ *внешним* по отношению к данному вхождению квантора, если (1) оно не находится в области этого вхождения квантора или если (2) данное вхождение квантора есть $(\forall\ \ )$, причем ему непосредственно предшествует и за ним непосредственно следует знак $\sim$ [т. е., другими словами, данное вхождение квантора есть $(\exists\ \ )$] и этот знак не совпадает с одним из этих вхождений знака $\sim$ [которые являются частями данного вхождения квантора $(\exists\ \ )$].

Теперь каждый шаг сведения либо уменьшает число не начально расположенных кванторов, либо, оставляя это число неизменным, уменьшает общее число вхождений знаков $\supset$ и $\sim$, внешних по отношению к первому не начально расположенному вхождению квантора. Так как оба эти числа, естественно, конечны в данной пп-формуле $\mathbf{A}$, то отсюда следует, что процесс сведения должен окончиться на требуемой пп-формуле **A**$'$, все кванторы которой начально расположены.

391. Всякую пп-формулу **A исчисления F^1 можно свести к некоторой пп-формуле **B** исчисления F^1, находящейся в предваренной нормальной форме. Это можно сделать, сводя вначале пп-формулу **A** с помощью процесса сведения из метатеоремы **390 к пп-формуле **A**$'$, все кванторы которой начально расположены, а затем получить пп-формулу **B**, отбрасывая в **A**$'$ все вырожденные вхождения кванторов $(\forall \mathbf{a})$ и $(\exists \mathbf{a})$. Этот процесс сведения эффективен, и являющаяся его результатом пп-формула **B**, находящаяся в предваренной нормальной форме, определена однозначно, если задана пп-формула **A**.

Доказательство. Это очевидное следствие из **390.

Определение. Пп-формула **B**, получающаяся из пп-формулы **A** с помощью процесса сведения из **391, называется стандартной предваренной нормальной формой пп-формулы **A**.

*392. Если **B** является стандартной предваренной нормальной формой пп-формулы **A**, то $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Доказательство. На каждом шаге процесса сведения из **390 получающаяся пп-формула эквивалентна предыдущей пп-формуле в том смысле, что материальная эквивалентность этих двух пп-формул является теоремой в исчислении F^1. Следовательно, в силу закона транзитивности эквивалентности, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}'$. Далее, в процессе сведения пп-формулы **A**$'$ к пп-формуле **B** путем отбрасывания вырожденных вхождений кванторов эти отбрасывания могут быть осуществлены одно за другим, и на каждом шаге получающаяся пп-формула будет эквивалентна предыдущей. Поэтому, в силу закона транзитивности эквивалентности, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Здесь на каждом шаге для доказательства эквивалентности получившейся пп-формулы и предыдушей пп-формулы должно применяться производное правило *341. При этом требуемая эквивалентность получается: в случае шага сведения (i) — из *377; в случае шага сведения (ii) — из *338; в случае (iii) — из *350 и *383; в случае (iv) — из *350 и *380; в случае (v) — из *350 и *335; в случае (vi) — из *350 и *382; в случае отбрасывания вырожденных вхождений квантора — из *337 или *376.

Хотя определенная нами здесь *стандартная предваренная нормальная форма некоторой данной* пп-формулы единственна и хотя пп-формула всегда эквивалентна своей предваренной нормальной форме (в том смысле, что их эквивалентность является теоремой исчисления F^1), тем не менее, вообще говоря, неверно, что если две пп-формулы эквивалентны друг другу (в этом смысле), то они имеют одну и ту же стандартную предваренную нормальную форму. Противоречащие примеры очевидны, и их построение предоставляется читателю.

Упражнения к § 39

39.0. Найдите стандартную предваренную нормальную форму каждой из следующих пп-формул:

(1) $\sim\sim(y)\ F(y,\ z)\supset_z \sim\sim(\exists x)\ G(x,\ y,\ z)$.

[Ответ: $(z)\ (\exists x_1)\ (\exists x)\ {}_{\blacksquare} \sim\sim F(x_1,\ z)\supset G(x,\ y,\ z)$.]

(2) $(y)\ F(x,\ y)\supset(y)\ F(x,\ x)$.

(3) $F(y)\supset\ \sim_{\blacksquare}(x)\ G(x,\ y)\supset(y)\sim F(y)$.

(4) $F(x)\vee\sim(y)\ F(y)$.

(5) $(\exists x)\ F(x,\ y,\ z)\equiv(y)\ G(x,\ y,\ z)$.

39.1. Покажите, что основа предваренной нормальной формы некоторой пп-формулы отличается от присоединенной бескванторной формулы (в смысле § 32), самое большее, заменой индивидных переменных на определенных местах и отбрасыванием двойного отрицания $\sim\sim$.

39.2. Рассмотрите формулировку функционального исчисления первого порядка, в которой исходными сентенциональными связками являются отрицание, конъюнкция и дизъюнкция, а исходными кванторами — квантор общности и квантор существования. Остальные исходные символы пусть будут те же, что и в исчислении F^1. (1) Напишите правила построения для этой формулировки функционального исчисления первого порядка. (2) Принимая правило обобщения (*301) и *модус поненс* (в форме: из $\sim\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$) в качестве правил вывода, дайте подходящую систему аксиомных схем, стараясь сделать их число по возможности небольшим, а сами схемы по возможности простыми, и затем докажите эквивалентность получившейся системы и системы F^1 в некотором соответствующем смысле.

39.3. Распространите определение совершенной *дизъюнктивной нормальной формы* (см. упражнение 24.9) на бескванторные формулы системы, введенной в 39.2. Покажите для этой системы, что если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — две бескванторные формулы, то $\vdash\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ в том и только в том случае, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ либо имеют одну и ту же совершенную дизъюнктивную нормальную форму, либо обе не имеют совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

39.4. Определите каким-либо подходящим образом *предваренную нормальную форму* для системы из упражнения 39.2 и докажите аналоги метатеорем **390, **391, **392.

39.5. Если пропозициональные переменные входят в число исходных символов системы из упражнения 39.2, то будем говорить, что пп-формула этой системы находится в *предваренной дизъюнктивной нормальной форме*, когда либо она есть $p \sim p$, либо: (I) она находится в предваренной нормальной форме, (II) переменные в ее префиксе — в порядке их вхождений в префикс и для некоторого n — являются первыми n в алфавитном порядке переменных индивидными переменными и (III) ее основа имеет совершенную дизъюнктивную нормальную форму. (1) Установите метатеоремы относительно сведения к предваренной дизъюнктивной нормальной форме, аналогичные метатеоремам из 39.4 о сведении к предваренной нормальной форме. (2) Выясните, верно ли в общем случае, что если $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одну и ту же предваренную дизъюнктивную нормальную форму.

39.6. В случае сингулярного функционального исчисления первого порядка с исходным базисом, заданным в § 30 (т. е. в формулировке $\mathrm{F}^{1,1}$), в известном смысле может быть обращен процесс вынесения кванторов вперед, производимый на основе шагов сведéния (i)—(vi) настоящего параграфа. Используются следующие шаги сведения: (a) отбрасывание вырожденного вхождения квантора $(\exists \mathbf{a})$ или $(\forall \mathbf{a})$; (b) замена пп-части $(\exists \mathbf{a}) \sim \mathbf{C}$ на $\sim (\forall \mathbf{a}) \mathbf{C}$; (c) замена пп-части $(\forall \mathbf{a}) \sim \mathbf{C}$ на $\sim (\exists \mathbf{a}) \mathbf{C}$, если ей непосредственно не предшествует знак $\sim$; (d) замена пп-части $(\exists \mathbf{a}) [\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ на $[(\forall \mathbf{a}) \mathbf{C} \supset (\exists \mathbf{a}) \mathbf{D}]$; (e) замена пп-части $(\forall \mathbf{a}) [\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ на $[(\exists \mathbf{a}) \mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{D}$; (f) замена пп-части $(\forall \mathbf{a})[\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ на $[\mathbf{C} \supset (\forall \mathbf{a}) \mathbf{D}]$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{C}$; (g) замена пп-части $(\forall \mathbf{a}) [[\mathbf{C}_1 \supset \mathbf{C}_2] \supset \mathbf{D}]$ на $\sim [(\forall \mathbf{a})[\sim \mathbf{C}_1 \supset \mathbf{D}] \supset \sim (\forall \mathbf{a}) [\mathbf{C}_2 \supset \mathbf{D}]]$. Покажите, что серией применений этих шагов сведения совместно с такими шагами, которые состоят в преобразовании пп-формул средствами пропозиционального исчисления (и *342) или в алфавитной замене связанных переменных, всякую пп-формулу $\mathbf{A}$ сингулярного функционального исчисления $\mathrm{F}^{1,1}$ можно свести к пп-формуле $\mathbf{B}$, обладающей следующими свойствами. (1) В пп-формулу $\mathbf{B}$ кванторы входят только в пп-части вида $(\forall x) \,.\, \mathbf{D}_1 \supset .\, \mathbf{D}_2 \supset . \ldots \mathbf{D}_{n-1} \supset \mathbf{D}_n$, где n не меньше 1 [360] и где каждое $\mathbf{D}_i$ в отдельности есть либо $\mathbf{f}_i(x)$, либо $\sim \mathbf{f}_i(x)$, а функциональные переменные $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}$ попарно различны в каждой такой пп-части пп-формулы $\mathbf{B}$ [361]. (2) $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ [362].

39.7. Примените процесс сведения из предыдущего упражнения к следующим пп-формулам из $\mathrm{F}^{1,1}$:

(1) $(\exists x)\,(y) \,.\, F(x) \supset G(x) \supset .\, G(x) \supset H(x) \supset .\, F(y) \supset H(y)$.

(2) $(\exists x)\,(y)\,(z) \,.\, F(x) \supset G(y) \supset H(x) \supset .\, F(z) \supset G(x) \supset H(z)$.

(3) $F(x) \supset_x .\, F(y) \supset_y [G(x) \supset G(y)] \vee (z)\, F(z)$.

39.8. Дайте аналог процесса сведения и метатеоремы из 39.6 для формулировки сингулярного функционального исчисления первого порядка с таким исходным базисом, как в упражнении 39.2. (Для того, чтобы облегчить формулирование процесса сведения, используйте совершенную дизъюнктивную нормальную форму — ср. с 39.3 — и дуальную к ней *совершенную конъюнктивную нормальную форму*.)

39.9. Рассмотрите формулировку функционального исчисления первого порядка с описанными в 30.6 исходными символами и следующими двумя правилами вывода ($\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — индивидные переменные): *из* $\mathbf{A}\,|_{\mathbf{a}}\,\mathbf{B}\,|_{\mathbf{b}}\,\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{A}$ *следует* $\mathbf{C}$, *если* $\mathbf{b}$ *не свободно в* $\mathbf{C}$; *из* $\mathbf{A}\,|_{\mathbf{a}}\mathbf{B}$ *следует* $\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}|\;|_{\mathbf{b}}\,\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{B}|$, *если никакое свободное вхождение* $\mathbf{a}$ *в* $\mathbf{A}$ *или* $\mathbf{B}$ *не находится в пп-части вида* $\mathbf{C}\,|_{\mathbf{b}}\,\mathbf{D}$. Подберите такие аксиомные схемы (постарайтесь сделать их число по возможности небольшим, а сами аксиомы — по возможности простыми), чтобы получить систему, эквивалентную в некотором подходящем смысле системе F^1, и доведите построение этой системы так далеко, чтобы сделать возможным доказательство этой эквивалентности. (При этом можно воспользоваться ранее полученными результатами относительно пропозиционального исчисления, включая и результаты упражнений 25.)

39.10. Докажите эквивалентность в некотором подходящем смысле системы F^1 и следующей системы $\mathrm{F}^1_{\mathrm{gb}}$. Исходные символы — те же, что и в системе F^1, с добавлением двух исходных символов: $\exists$ и $\rightarrow$. Пп-формулы распадаются на два вида: *термы* и *предложения*. А именно, термы задаются правилами построения, которые отличаются от правил построения системы F^1 только тем, что „пп-формула" повсюду заменяется на „терм", и еще одним дополнительным правилом: если $\mathbf{\Gamma}$ есть терм и $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная, то $(\exists\mathbf{a})\mathbf{\Gamma}$ есть терм. Предложениями являются всевозможные формулы вида $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \ldots, \mathbf{\Gamma}_n \rightarrow \Delta$, где n — произвольное натуральное число (возможно нуль), а $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \ldots, \mathbf{\Gamma}_n$, Δ — термы. Таким образом, пп-формула содержит не более одного вхождения знака $\rightarrow$ и является предложением или термом в соответствии с тем, содержит ли она или нет вхождения этого знака. В терме вхождение переменной $\mathbf{a}$ называется связанным, если оно находится в пп-части вида $(\forall\mathbf{a})\mathbf{B}$ или вида $(\exists\mathbf{a})\mathbf{B}$; в противном случае оно называется свободным. В предложении все вхождения переменных являются связанными. Имеется одна аксиомная схема, а именно $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ есть терм. Правилами вывода служат одиннадцать следующих, в которых $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — термы, $\mathbf{a}$ — индивидная переменная, а $\mathbf{b}$ — индивидная переменная или индивидная константа: (I) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ [363]; (II) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$; (III) из

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$; (IV) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \to \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$; (V) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$[364]; (VI) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \sim \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \to \sim \mathbf{A}_n$; (VII) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \sim\sim \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$[364]; (VIII) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to (\forall \mathfrak{a})\mathbf{A}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$[364]; (IX) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to (\forall \mathfrak{a})\mathbf{A}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathrm{S}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}|$, если никакое свободное вхождение $\mathfrak{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в пп-части пп-формулы $\mathbf{A}$ вида $(\forall \mathfrak{b})\mathbf{C}$ или $(\exists \mathfrak{b})\mathbf{C}$[364]; (X) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathrm{S}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}|$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to (\exists \mathfrak{a})\mathbf{A}$, если никакое свободное вхождение $\mathfrak{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в пп-части пп-формулы $\mathbf{A}$ вида $(\forall \mathfrak{b})\mathbf{C}$ или вида $(\exists \mathfrak{b})\mathbf{C}$[364]; (XI) из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, (\exists \mathfrak{a})\mathbf{A}_n \to \mathbf{B}$, если $\mathfrak{a}$ не свободно в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{B}$[365]. [В качестве первого шага к доказательству требуемой эквивалентности докажите, что если $\mathbf{B}$ — произвольный терм системы $\mathrm{F}^1_{\mathrm{gb}}$, а $\mathbf{B}'$ — соответствующая пп-формула из F^1, полученная из $\mathbf{B}$ заменой всех вхождений $(\exists\ )$ на $\sim(\forall\ )\sim$, то $\to \mathbf{B}$ является теоремой в $\mathrm{F}^1_{\mathrm{gb}}$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{B}'$ является теоремой в F^1.]

39.11. Аналогично докажите также эквивалентность, в некотором подходящем смысле, системы F^1 и следующей системы $\mathrm{F}^1_{\mathrm{g}}$[366]. Исходные символы и термы — те же самые, что в $\mathrm{F}^1_{\mathrm{gb}}$ (см. предыдущее упражнение). Предложениями ⟨„Sequenzen"⟩ являются всевозможные формулы вида $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \to \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, где m и n — натуральные числа (возможно 0), а $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ суть термы[367]. Таким образом, пп-формула содержит не более одного вхождения знака $\to$, и она является предложением или термом в соответствии с тем, содержит ли она или нет вхождение этого знака. Свободные и связанные вхождения переменных определяются так же, как в предыдущем упражнении. Так же, как и там, имеется одна аксиомная схема, $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — терм. Правилами вывода служат следующие, где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — термы, $\mathfrak{a}$ — индивидная переменная, а $\mathfrak{b}$ — индивидная переменная или индивидная константа:

Ia. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$[368].

Ib. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$[368].

IIa. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}, \mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$[369].

IIb. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{l-1}, \mathbf{B}_l, \mathbf{B}_{l+1}, \mathbf{B}_{l+2}, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{l-1}, \mathbf{B}_{l+1}, \mathbf{B}_l, \mathbf{B}_{l+2}, \ldots, \mathbf{B}_m$[370].

IIIa. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$[369].

IIIb. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ [370].

IVa. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \rightarrow \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$.

IVb. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}$ и $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ [368].

Va. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \rightarrow \sim \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ [369].

Vb. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n, \sim \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \ldots, \mathbf{B}_m$ [370].

VIa. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow (\forall \mathbf{a}) \mathbf{A}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ [370].

VIb. Из $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $(\exists \mathbf{a})\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$, если $\mathbf{a}$ не свободно в $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ [369].

VIIa. Из $\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}| \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $(\forall \mathbf{a}) \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$, если никакое свободное вхождение $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в пп-части пп-формулы $\mathbf{A}$ вида $(\forall \mathbf{b})\mathbf{C}$ или $(\exists \mathbf{b})\mathbf{C}$ [369].

VIIb. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}\mathbf{A}|$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow (\exists \mathbf{a}) \mathbf{A}$, если никакое свободное вхождение $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в пп-части пп-формулы $\mathbf{A}$ вида $(\forall \mathbf{b})\mathbf{C}$ или вида $(\exists \mathbf{b})\mathbf{C}$ [370].

VIII. Из $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{C}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_l$ и $\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}_l, \mathbf{B}_{l+1}, \ldots, \mathbf{B}_m$ следует $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ [371].

39.12. Докажите эквивалентность (в смысле совпадения теорем) системы $\mathrm{F}^1_{\mathrm{g}}$ и системы $\mathrm{F}^1_{\mathrm{gh}}$, которая получается заменой правила вывода VIII инверсиями двух правил Va и Vb и добавлением правила алфавитной замены связанных переменных [372].

ГЛАВА IV

ЧИСТОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

40. Другая возможная формулировка. В случае, когда функциональное исчисление первого порядка обладает достаточным аппаратом переменных, как уже отмечалось, возможна такая его формулировка, в которой используются правила подстановки (в дополнение к правилам *модус поненс* и обобщения), а аксиомные схемы § 30 заменены их основными частными случаями, так что число аксиом конечно. В этом параграфе мы дадим такую формулировку, F^1_2[1], чистого функционального исчисления первого порядка.

Исходными символами являются восемь перечисленных в § 30 несобственных символов, индивидные переменные, пропозициональные переменные и *n*-арные функциональные переменные для каждого положительного целого *n*. Правила построения, 40i—v, совпадают с 30i—v, кроме только того, что в 30ii исключаются упоминания функциональных и индивидных констант. Используют описанные в § 30 приемы сокращения, включая определения-схемы D3—17. Правилами вывода являются следующие:

*400. Из $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$. (*Правило модус поненс.*)

*401. Если $\mathfrak{a}$ — индивидная переменная, то из $\mathbf{A}$ следует $(\mathfrak{a})\mathbf{A}$. (*Правило обобщения.*)

*402. Если $\mathfrak{a}$ — индивидная переменная, не являющаяся свободной в $\mathbf{N}$, $\mathfrak{b}$ — индивидная переменная, не входящая в $\mathbf{N}$, и $\mathbf{B}$ получается из $\mathbf{A}$ подстановкой формулы $S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{N}|$ вместо какого-либо частного вхождения $\mathbf{N}$ в $\mathbf{A}$, то из $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$. (*Правило алфавитной замены связанной переменной.*)

*403. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — индивидные переменные и если никакое свободное вхождение $\mathfrak{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в пп-части пп-формулы $\mathbf{A}$ вида $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$, то из $\mathbf{A}$ следует $S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}|$. (*Правило подстановки вместо индивидных переменных.*)

*404_0. Если $\mathfrak{p}$ — пропозициональная переменная, то из $\mathbf{A}$ следует $\check{S}^{\mathfrak{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$. (*Правило подстановки вместо пропозициональной переменной.*)

$*404_n$. Если $\mathbf{f}$ — n-арная функциональная переменная, а $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — различные индивидные переменные, то из $\mathbf{A}$ следует $\check{S}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)}\mathbf{A}|$.

(*Правило подстановки вместо функциональной переменной.*)

Аксиомами являются следующие пять:

†405. $p \supset . q \supset p$.

†406. $s \supset [p \supset q] \supset . s \supset p \supset . s \supset q$.

†407. $\sim p \supset \sim q \supset . q \supset p$.

†408. $p \supset_x F(x) \supset . p \supset (x) F(x)$.

†409. $(x) F(x) \supset F(y)$.

Из результатов, полученных в предыдущей главе (в частности, в § 35), следует эквивалентность систем F_2^{1p} и F^{1p} в том смысле, что теорема одной из этих систем является также теоремой и другой системы. Из этого следует, что полученные в предыдущей главе производные правила вывода системы F^{1p} могут быть сразу распространены и на систему F_2^{1p}.

Содержание следующих параграфов (§§ 41—47) относится к теоретическому синтаксису чистого функционального исчисления первого порядка, и за исключением результатов § 41, которые касаются частной формулировки F_2^{1p}, они применимы к чистому функциональному исчислению первого порядка независимо от того, рассматривается ли оно в формулировке F^{1p} или F_2^{1p}. Многие результаты можно распространить на другие функциональные исчисления первого порядка, а некоторые — даже на произвольные функциональные исчисления первого порядка в формулировке F^1. Однако мы сосредоточим свое внимание на чистом функциональном исчислении первого порядка, предоставляя читателю самому выполнить эти распространения там, где они очевидны.

Заметим, что использованный в этом параграфе метод получения такой формулировки функционального исчисления первого порядка, в которой аксиомные схемы системы F^1 заменены конечным числом аксиом, можно распространить на любой случай, в котором имеются функциональные переменные хотя бы одного типа. А именно, производятся соответствующие изменения в списке исходных символов и в правилах построения. Правила вывода остаются без изменений, за исключением того, что: 1) в случае, когда имеются индивидные константы, должны быть произведены соответствующие изменения в $*403$ и $*404_n$, которые сделали бы возможным их использование в этих правилах (как в $*351$ и $*352_n$); 2) если какое-либо из правил $*404_n$ становится бессмысленным, то оно должно быть опущено. Пять аксиом остаются теми же самыми, что и в F_2^{1p}, если только имеются налицо необходимые переменные, в противном же случае они модифицируются очевидным образом.

В частности, для всякого положительного целого m формулировка $F_2^{1,m}$ m-арного функционального исчисления первого порядка может быть получена из F_2^{1p} простым исключением из числа исходных символов всех более чем m-арных функциональных переменных и опусканием всех правил $*404_n$, в которых $n > m$. Легко видеть, что эта формулировка m-арного функционального исчисления первого порядка эквивалентна (в смысле совпадения теорем) m-арному функциональному исчислению первого порядка в формулировке $F^{1,m}$ главы III.

Упражнения к § 40

40.0. Покажите, что теоремы сингулярного функционального исчисления первого порядка совпадают с такими теоремами чистого функционального исчисления первого порядка, в которых все функциональные переменные сингулярны.

40.1. Покажите, что в системе F_2^{1p} можно, не изменяя класса теорем, заменить правило обобщения и аксиомы †408 и †409 на следующие два правила вывода: если **a** есть индивидная переменная, не являющаяся свободной в **A**, то из $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\mathbf{B}$; если **a** не свободна в **A**, то из $\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\mathbf{B}$ следует $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

40.2. Рассмотрите формулировку расширенного пропозиционального исчисления с указанными в упражнении 30.7 исходными символами, и пусть правилами вывода в нем будут *модус поненс*, правило подстановки (вместо пропозициональных переменных) и два правила, введенные в 40.1, модифицированные таким образом, что в них **a** считается теперь не индивидной, а пропозициональной переменной. Пусть, далее, аксиомами будут три аксиомы исчисления P_B^I. Доведите развитие системы до того, чтобы сделать возможным решение ее проблемы разрешения в соответствии с планом, намеченным в § 28 [409]. (Используйте результаты из упражнения 18.3.)

40.3. Докажите, что если соответствующим образом определить конъюнкцию, дизъюнкцию, эквивалентность и отрицание в частичной системе расширенного пропозиционального исчисления, исходные символы которой — те же, что и в 30.7, правила вывода — *модус поненс*, обобщение и подстановка, а аксиомы — две аксиомы из P^+, и в которой имеются две аксиомные схемы — $(\mathbf{a})\mathbf{A} \supset \mathbf{A}$ и $(\mathbf{a})[\mathbf{b} \supset \mathbf{A}] \supset_{\centerdot} \mathbf{b} \supset (\mathbf{a})\mathbf{A}$, где **b** отлично от **a**, то в этой системе будет содержаться все интуиционистское пропозициональное исчисление. (См. 19.6.)

41. Независимость. Из эквивалентности систем F_2^{1p} и F^{1p} легко следует, что правила $*404_2$, $*404_3$, ... системы F_2^{1p} не являются независимыми. В самом деле, с помощью правил *402, *403, $*404_0$ и $*404_1$ можно любой частный случай всякой аксиомной схемы из числа *302—*306 получить из соответствующей аксиомы из числа †405—†409.

Не будучи независимыми, правила $*404_n$ ($n > 1$), тем не менее, в некотором смысле не излишни, так как они ограничивают класс правильных интерпретаций системы F_2^{1p}. Действительно, интерпретация, отличающаяся от главной интерпретации системы F^1 только тем, что функциональные переменные, верхние индексы которых превышают 1, интерпретируются как функциональные константы (каждая из которых соответствует некоторой частной пропозициональной функции индивидов), является правильной интерпретацией системы F^{1p} и системы, полученной из F_2^{1p} отбрасыванием правил $*404_n$ ($n > 1$), но не является правильной интерпретацией самой системы F_2^{1p}.

Потребность в правилах $*404_n$ ($n > 1$) с точки зрения синтаксической становится ясной, если смотреть на F_2^{1p} не как на законченную систему, а как на такую систему, к которой должны быть добавлены неопределяемые термины и постулаты для построения на этой основе некоторой специальной ветви математики с помощью формального аксиоматического метода (описанного в заключительных абзацах § 07). В самом деле, такой добавленный постулат может так содержать, скажем, бинарную функциональную переменную, что для получения из него требуемых следствий необходимо будет использовать правило $*404_2$.

За исключением правил $*404_n$ ($n > 1$), остальные правила и аксиомы системы F_2^{1p} независимы. Мы приступаем к краткому изложению того, как это может быть установлено.

Рассмотрим формулировку пропозиционального исчисления правилами вывода которой являются *модус поненс* и подстановка и в которой имеется пять аксиом: †405, †406, †407, $p \supset r \supset . p \supset r$ и $r \supset r$. Здесь две последних аксиомы являются пфпи аксиом †408, и †409 соответственно (в смысле § 32). Следовательно, имея некоторое доказательство теоремы **A** системы F_2^{1p} и заменяя в нем каждую пп-формулу на соответствующим образом подобранную ее пфпи, мы получаем доказательство некоторой пфпи $\mathbf{A}_0$ данной формулы **A** — уже в качестве теоремы в рассматриваемой формулировке пропозиционального исчисления. Используя методы § 19, мы можем показать независимость в этой формулировке пропозиционального исчисления правила *модус поненс* и каждой из аксиом †405, †406, †407. Из этого следует независимость в F_2^{1p} правила *400 и каждой из аксиом †405, †406, †407. (Подробности предоставляются читателю.)

Рассмотрим преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, которое заключается в замене всех вхождений квантора ($\forall$**a**) на $\sim$($\forall$**a**)$\sim$ одновременно для всех индивидных переменных **a**. То есть, короче говоря, рассмотрим преобразование, которое состоит в замене повсюду квантора общности на квантор существования. Можно проверить, что, за исключением †409, все аксиомы системы F_2^{1p} преобразуются при этом в теоремы системы F_2^{1p} и что все исходные правила вывода системы F_2^{1p} преобразуются при этом, в очевидном смысле, в исходные или производные правила вывода системы F_2^{1p}. В то же время †409 преобразуется в $(\exists x)\, F(x) \supset F(y)$, что не является теоремой. [Если $\vdash (\exists x)\, F(x) \supset F(y)$, то в силу *330 и P, $\vdash F(x) \supset F(y)$, что противоречит **324.] Отсюда следует независимость †409.

Рассмотрим преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, которое заключается в одновременной замене всякой пп-части вида $(\forall \mathbf{a})\mathbf{C}$ на $(\forall \mathbf{a}) \sim [\mathbf{C} \supset \mathbf{C}]$ [401]. При этом каждая аксиома преобразуется в теорему, а каждое исходное правило, за исключением *401 (правило обобщения), преобразуется в исходное или производное правило. С другой стороны, теорема $F(x) \supset_x F(x)$ преобразуется при этом в $(x) \sim {}_\blacksquare F(x) \supset F(x) \supset {}_\blacksquare F(x) \supset F(x)$, что не является теоремой. Из этого следует независимость правила *401.

Рассмотрим преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, которое заключается в замене $(\forall \mathbf{a})$ на $\sim (\forall \mathbf{a}) \sim$, если $\mathbf{a}$ — отличная от x переменная. При этом каждая аксиома преобразуется в теорему и каждое исходное правило вывода, кроме *402 (правило алфавитной замены связанных переменных), в исходное или производное правило. Вместе с тем теорема $(y)F(y) \supset F(z)$ преобразуется в $(\exists y)\, F(y) \supset F(z)$, что не является теоремой. Отсюда следует независимость правила *402.

Рассмотрим преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, которое состоит в замене каждой пп-части вида $(\forall \mathbf{a})\mathbf{C}$ на $\mathrm{S}_y^{\mathbf{a}}\mathbf{C}|$. [Это преобразование можно описать и так: каждое связанное вхождение индивидной переменной заменяется в пп-формуле частной индивидной переменной y, после чего отбрасываются все вхождения $(\forall y)$.] При этом каждая аксиома преобразуется в теорему, а каждое исходное правило вывода, кроме *403 (правило подстановки вместо индивидной переменной), в исходное или производное правило. Теорема $(x)F(x) \supset F(z)$ преобразуется при этом в $F(y) \supset F(z)$, что не является теоремой (ср. § 32). Отсюда следует независимость правила *403.

Рассмотрим преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, которое состоит в отбрасывании всех вхождений знака $\sim$ и одновременной замене всех вхождений p на $[p \supset p]$. При этом каждая аксиома преобразуется в теорему, а каждое исходное правило вывода, за исключением $*404_0$ (правило подстановки вместо пропозициональных переменных), — в исходное или производное правило. Вместе с тем теорема $\sim q \supset q \supset q$ преобразуется в $q \supset q \supset q$, что не является теоремой (**320). Из этого следует независимость правила $*404_0$.

Рассмотрим преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, которое состоит в замене повсюду $F(\mathbf{a})$ на $[F(\mathbf{a}) \supset F(\mathbf{a})]$ (для каждой индивидной переменной $\mathbf{a}$, но лишь для одной функциональной переменной F^1) и одновременно в замене всех вхождений $(\forall\mathbf{a})$ на $\sim(\forall\mathbf{a})\sim$ (для каждой индивидной переменной $\mathbf{a}$). При этом каждая аксиома преобразуется в теорему, а каждое исходное правило вывода, за исключением $*404_1$ (правило подстановки вместо сингулярных функциональных переменных), — в исходное или производное правило. В то же время теорема $(x)G(x) \supset G(y)$ преобразуется в $(\exists x)\, G(x) \supset G(y)$, что не является теоремой. Из этого следует независимость правила $*404_1$.

Наконец, для доказательства независимости аксиомы †408 мы используем более сложное преобразование пп-формул системы F_2^{1p}, состоящее из следующих этапов. Сначала заменяем каждую индивидную переменную на непосредственно следующую за ней в алфавитном порядке индивидную переменную, т. е. заменяем одновременно x на y, y на z, z на x_1 и т. д. Затем заменяем каждую пропозициональную переменную на сингулярную функциональную переменную и каждую n-арную функциональную переменную на $(n+1)$-арную функциональную переменную следующим образом. Пропозициональная переменная $\mathbf{a}$ заменяется на $\mathbf{b}(x)$, где $\mathbf{b}$ — сингулярная функциональная переменная, занимающая то же алфавитное положение, что и $\mathbf{a}$ (т. е. если $\mathbf{a}$ есть i-я в алфавитном порядке пропозициональная переменная, то $\mathbf{b}$ есть i-я в алфавитном порядке сингулярная функциональная переменная); если $\mathbf{a}$ — n-арная функциональная переменная, то каждая пп-часть вида $\mathbf{a}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ заменяется на $\mathbf{b}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n, x)$, где $\mathbf{b}$ есть $(n+1)$-арная функциональная переменная, имеющая то же алфавитное положение, что и $\mathbf{a}$. После этого в каждой пп-части, имеющей вид импликации $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, добавляем к антецеденту $\mathbf{A}$ и консеквенту $\mathbf{B}$ квантор существования $\sim(\forall x)\sim$ (т. е. заменяем $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ на $[\sim(\forall x)\sim\mathbf{A} \supset \sim(\forall x)\sim\mathbf{B}]$ и вместе с тем заменяем каждый квантор общности $(\forall\mathbf{a})$ на $(\forall\mathbf{a})(\forall x)$ и повсюду заменяем $\sim$ на $(\forall x)\sim$.

Результат применения этого преобразования к †408 есть

$$(1)\quad (\exists x)[(\exists x)\, F(x) \supset_{yx} (\exists x) F(y, x)] \supset (\exists x) \,.\, (\exists x) F(x) \supset (\exists x)(y)(x) F(y, x),$$

что не является теоремой системы F_2^{1p}. С другой стороны, применение этого преобразования к остальным аксиомам системы F_2^{1p} дает последовательно формулы

$$(2)\quad (\exists x)\, F(x) \supset (\exists x) \,.\, (\exists x)\, G(x) \supset (\exists x)\, F(x),$$

$$(3)\quad (\exists x)[(\exists x)\, F_1(x) \supset (\exists x) \,.\, (\exists x)\, F(x) \supset (\exists x)\, G(x)] \supset$$
$$(\exists x) \,.\, (\exists x)\, [(\exists x)\, F_1(x) \supset (\exists x)\, F(x)] \supset (\exists x) \,.\, (\exists x)\, F_1(x) \supset (\exists x)\, G(x),$$

$$(4)\quad (\exists x)[(\exists x)(x) \sim F(x) \supset (\exists x)(x) \sim G(x)] \supset (\exists x) \,.\, (\exists x)\, G(x) \supset (\exists x) F(x),$$

(5) $(\exists x)(y)(x)F(y, x) \supset (\exists x)F(z, x)$,

которые являются теоремами системы F^{1p}_2.

Более того, этим преобразованием каждое исходное правило вывода системы F^{1p}_2 преобразуется в исходное или производное правило. (Для того чтобы показать это для правила *400, нужно воспользоваться тем фактом, являющимся следствием из **320, что всякая теорема системы F^{1p}_2 содержит знак импликации и что, следовательно, никакая теорема системы F^{1p}_2 не преобразуется в такую пп-формулу, которая содержала бы x в качестве свободной переменной.) Из этого следует независимость аксиомы †408.

Упражнения к § 41

41.0. Для того чтобы завершить описанное выше доказательство независимости аксиомы †408, приведите детали доказательства того, что (1) не является теоремой системы F^{1p}_2, а (2)—(5) являются теоремами. (Для доказательства первого из этих предложений покажите с помощью правил подстановки вместо функциональных переменных, что если (1) является теоремой, то и $G(x) \supset G(y)$ также является теоремой, что противоречит **324.)

41.1. Следуя Гёделю, докажите независимость аксиомы †408 с помощью преобразования пп-формул системы F^{1p}_2, которое состоит в замене на $[p \not\subset p]$ каждой пп-части вида $(\forall \mathbf{a})\mathbf{f}(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — индивидная переменная, а $\mathbf{f}$ — сингулярная функциональная переменная, а также каждой пп-части вида $(\forall \mathbf{a})\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ — индивидная переменная, а $\mathbf{b}$ — пропозициональная переменная.

41.2. Следуя аналогии с § 40 и используя те же самые, что и в § 40, правила вывода *400—*404_n, переформулируйте систему F^{1i} из упражнения 38.6 в виде чистого интуиционистского функционального исчисления первого порядка F^{1ip}_2 с конечным числом аксиом. Изучите независимость аксиом и правил системы F^{1ip}_2. (Следует воспользоваться результатами упражнений 26.18, 36.6—38.8, а также § 41.)

41.3. Исследуйте независимость аксиом и правил введенной в упражнении 40.2 формулировки расширенного пропозиционального исчисления.

42. Сколемовская нормальная форма. Мы говорим, что пп-формула [402] находится в *сколемовской нормальной форме*, если она находится в предваренной нормальной форме без свободных индивидных переменных и ее префикс имеет вид

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n),$$

где $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$. Другими словами, пп-формула в предваренной нормальной форме находится в сколемовской нормальной форме, если она не имеет свободных индивидных переменных, ее префикс содержит по меньшей мере один квантор существования и каждый квантор существования в префиксе предшествует каждому квантору общности [403].

Для получения того, что мы называем *стандартной сколемовской нормальной формой* данной пп-формулы **A**, мы пользуемся следующим процессом сведе́ния:

i. Вначале сводим **A** к ее стандартной предваренной нормальной форме **B** по методу § 39.

ii. Если $\mathbf{c}_1$ есть первая в алфавитном порядке свободная индивидная переменная пп-формулы **B**, то приписываем к **B** квантор общности $(\forall \mathbf{c}_1)$. Повторяем этот шаг до тех пор, пока **B** не сведется к пп-формуле $\mathbf{C}_1$ в предваренной нормальной форме без свободных индивидных переменных. [Таким образом, $\mathbf{C}_1$ есть $(\mathbf{c}_u)(\mathbf{c}_{u-1}) \ldots (\mathbf{c}_1)\mathbf{B}$, где $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_u$ — свободные индивидные переменные пп-формулы **B** в их алфавитном порядке. Разумеется, u может быть равно 0.]

iii. Если $\mathbf{C}_1$ находится в сколемовской нормальной форме, то пусть **C** совпадает с $\mathbf{C}_1$.

iv. Если $\mathbf{C}_1$ имеет пустой префикс (это будет иметь место, когда $\mathbf{C}_1$ является пп-формулой системы P), то пусть **C** будет $(\exists x) \centerdot F(x) \supset F(x) \supset \mathbf{C}_1$. Тогда **C** находится в сколемовской нормальной форме.

v. Если не имеют места случаи iii и iv, то $\mathbf{C}_1$ должна иметь вид

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k)(\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{N}_1,$$

где $k \geqslant 0$ и $\mathbf{N}_1$ находится в предваренной нормальной форме и имеет своими свободными индивидными переменными только $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}$. Пусть $\mathbf{f}_1$ — первая в алфавитном порядке $(k+1)$-арная функциональная переменная, не входящая в $\mathbf{C}_1$. Пусть $\mathbf{C}_2$ — предваренная нормальная форма пп-формулы

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k) \centerdot (\mathbf{a}_{k+1})[\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1})] \supset (\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}).$$

Тогда если $\mathbf{C}_2$ находится в сколемовской нормальной форме, то пусть **C** совпадает с $\mathbf{C}_2$. В противном случае повторяем сведе́ние. То есть $\mathbf{C}_2$ имеет вид

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_{k'})(\mathbf{a}_{k'+1})\mathbf{N}_2,$$

где $k' > k$ и $\mathbf{N}_2$ находится в предваренной нормальной форме и имеет своими свободными индивидными переменными только $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k'+1}$. Пусть $\mathbf{f}_2$ — первая в алфавитном порядке $(k'+1)$-арная функциональная переменная, не входящая в $\mathbf{C}_2$. Пусть $\mathbf{C}_3$ — предваренная нормальная форма пп-формулы

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_{k'})_{\blacksquare}(\mathbf{a}_{k'+1})[\mathbf{N}_2 \supset \mathbf{f}_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k'+1})] \supset (\mathbf{a}_{k'+1})\,\mathbf{f}_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k'+1}).$$

Тогда если $\mathbf{C}_3$ находится в сколемовской нормальной форме, то пусть $\mathbf{C}$ совпадает с $\mathbf{C}_3$. В противном случае, продолжая сведение, мы сводим $\mathbf{C}_3$ и $\mathbf{C}_4$, и т. д., пока не получим пп-формулу $\mathbf{C}_{n-l+1}$ в сколемовской нормальной форме, с которой тогда и совпадает $\mathbf{C}$. Мы увидим, что $\mathbf{C}$ есть $\mathbf{C}_{n-l+1}$, где l есть число тех кванторов общности, которые в префиксе пп-формулы $\mathbf{C}_1$ стоят после последнего квантора существования, и где n есть общее число кванторов общности в префиксе пп-формулы $\mathbf{C}_1$ (в действительности это число совпадает с числом кванторов общности в префиксе пп-формулы $\mathbf{C}$).

**420. Всякая пп-формула $\mathbf{A}$ может быть сведена к пп-формуле $\mathbf{C}$, находящейся в сколемовской нормальной форме, посредством только что описанного в i — v процесса. Этот процесс сведения эффективен, и являющаяся его результатом пп-формула $\mathbf{C}$ в сколемовской нормальной форме определена однозначно, если задана пп-формула $\mathbf{A}$.

Доказательство. В серии шагов сведения, описанных в v, с помощью которых $\mathbf{C}_1$ сводится к $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_2$ сводится к $\mathbf{C}_3$ и т. д., каждый шаг приводит к тому, что в префиксе первый квантор общности заменяется квантором существования и одновременно в конце префикса добавляется новый квантор общности (без каких-либо иных изменений в префиксе) [404]. Таким образом, с каждым шагом уменьшается число таких кванторов общности, которые предшествуют какому-нибудь квантору существования. Поэтому серии шагов сведения должны окончиться на пп-формуле $\mathbf{C}$ в сколемовской нормальной форме. Оставшаяся часть утверждения теоремы очевидна.

Определение. Пп-формула $\mathbf{C}$, полученная из пп-формулы $\mathbf{A}$ с помощью описанного в i — v процесса, называется стандартной сколемовской нормальной формой пп-формулы $\mathbf{A}$.

**421. Если $\mathbf{C}$ есть стандартная сколемовская нормальная форма пп-формулы $\mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{A}$ в том и только в том случае, когда $\vdash \mathbf{C}$.

Доказательство. Мы продолжаем пользоваться теми же обозначениями, что и при формулировке шагов сведения i — v.

В силу *392, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Следовательно, в силу P, $\vdash \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathbf{B}$.

В силу *301 и *306 — или же в силу *401, †409 и *404$_1$ — $\vdash \mathbf{B}$ в том и только в том случае, если $\vdash \mathbf{C}_1$ [405].

Если $\mathbf{C}$ получено в соответствии с iii, то $\mathbf{C}$ совпадает с $\mathbf{C}_1$. Следовательно, $\vdash \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathbf{C}$.

Если $\mathbf{C}$ получено в соответствии с iv, то мы имеем в силу P:

$$\vdash \mathbf{C}_1 \equiv . F(x) \supset F(x) \supset \mathbf{C}_1.$$

Следовательно, обобщая по x и используя затем *388, так как $\mathbf{C}_1$ не содержит свободных индивидных переменных, мы получаем

$$\vdash \mathbf{C}_1 \equiv (\exists x) . F(x) \supset F(x) \supset \mathbf{C}_1.$$

То есть $\vdash \mathbf{C}_1 \equiv \mathbf{C}$. Следовательно, в силу P, $\vdash \mathbf{C}_1$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathbf{C}$. Следовательно, $\vdash \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathbf{C}$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\mathbf{C}$ получено в соответствии с v. Мы должны показать, что $\vdash \mathbf{C}_1$ в том и только в том случае, если $\vdash \mathbf{C}_2$; $\vdash \mathbf{C}_2$ в том и только в том случае, если $\vdash \mathbf{C}_3$; . . .; $\vdash \mathbf{C}_{n-l}$ в том и только в том случае, если $\vdash \mathbf{C}_{n-l+1}$. Так как $\mathbf{C}$ совпадает с $\mathbf{C}_{n-l+1}$, то отсюда будет следовать, что $\vdash \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда $\vdash \mathbf{C}$.

Мы подробно докажем, что $\vdash \mathbf{C}_1$ в том и только в том случае, если $\vdash \mathbf{C}_2$. Доказательства того, что $\vdash \mathbf{C}_2$ в том и только в том случае, если $\vdash \mathbf{C}_3$, и т. д., проводятся точно так же — так что рассуждение может быть завершено математической индукцией, что мы предоставляем читателю.

В силу *306 (ср. примечание 405) и P,

$$(\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{N}_1 \vdash \mathbf{N}_1 \supset \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}) \supset \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}).$$

Следовательно, с помощью обобщения по $\mathbf{a}_{k+1}$ и *333 получаем, что

$$(\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{N}_1 \vdash (\mathbf{a}_{k+1}) [\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1})] \supset (\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}).$$

Следовательно, в силу *367,

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k)(\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{N}_1 \vdash (\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k) . (\mathbf{a}_{k+1}) [\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1})] \supset (\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}).$$

Следовательно, в силу *392 и P, $\mathbf{C}_1 \vdash \mathbf{C}_2$. Следовательно, если $\vdash \mathbf{C}_1$, то $\vdash \mathbf{C}_2$.

Теперь предположим, что $\vdash \mathbf{C}_2$. Тогда, в силу *392 и P,

$$\vdash (\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k) . (\mathbf{a}_{k+1}) [\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1})] \supset (\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}).$$

Следовательно, подставляя $\mathbf{N}_1$ вместо $\mathbf{f}_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1})$ в соответствии с правилом подстановки вместо функциональных переменных, мы получаем

$$\vdash (\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k) . (\mathbf{a}_{k+1}) [\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_1] \supset (\mathbf{a}_{k+1}) \mathbf{N}_1.$$

Теперь, в силу P и правила обобщения, $\vdash (\mathbf{a}_{k+1})[\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_1]$. Следовательно, в силу *модус поненс*,

$$(\mathbf{a}_{k+1})[\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_1] \supset (\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{N}_1 \vdash (\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{N}_1.$$

Следовательно, в силу *367,

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_k) \, . \, (\mathbf{a}_{k+1})[\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_1] \supset (\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{N}_1 \vdash$$
$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_k)(\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{N}_1.$$

Поэтому $\vdash (\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_k)(\mathbf{a}_{k+1})\mathbf{N}_1$. То есть $\vdash \mathbf{C}_1$.

43. Общезначимость и выполнимость. Правила a — f, приведенные мелким шрифтом в § 30 в качестве семантических правил, определяющих главную интерпретацию системы F^{1p}, можно так модифицировать или переинтерпретировать, чтобы придать им чисто синтаксический характер.

А именно, формулируя эти правила в § 30, мы употребляли слова „область значений" и „значение" каждое в некотором (предполагаемом) семантическом смысле, так что эти правила получали прямое отношение к вопросу о том, что, по нашему мнению, имеет в виду человек, который, используя F^{1p} в качестве действительного языка для целей общения, утверждает одну из пп-формул этой системы. Или, точнее, эти правила предлагали некоторую норму, некоторое идеальное требование относительно того, что такой человек должен иметь в виду.

Теперь же мы вновь вводим правила a — f с новым содержанием, в соответствии с которым мы не приписываем словам „область значений" и „значение" никакого семантического смысла, а, выбрав частный непустой класс в качестве исходной области индивидов, считаем, что правила составляют определение слов „область значений" и „значение" (для слова „значение" — индуктивное определение). Теперь „область значений" переменной оказывается просто некоторым классом, который с помощью определения абстрактным образом связан с этой переменной, а „значение" пп-формулы для данной системы „значений" переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (среди которых имеются все свободные переменные этой пп-формулы) оказывается просто некоторым истинностным значением [40], которое абстрактным образом связано с данной пп-формулой и с n упорядоченными парами $\langle \mathbf{a}_1, a_1\rangle, \langle \mathbf{a}_2, a_2\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle \mathbf{a}_n, a_n\rangle$, где каждое a является элементом области значений переменной $\mathbf{a}_i$. Если в дальнейшем слова „область значений" и „значение" будут встречаться в синтаксическом рассуждении, то их следует понимать в этом их синтаксическом смысле, причем то, что некоторое место напечатано не мелким шрифтом, мы будем считать достаточным указанием на то, что эти слова не имеют своего семантического смысла. (Там, где это будет необходимо для ясности понимания, мы, во всяком случае, можем использовать такие более полные выражения, как „значение в синтаксическом смысле".)

Эти синтаксические понятия *области значений* и *значения* могут, конечно, использоваться независимо от какой бы то ни было интерпретации систем F^{1p} или F^{1p}_2, следовательно, даже в тех случаях, когда система используется просто как формальное исчисление, без интерпретации, или даже тогда, когда она используется с интерпретацией, совершенно отличной от указанной в § 30 главной интерпретации.

Если выбрана некоторая непустая область индивидов, то мы называем пп-формулу *общезначимой в* этой области, если она принимает значение t для всех возможных значений ее свободных переменных, и *выполнимой в* этой области, если она принимает значение t для хотя бы одной системы возможных значений ее свободных переменных. (Под „возможным" значением некоторой переменной мы понимаем здесь просто такое значение, которое принадлежит к области значений этой переменной в соответствии с правилами a, b_n.)

Пп-формула называется *общезначимой*, если она общезначима во всякой непустой области индивидов, и *выполнимой*, если она выполнима в какой-нибудь непустой области[407)].

Замыканием всеобщности пп-формулы **B** мы будем называть пп-формулу $(\mathbf{c}_u)(\mathbf{c}_{u-1})\ldots(\mathbf{c}_1)\mathbf{B}$, где $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_u$ — свободные индивидные пременные пп-формулы **B**, взятые в алфавитном порядке. Аналогично, мы условимся называть пп-формулу $(\exists\mathbf{c}_u)(\exists\mathbf{c}_{u-1})\ldots(\exists\mathbf{c}_1)\mathbf{B}$, где $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_u$ — взятые в алфавитном порядке индивидные переменные пп-формулы **B**, *замыканием существования* пп-формулы **B**.

430. Пп-формула **A тогда и только тогда общезначима в данной непустой области, когда ее отрицание $\sim\mathbf{A}$ не выполнимо в этой области. Пп-формула **A** общезначима тогда и только тогда, когда ее отрицание $\sim\mathbf{A}$ не выполнимо.

Доказательство. Это тотчас следует из правила d или, точнее, из соответствующего правилу d пункта определения термина „значение" в синтаксическом смысле.

**431. Пп-формула тогда и только тогда выполнима в данной непустой области, когда ее отрицание в этой области не общезначимо. Пп-формула выполнима тогда и только тогда, когда ее отрицание не общезначимо.

Доказательство. Это также тотчас следует из правила d.

**432. Пп-формула тогда и только тогда общезначима в данной непустой области, когда в этой области общезначимо ее замыкание всеобщности. Пп-формула общезначима тогда и только тогда, когда общезначимо ее замыкание всеобщности.

Доказательство. В силу правила f.

*433. Пп-формула тогда и только тогда выполнима в данной непустой области, когда в этой области выполнимо ее замыкание существования. Пп-формула выполнима тогда и только тогда, когда выполнимо ее замыкание существования.

Доказательство. В силу правил d и f. Действительно, из этих двух правил вместе следует, что для заданной системы значений свободных переменных пп-формулы $(\exists \mathbf{a})\mathbf{A}$ значением ее является t, если пп-формула **A** принимает значение t для хотя бы одного значения переменной **a**, и значением пп-формулы $(\exists \mathbf{a})\mathbf{A}$ является f, если f является значением пп-формулы **A** для всех значений переменной **a**.

** 434. Всякая теорема общезначима[408].

Доказательство. Используя одну из формулировок F^{1p} или F^{1p}_2, можно показать, что все аксиомы общезначимы и что все правила вывода сохраняют общезначимость. Подробности предоставляются читателю.

**435. Пп-формула тогда и только тогда общезначима в данной непустой области, когда в этой области общезначима ее предваренная нормальная форма. Пп-формула общезначима тогда и только тогда, когда общезначима ее предваренная нормальная форма.

Доказательство. Если **B** — предваренная нормальная форма пп-формулы **A**, то, в силу *392, мы имеем $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Следовательно, в силу **434, пп-формула $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ общезначима. Следовательно, в силу правил d и e, **A** и **B** имеют одни и те же значения для всякой системы значений их свободных переменных. Из этого, в силу определения общезначимости, следует утверждение доказываемой метатеоремы.

*436. Пп-формула тогда и только тогда выполнима в данной непустой области, когда в этой области выполнима ее предваренная нормальная форма.

Доказательство. Как и в предыдущем доказательстве, если **B** есть стандартная предваренная нормальная форма пп-формулы **A**, то **A** и **B** имеют одни и те же значения для всякой системы значений их свободных переменных. Из этого, в силу определения выполнимости, следует утверждение нашей метатеоремы.

*437. Пп-формула тогда и только тогда общезначима в некоторой непустой области, когда в этой области общезначима ее сколемовская нормальная форма. Пп-формула общезначима тогда и только тогда, когда общезначима ее сколемовская нормальная форма.

Доказательство. Доказательство этой метатеоремы совершенно аналогично доказательству метатеоремы *421 и отличается от последнего только тем, что всюду, где это доказательство использует некоторую теорему, настоящее доказательство должно вместо этого использовать тот факт, что эта теорема общезначима, а всюду, где доказательство метатеоремы *421 использует некоторое правило вывода, настоящее доказательство должно вместо этого использовать тот факт, что это правило вывода сохраняет общезначимость (в произвольной непустой области).

Мы говорим, что некоторая пп-формула находится в *сколемовской нормальной форме для выполнимости*, если она имеет предваренную нормальную форму без свободных индивидных переменных и ее префикс имеет вид

$$(\mathbf{a}_1)\,(\mathbf{a}_2)\,\ldots\,(\mathbf{a}_m)\,(\exists\mathbf{b}_1)\,(\exists\mathbf{b}_2)\,\ldots\,(\exists\mathbf{b}_n),$$

где $m \quad 1$, $n \geqslant 0$.

Если дана некоторая пп-формула $\mathbf{A}$, то мы можем найти стандартную сколемовскую нормальную форму для $\sim\mathbf{A}$. Это будет пп-формула

$$(\exists\mathbf{a}_1)\,(\exists\mathbf{a}_2)\,\ldots\,(\exists\mathbf{a}_m)\,(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\,\ldots\,(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M},$$

в которой $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ и в $\mathbf{M}$ нет кванторов. Тогда предваренная нормальная форма отрицания этой пп-формулы будет пп-формулой

$$(\mathbf{a}_1)\,(\mathbf{a}_2)\,\ldots\,(\mathbf{a}_m)\,(\exists\mathbf{b}_1)\,(\exists\mathbf{b}_2)\,\ldots\,(\exists\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M}',$$

где $\mathbf{M}'$ получена из $\mathbf{M}$ либо отбрасыванием, либо добавлением начального знака $\sim$. Эта последняя пп-формула, а именно предваренная нормальная форма отрицания сколемовской нормальной формы отрицания пп-формулы $\mathbf{A}$, находится в сколемовской нормальной форме для выполнимости; эту пп-формулу мы будем называть сколемовской *нормальной формой пп-формулы* $\mathbf{A}$ *для выполнимости*.

**438. Пп-формула тогда и только тогда выполнима в некоторой непустой области, когда в этой области выполнима ее сколемовская нормальная форма для выполнимости. Пп-формула выполнима тогда и только тогда, когда выполнима ее сколемовская нормальная форма для выполнимости.

Доказательство. По **431, **437, **430, **436.

**439. Если пп-формула общезначима в некоторой непустой области, то она общезначима и во всякой другой непустой области с тем же или меньшим числом индивидов. Если пп-формула выполнима в некоторой непустой области, то она выполнима и во всякой другой непустой области с тем же или большим числом индивидов.

Доказательство. Предположим, что пп-формула **A** выполнима в непустой области $\mathfrak{J}$, и пусть $\mathfrak{K}$ — область с тем же или большим числом индивидов. Тогда можно установить однозначное соответствие между $\mathfrak{J}$ и некоторой частью $\mathfrak{K}^\circ$ области $\mathfrak{K}$ (где $\mathfrak{K}^\circ$ может или совпадать с $\mathfrak{K}$, или быть правильной частью $\mathfrak{K}$). Если i — произвольный индивид из $\mathfrak{J}$, то пусть i' будет отвечающим ему в этом одно-однозначном соответствии индивидом из $\mathfrak{K}^\circ$. Выберем, далее, в $\mathfrak{J}$ некоторый частный индивид i_0. Если k — произвольный индивид из $\mathfrak{K}^\circ$, то пусть $k^\backprime$ — соответствующий ему в рассматриваемом одно-однозначном соответствии индивид из $\mathfrak{J}$; если же k — произвольный индивид, принадлежащий $\mathfrak{K}$, но не принадлежащий $\mathfrak{K}^\circ$, то пусть $k^\backprime$ есть i_0. Если Φ есть m-арная пропозициональная функция *над* $\mathfrak{J}$, т. е. пропозициональная функция, область определения которой состоит из упорядоченных m-ок индивидов из $\mathfrak{J}$, то пусть Φ' будет m-арной пропозициональной функцией над $\mathfrak{K}$, определенной правилом, что $\Phi'(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ есть $\Phi(k_1^\backprime, k_2^\backprime, \ldots, k_m^\backprime)$.

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — полный перечень свободных переменных пп-формулы **A**. Так как **A** выполнима в $\mathfrak{J}$, то существует такая система значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, где каждое a_i есть индивид из $\mathfrak{J}$ или пропозициональная функция над $\mathfrak{J}$, для которой **A** принимает значение истина. Тогда $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ является такой системой значений переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, в которой каждое a_i' есть индивид из $\mathfrak{K}$ или пропозициональная функция над $\mathfrak{K}$ и для которой **A** принимает значение истина. Таким образом, **A** выполнима в $\mathfrak{K}$.

Этим завершается доказательство второй части утверждения нашей метатеоремы. Отсюда первая часть утверждения следует в силу **430.

Упражнения к § 43

43.0. Пусть **A** не содержит свободных индивидных переменных, и пусть **C** является сколемовской нормальной формой пп-формулы **A**. Покажите с помощью примера, что утверждение $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{C}$ в общем случае неверно. Всегда ли верно, что $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{C}$? Что $\vdash \mathbf{C} \supset \mathbf{A}$?

43.1. Найдите сколемовскую нормальную форму для каждой из следующих пп-формул:

(1) $$F(x) \supset F(x).$$

(2) $$(x)\,F(x) \supset (\exists x)\,F(x).$$

(3) $$p \supset (\exists x)\,p.$$

(4) $$G(x) \supset_x H(x) \supset . \ (\exists x)\,G(x) \supset (\exists x)\,H(x).$$

(5) $$(\exists x)(\exists y)\,F(x,\ y,\ z) \supset (\exists y)(\exists x)\,F(x,\ y,\ z).$$

43.2. Пусть правила α — ζ из § 30 переинтерпретированы в виде синтаксических определений терминов „область значений" и „значение" для системы F^{1h} подобно тому, как мы это сделали в тексте для системы F^{1p} и правил a — f. Назовем пп-формулу системы F^{1h} *общезначимой*, если она принимает значение истина для всех возможных значений своих свободных переменных, и назовем пп-формулу системы F^{1h} без свободных переменных *истинной*, если она имеет значение истина. Далее, считая заданной некоторую пп-формулу **A** системы F^{1h}, различными индивидными переменными (связанными или свободными) которой являются $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, определим *характеристическую функцию* всякой пп-части **B** пп-формулы **A** по индукции следующим образом. Характеристической функцией для $\Sigma(\mathbf{a}_i,\ \mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_k)$ является n-арная функция натуральных чисел, значением которой для аргументов a_1, a_2, ..., a_n является 0, если $a_i + a_j = a_k$, и значением которой в противном случае является 1. Характеристической функцией для $\Pi(\mathbf{a}_i,\ \mathbf{a}_j,\ \mathbf{a}_k)$ является n-арная функция натуральных чисел, значением которой для аргументов a_1, a_2, ..., a_n является 0, если $a_i a_j = a_k$, и 1 в противном случае. Если характеристической функцией для $\mathbf{B}_1$ является f_1, то характеристической функцией для $\sim\mathbf{B}_1$ является n-арная функция натуральных чисел, значением которой для аргументов a_1, a_2, ..., a_n является $1 - f_1(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Если характеристическими функциями для $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ служат f_1 и f_2 соответственно, то характеристической функцией для $[\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2]$ служит n-арная функция для натуральных чисел, значением которой для аргументов a_1, a_2, ..., a_n служит $(1 - f_1(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n))\,f_2(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Если характеристической функцией для $\mathbf{B}_1$ является f_1, то характеристической функцией для $(\forall\mathbf{a}_i)\mathbf{B}_1$ является n-арная функция натуральных чисел, значением которой для аргументов a_1, a_2, ..., a_n является

$$1 - \prod_{a_i}(1 - f_1(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)),$$

где произведение берется по всем натуральным числам a_i и считается равным 1, если все сомножители равны 1, и 0, если хотя бы один сомножитель равен 0. Докажите, что пп-формула **A** системы F^{1h} *общезначима* (или, в случае, когда **A** не имеет свободных переменных, *истинна*) тогда и только тогда, когда характеристическая функция пп-формулы **A** как пп-части пп-формулы **A** тождественно равна нулю, т. е. принимает значение 0 для всех возможных аргументов.

43.3. Покажите, что пп-формула

$$(\exists x)(y) \centerdot F(x, y) \supset \centerdot \sim F(y, x) \supset \centerdot F(x, x) \equiv F(y, y)$$

общезначима во всякой области, содержащей не более трех индивидов, но не общезначима в области с четырьмя индивидами.

43.4. Докажите **324, показав, что если бескванторная пп-формула не является подстановковым частным случаем тавтологии, то существует такая непустая область, в которой она не общезначима.

43.5. Покажите, что следующие пп-формулы общезначимы во всякой непустой конечной области, но не общезначимы в бесконечной области [409]:

(1) $(\exists x)(y)(\exists z) \centerdot F(y, z) \supset F(x, z) \supset \centerdot F(x, x) \supset F(y, x)$.

(2) $(x_1)(x_2)(x_3)[F(x_1, x_1) \centerdot F(x_1, x_3) \supset F(x_1, x_2) \vee F(x_2, x_3)] \supset$

$$(\exists y)(z) F(y, z).$$

43.6. (1) Не ссылаясь на сведение пп-формулы к ее сколемовской нормальной форме и не предполагая такое сведение известным, дайте непосредственное определение процесса сведения пп-формулы к ее *сколемовской нормальной форме для выполнимости.* (2) Примените этот процесс к отрицанию пп-формулы из упражнения 43.5 (1).

43.7. Докажите непосредственно, что пп-формула выполнима тогда и только тогда, когда ее дуал не общезначим.

44. Теорема Гёделя о полноте.

**440. Всякая общезначимая пп-формула является теоремой. (*Теорема Гёделя о полноте.*)

Доказательство. В силу *421 и **437, достаточно рассмотреть пп-формулу **A** в сколемовской нормальной форме

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M},$$

где **M** — бескванторная формула, содержащая индивидные переменные $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ (и не содержащая иных индивидных переменных). Мы покажем, что либо (1) **A** есть теорема, либо (2) **A** не общезначима.

Пронумеруем все (упорядоченные) m-ки положительных целых чисел согласно следующему правилу. Если $i_1 + i_2 + \ldots + i_m < j_1 + j_2 + \ldots + j_m$, то m-ка $\langle i_1, i_2, \ldots, i_m\rangle$ предшествует (т. е. получает в нумерации меньший номер) m-ке $\langle j_1, j_2, \ldots, j_m\rangle$; если же $i_1 + i_2 + \ldots + i_m = j_1 + j_2 + \ldots + j_m$, $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, $\ldots$, $i_k = j_k$, $i_{k+1} < j_{k+1}$, то m-ка $\langle i_1, i_2, \ldots, i_m\rangle$ опять-таки предшествует m-ке $\langle j_1, j_2, \ldots, j_m\rangle$ [410].

Итак m-ки положительных целых чисел перенумерованы, т. е. расположены в бесконечную последовательность. Первая m-ка в этой нумерации есть $\langle 1, 1, \ldots, 1, 1, 1\rangle$; вторая m-ка есть $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 2\rangle$; третья есть $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1, 2, 1\rangle$ четвертая — $\langle 1, 1, 1, \ldots, 2, 1, 1\rangle$; и т. д. [411]. Очевидно, что никакое входящее в k-ю m-ку положительное целое число не превосходит k (если $m \geqslant 1$).

Мы обозначим k-ю m-ку в этой нумерации через $\langle [k1], [k2], \ldots, [km]\rangle$. То есть мы используем $[kl]$ в качестве обозначения для l-го положительного целого числа в k-й m-ке.

Пусть теперь $\mathbf{B}_k$ будет

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \ldots\mathfrak{a}_m\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \ldots\ \mathfrak{b}_n}_{x_{[k1]}\ x_{[k2]}\ldots\ x_{[km]}\ x_{(k-1)n+2}\ x_{(k-1)n+3}\ \ldots\ x_{kn+1}}\mathbf{M}\Big|,$$

$\mathbf{C}_k$ будет

$$\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{B}_k$$

и $\mathbf{D}_k$ будет

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_{kn+1})\,\mathbf{C}_k.$$

Заметим, что ни одна из переменных $x_{(k-1)n+2}, x_{(k-1)n+3}, \ldots, x_{kn+1}$, которые подставляются вместо $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$, не совпадает ни с одной из переменных $x_{[k1]}, x_{[k2]}, \ldots, x_{[km]}$, подставляемых вместо $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Более того, переменные $x_{(k-1)n+2}, x_{(k-1)n+3}, \ldots, x_{kn+1}$ все различны между собой и отличны от всех переменных, входящих в $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{k-1}$. Но все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{kn+1}$ входят в $\mathbf{C}_k$.

(Не исключено, что n может быть равно 0, и читателю следует обратить внимание на то, что этот частный случай не доставляет никаких затруднений, но m никогда не должно быть меньше чем 1.)

Так как $\mathbf{M}$ не содержит кванторов, то и $\mathbf{B}_k$ и $\mathbf{C}_k$ также не содержат кванторов и (за исключением случая $n = 0$) $x_1, x_2, \ldots, x_{kn+1}$ составляют полный перечень свободных переменных формулы $\mathbf{C}_k$.

Лемма. Для всякого k $\mathbf{D}_k \vdash \mathbf{A}$.

Мы докажем лемму математической индукцией по k. При этом предположим, что переменные $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ все отличны от переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (чего в случае нужды можно достигнуть алфавитной заменой связанных переменных в $\mathbf{A}$).

В силу *330 и m раз повторенного *модус поненс*,

$$(\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n)\mathrm{S}^{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ \ldots\ \mathfrak{a}_m}_{x_1 x_1\ \ldots\ x_1}\mathbf{M}\Big| \vdash \mathbf{A}.$$

Следовательно, по * 306 и *модус поненс*,

$$(x_1)(\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n)\mathrm{S}^{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ \ldots\ \mathfrak{a}_m}_{x_1 x_1\ \ldots\ x_1}\mathbf{M}\Big| \vdash \mathbf{A}.$$

Применяя теперь n раз алфавитную замену связанных переменных, мы получаем, что $\mathbf{D}_1 \vdash \mathbf{A}$.

Таким образом, лемма доказана для случая $k = 1$.

Предположим теперь для некоторого k, большего чем 1, что $\mathbf{D}_{k-1} \vdash \mathbf{A}$. Применяя n раз *385, *341 и P, мы получаем, что

$$(x_{(k-1)n+2})(x_{(k-1)n+3}) \ldots (x_{kn+1})[\mathbf{C}_{k-1} \vee \mathbf{B}_k] \vdash \mathbf{C}_{k-1} \vee (x_{(k-1)n+2})(x_{(k-1)n+3}) \ldots (x_{kn+1})\mathbf{B}_k.$$

Так как $\mathbf{C}_{k-1} \vee \mathbf{B}_k$ есть пп-формула $\mathbf{C}_k$, то, применяя * 306 и *модус поненс* $(k-1)n+1$ раз, мы получаем отсюда, что

$$\mathbf{D}_k \vdash \mathbf{C}_{k-1} \vee (x_{(k-1)n+2})(x_{(k-1)n+3}) \ldots (x_{kn+1})\mathbf{B}_k.$$

Теперь n раз повторяя алфавитную замену связанных переменных, получаем

$$\mathbf{D}_k \vdash \mathbf{C}_{k-1} \vee (\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2) \ldots (\mathbf{b}_n) \mathrm{S}^{\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_m}_{x_{[k1]}\ x_{[k2]}\ \ldots\ x_{[km]}} \mathbf{M} \Big|.$$

Кроме того, m раз применяя *330 и закон транзитивности импликации, мы получаем

$$\vdash (\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2) \ldots (\mathbf{b}_n) \mathrm{S}^{\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_m}_{x_{[k1]}\ x_{[k2]}\ \ldots\ x_{[km]}} \mathbf{M} \Big| \supset \mathbf{A}.$$

Следовательно, в силу P,

$$\mathbf{D}_k \vdash \mathbf{C}_{k-1} \vee \mathbf{A}.$$

Отсюда, обобщая по $x_{(k-1)n+1}$ и используя * 386 и P, затем обобщая по $x_{(k-1)n}$ и используя * 386 и P, и т. д. $(k-1)n+1$ раз, мы получаем, что

$$\mathbf{D}_k \vdash \mathbf{D}_{k-1} \vee \mathbf{A}.$$

Так как $\mathbf{D}_{k-1} \vdash \mathbf{A}$, то мы заключаем, что $\vdash \mathbf{D}_{k-1} \supset \mathbf{A}$, и следовательно, в силу P, что $\mathbf{D}_k \vdash \mathbf{A}$.

Этим завершается доказательство леммы. Продолжая доказательство метатеоремы **440, мы различаем два случая [412)].

Случай 1: Для некоторых k формула $\mathbf{C}_k$ есть теорема. Тогда, обобщая $kn+1$ раз, мы получаем, что и $\mathbf{D}_k$ есть теорема. Следовательно, в силу леммы, $\mathbf{A}$ есть теорема.

Случай 2: Ни для какого k формула $\mathbf{C}_k$ не является теоремой. Тогда, в силу *311, можно для каждого k найти такое распределение истинностных значений по *элементарным частям* формулы $\mathbf{C}_k$ [т. е. по таким ее пп-частям, которые имеют либо вид отдельной пропозициональной переменной, либо вид $\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_i)$], чтобы значением пп-формулы $\mathbf{C}_k$, вычисленным по истинностным таблицам для $\supset$ и $\sim$, было f, или, как мы будем говорить, можно найти *опровергающее распределение* истинностных значений по элементарным частям формулы $\mathbf{C}_k$. (Одна и та же элементарная часть может встречаться в $\mathbf{C}_k$ несколько раз, и в этом случае всем ее вхождениям приписывается, разумеется, одно и то же истинностное значение; в то же время различные элементарные части могут получить различные истинностные значения даже в том случае, когда они отличаются только индивидными переменными.)

Пусть теперь $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, ... — различные элементарные части, встречающиеся в $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ..., перенумерованные в следующем порядке: сначала различные элементарные части формулы $\mathbf{C}_1$ в порядке их первых вхождений в $\mathbf{C}_1$; затем различные элементарные части формулы $\mathbf{C}_2$, не встречавшиеся в формуле $\mathbf{C}_1$, в порядке их первых вхождений в $\mathbf{C}_2$; затем различные элементарные части формулы $\mathbf{C}_3$, не встречавшиеся в $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$, в порядке их первых вхождений в $\mathbf{C}_3$; и т. д.

Теперь мы следующим образом определим „главное распределение" истинностных значений по $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, ... Если $\mathbf{E}_1$ получает значение t в бесконечном числе опровергающих распределений[413] истинностных значений по элементарным частям формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ..., то $\mathbf{E}_1$ получает значение t и в главном распределении; в противоположном случае $\mathbf{E}_1$ должно в бесконечном числе опровергающих распределений истинностных значений по элементарным частям формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ... получать значение f, и в этом случае мы приписываем $\mathbf{E}_1$ значение f и в главном распределении. Далее мы рассматриваем ту бесконечную совокупность опровергающих распределений истинностных значений по элементарным частям формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ..., в которых $\mathbf{E}_1$ получает то же самое истинностное значение, что и в главном распределении; если в бесконечном числе этих распределений $\mathbf{E}_2$ получает значение t, то мы приписываем $\mathbf{E}_2$ значение t и в главном распределении, в противном же случае мы приписываем $\mathbf{E}_2$ в главном распределении значение f. Затем мы рассматриваем бесконечную совокупность опровергающих распределений истинностных значений по элементарным частям формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ..., в которых $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ получают обе те же самые истинностные значения, что и в главном распределении; если в бесконечном числе этих распределений $\mathbf{E}_3$ получает значение t, то мы приписываем $\mathbf{E}_3$ значение t и в главном распределении, в противном же случае мы приписываем $\mathbf{E}_3$ в главном распределении значение f и т. д.

Предположим теперь, что при главном распределении какая-нибудь из формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ..., скажем $\mathbf{C}_k$, принимает значение t. Различные элементарные части формулы $\mathbf{C}_k$ заключены в конечном начальном отрезке последовательности $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, ..., скажем в отрезке $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, ..., $\mathbf{E}_l$. Пусть в главном распределении элементарным частям $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, ..., $\mathbf{E}_l$ приписываются соответственно значения e_1, e_2, e_3, ..., e_l. Тогда, учитывая, что $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ... имеют вид дизъюнкций, а также учитывая истинностную таблицу для $\vee$, мы видим, что никакое распределение истинностных значений по элементарным частям формул $\mathbf{C}_j$, $j > k$, не может быть опровергающим распределением, если оно приписывает значения $e_1, e_2, \ldots, e_l$ элементарным частям $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_l$ соответственно. А это противоречит правилу, согласно которому мы приписывали истинностные значения e_l элементарным частям $\mathbf{E}_l$ при построении главного распределения.

Из этого следует, что при главном распределении все $\mathbf{C}_k$ принимают значение f. То есть при главном распределении все формулы $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \ldots$ одновременно принимают значение f.

Теперь мы возьмем совокупность всех положительных целых чисел в качестве области индивидов и следующим образом припишем значения пропозициональным и функциональным переменным пп-формулы **A**. Пропозициональная переменная p получает то же самое значение, которое приписано ей в главном распределении. i-арной функциональной переменной $\mathfrak{f}$ приписывается в качестве значения i-арная пропозициональная функция индивидов Φ, определяемая следующим правилом: $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ имеет то же самое истинностное значение, которое приписано $\mathfrak{f}(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i})$ в главном распределении; если же в главном распределении $\mathfrak{f}(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_i})$ не приписано никакого истинностного значения, то значением $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_i)$ является t.

Это распределение значений по пропозициональным и функциональным переменным пп-формулы **A** является в то же время и распределением значений по пропозициональным и функциональным переменным каждой пп-формулы $\mathbf{B}_k$ и каждой пп-формулы $\mathbf{C}_k$. Если мы, кроме того, еще припишем каждой индивидной переменной x_u в качестве ее значения положительное число u, то мы получим распределение значений по всем переменным формул $\mathbf{B}_k$ и $\mathbf{C}_k$. При этом распределении формула $\mathbf{C}_k$ принимает значение f (так как мы доказали, что $\mathbf{C}_k$ принимает значение f при главном распределении). Следовательно, и $\mathbf{B}_k$ принимает при этом распределении значение f (в силу того, что $\mathbf{C}_k$ есть $\mathbf{C}_{k-1} \vee \mathbf{B}_k$, и в силу истинностной таблицы для $\vee$). Следовательно, в силу правила f из § 30 (или в силу соответствующего правилу f случая в определении термина „значение" в синтаксическом смысле) значение f при этом распределении получает и формула

$$(\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n)\,\mathrm{S}^{x_{(k-1)n+2}}_{\mathfrak{b}_1}\,{}^{x_{(k_3-1)n+3}}_{\mathfrak{b}_2}\ldots{}^{x_{kn+1}}_{\mathfrak{b}_n}\,\mathbf{B}_k\,\Big|,$$

т. е. формула

$$(\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n)\,\mathrm{S}^{\mathfrak{a}_1}_{x_{[\ 1]}}\,{}^{\mathfrak{a}_2}_{x_{[k2]}}\ldots{}^{\mathfrak{a}_m}_{x_{[km]}}\,\mathbf{M}\,\Big|.$$

Это верно для всех k, а мы знаем, что когда k пробегает все возможные значения, $\langle x_{[k1]}, x_{[k2]}, \ldots, x_{[km]}\rangle$ пробегает все возможные m-ки переменных x_u и, следовательно, совершаются все возможные подстановки переменных x_u вместо $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Следовательно, формула

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\mathbf{M}$$

принимает значение f.

Таким образом, мы нашли такое распределение значений по пропозициональным и функциональным переменным пп-формулы **A**, при котором **A** принимает значение f. Поэтому пп-формула **A** не общезначима.

Этим завершается доказательство метатеоремы **440. Из доказательства можно вывести следующую метатеорему:

441. Если **A — пп-формула

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\mathbf{M}$$

в сколемовской нормальной форме, $\mathbf{B}_k$ — бескванторная пп-формула

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\ldots\,\mathbf{a}_m\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\,\ldots\,\mathbf{b}_n}_{x_{[k1]}\,x_{[k2]}\,\ldots\,x_{[km]}\,x_{(k-1)n+2}\,x_{(k-1)n+3}\,\ldots\,x_{kn+1}}\mathbf{M}\,|$$

и если $\mathbf{C}_k$ есть $\mathbf{B}_1 \vee \mathbf{B}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{B}_k$, то **A** является теоремой (общезначима) тогда и только тогда, когда существует такое положительное целое число, что $\mathbf{C}_k$ является подстановковым частным случаем некоторой тавтологии из P.

45. Теорема Лёвенгейма и обобщение Сколема. В случае 2 предыдущего доказательства теоремы Гёделя о полноте мы показали, что находящаяся в сколемовской нормальной форме и не являющаяся теоремой пп-формула **A** не общезначима в области положительных целых чисел. Следовательно, если некоторая пп-формула в сколемовской нормальной форме общезначима в области положительных целых чисел, то она является теоремой и поэтому, в силу **434, общезначима во всякой непустой области. Следовательно, в силу **437, если некоторая пп-формула общезначима в области положительных целых чисел, то она общезначима во всякой непустой области.

Кроме того, в силу **439, любая счетно-бесконечная область (в частности, например, область натуральных чисел) может заменить здесь область положительных целых чисел. Таким образом, мы получили следующее:

**450. Если пп-формула общезначима в некоторой счетно-бесконечной области, то она общезначима во всякой непустой области[414]. (*Теорема Лёвенгейма*).

Отсюда с помощью **431 получаем следствие:

**451. Если пп-формула выполнима в некоторой непустой области, то она выполнима и в счетно-бесконечной области.

Сколемовское обобщение этой метатеоремы есть метатеорема, утверждающая, что если класс пп-формул (это может быть и бесконечный класс) одновременно, или совместно, выполним в некоторой непустой области, то он одновременно выполним и в счетно-бесконечной области.

Использованное здесь понятие одновременной выполнимости является очевидным обобщением понятия выполнимости одной пп-формулы. А именно, класс Γ пп-формул называется *одновременно*, или *совместно, выполнимым* в данной непустой области, если существует по меньшей мере одно такое распределение возможных значений по совокупности всех свободных переменных всех пп-формул из Γ, при котором каждая пп-формула из Γ принимает значение t. (Ясно, что в случае конечного непустого класса пп-формул Γ одновременная выполнимость совпадает с выполнимостью одной пп-формулы — конъюнкции всех пп-формул из Γ.)

Класс пп-формул называется *одновременно*, или *совместно, выполнимым*, если он одновременно выполним в некоторой непустой области.

Нам понадобятся также следующие определения (которые мы примем не только для чистого функционального исчисления первого порядка, но также и для других функциональных исчислений первого и более высоких порядков [415)]).

Если Γ — некоторый класс пп-формул, а $\mathbf{B}$ — пп-формула, то мы говорим, что $\Gamma \vdash \mathbf{B}$, когда существует конечная последовательность $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ таких пп-формул из Γ, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{A}_m \vdash \mathbf{B}$.

Класс пп-формул Γ называется *противоречивым*, если существует пп-формула $\mathbf{B}$, такая, что $\Gamma \vdash \mathbf{B}$ и $\Gamma \vdash \sim\mathbf{B}$. Если такой пп-формулы $\mathbf{B}$ не существует, то мы говорим, что класс Γ *непротиворечив*.

Если Γ — произвольный класс пп-формул и $\mathbf{C}$ — некоторая пп-формула, то мы говорим, что $\mathbf{C}$ *не противоречит* классу Γ (или совместима с классом Γ), если непротиворечив класс, элементами которого являются $\mathbf{C}$ и все элементы (пп-формулы) класса Γ; в противном же случае мы говорим, что $\mathbf{C}$ *противоречит* классу Γ (или *несовместима* с ним).

Класс пп-формул Γ называется *максимальным непротиворечивым* классом, если Γ непротиворечив и если ему противоречит всякая пп-формула $\mathbf{C}$, не являющаяся его элементом.

Мы докажем следующую лемму:

**452. Всякий непротиворечивый класс Γ может быть расширен до маскимального непротиворечивого класса $\overline{\Gamma}$, т. е. существует максимальный непротиворечивый класс $\overline{\Gamma}$, среди элементов которого имеются все элементы класса Γ.

Доказательство. Мы укажем правило, которым максимальный непротиворечивый класс $\overline{\Gamma}$ определяется однозначно, если задан класс Γ. (Это правило, однако, не будет обеспечивать в каком-либо смысле эффективного построения элементов класса $\overline{\Gamma}$.)

Вначале пп-формулы должны быть пронумерованы, что можно сделать одним из известных методов (так как множество исходных символов счетно, а пп-формулы являются определенными конечными последовательностями исходных символов) [416]. Тогда можно будет говорить о „первой пп-формуле", „второй пп-формуле" и т. д., имея в виду эту их нумерацию, и тогда для каждой пп-формулы будет существовать такое положительное целое число n, что эта пп-формула является „n-й пп-формулой" (т. е. n-й пп-формулой данной нумерации).

Если задан некоторый класс пп-формул Γ, то мы следующим образом (рекурсивно) определяем бесконечную последовательность классов $\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \ldots$. Класс Γ^0 совпадает с Γ. Если $(n+1)$-я пп-формула не противоречит Γ^n, то Γ^{n+1} есть класс, элементами которого являются $(n+1)$-я пп-формула и все элементы класса Γ^n. В противном случае Γ^{n+1} совпадает с Γ^n.

Непротиворечивость классов Γ^0, Γ^1, $\Gamma^2, \ldots$ следует по математической индукции из непротиворечивости класса пп-формул Γ. Действительно, Γ^0 совпадает с Γ, а непротиворечивость Γ^{n+1} непосредственно следует из непротиворечивости Γ^n.

Обозначим через $\overline{\Gamma}$ объединение классов Γ^0, Γ^1, $\Gamma^2, \ldots$. То есть пп-формула $\mathbf{C}$ будет элементом класса $\overline{\Gamma}$ в том и только в том случае, если существует такое n, что $\mathbf{C}$ является элементом класса Γ^n.

Если теперь Γ — непротиворечивый класс, то и $\overline{\Gamma}$ тоже непротиворечивый класс.

Действительно, предположим, что $\overline{\Gamma}$ противоречив. Тогда существует конечное число таких пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ из $\overline{\Gamma}$ и такая пп-формула $\mathbf{B}$, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{A}_m \vdash \sim\mathbf{B}$. Пусть $\mathbf{A}_1$ есть a_1-я пп-формула, $\mathbf{A}_2$ есть a_2-я пп-формула, $\ldots$, $\mathbf{A}_m$ есть a_m-я пп-формула; далее, пусть a является наибольшим среди положительных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Тогда все пп-формулы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ являются элементами класса Γ^a, и, следовательно, класс Γ^a противоречив. Это, однако, противоречит доказанной выше непротиворечивости классов Γ^0, Γ^1, $\Gamma^2, \ldots$ (если класс Γ непротиворечив).

Кроме того, если класс Γ непротиворечив, то класс $\overline{\Gamma}$ максимален.

Действительно, предположим, что $\mathbf{C}$ есть некоторая пп-формула, которая не противоречит классу $\overline{\Gamma}$. Пусть $\mathbf{C}$ является $(n+1)$-й пп-формулой. Не противореча классу $\overline{\Gamma}$, $\mathbf{C}$ не может противоречить и классу Γ^n. Следовательно, в силу определения класса Γ^{n+1}, **C** принадлежит Γ^{n+1}. Следовательно, **C** является элементом класса $\overline{\Gamma}$.

Этим завершается доказательство леммы **452. Можно заметить, что соответствующая лемма имеет место не только для чистого функционального исчисления первого порядка, но и для всякого прикладного функционального исчисления первого порядка, если только класс его исходных символов счетен. В действительности лемма **452 может быть распространена на широкий класс логистических систем, так как для ее доказательства требуется лишь подходящее понятие непротиворечивости класса пп-формул и счетность множества исходных символов системы [417)].

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность прикладных функциональных исчислений первого порядка S_0, S_1, S_2, ..., исходными символами которых являются все исходные символы чистого функционального исчисления первого порядка и в дополнение к этому некоторые индивидные константы. А именно, исходными символами системы S_0 являются исходные символы чистого функционального исчисления первого порядка и индивидные константы $w_{0,0}$, $w_{1,0}$, $w_{2,0}$, ...; исходными символами системы S_{n+1} являются исходные символы системы S_n и дополнительные индивидные константы $w_{0,n+1}$, $w_{1,n+1}$, $w_{2,n+1}$, ...

Кроме того, обозначим через S_ω прикладное функциональное исчисление первого порядка, исходными символами которого являются исходные символы всех систем S_0, S_1, S_2, ... (Таким образом, индивидными константами системы S_ω являются все константы $w_{m,n}$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$.)

Пп-формулы системы S_ω можно пронумеровать тем же способом, который мы только что упоминали, говоря о чистом функциональном исчислении первого порядка. Тогда мы получаем нумерацию пп-формул любой системы S_n, удаляя из нумерации пп-формул системы S_ω те, которые не являются пп-формулами системы S_n, и, имея в виду именно эту нумерацию, мы будем говорить о „первой пп-формуле системы S_n", „второй пп-формуле системы S_n" и т. д.

Используя эту нумерацию, мы можем с помощью метода, примененного в доказательстве леммы ** 452, дополнить произвольный непротиворечивый класс Δ_n пп-формул системы S_n до максимального непротиворечивого класса $\overline{\Delta}_n$ пп-формул системы S_n.

Пусть теперь дан непротиворечивый класс Γ_0 пп-формул системы S_0, элементы которого не содержат свободных индивидных переменных. Определим класс Γ_n^m ($m = 0, 1, 2, \ldots$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$) следующим образом. Γ_1^0 есть $\overline{\Gamma}_0$. Если $(m+1)$-я пп-формула системы S_n, $n > 0$, имеет вид $\sim(\mathbf{a})\mathbf{A}$ и является элементом класса Γ_n^0, то Γ_n^{m+1} есть класс, элементами которого являются элементы класса Γ_n^m и пп-формула

$$\sim \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|;$$

в противном же случае Γ_n^{m+1} совпадает с Γ_n^m. А Γ_{n+1}^0 есть $\overline{\Delta}_n$, где Δ_n является объединением классов Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, ...

Очевидно, что элементы класса Γ_n^m являются пп-формулами системы S_n и что Γ_{n+1}^0 является максимальным непротиворечивым классом пп-формул системы S_n.

Допустим, что для некоторого частного m класс Γ_n^m непротиворечив, а класс Γ_n^{m+1} противоречив. В этом случае класс Γ_n^{m+1} не совпадает с классом Γ_n^m и содержит дополнительный элемент

$$\sim \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|.$$

Противоречивость класса Γ_n^{m+1} и теорема дедукции дают

$$\Gamma_n^m \vdash \sim \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}| \supset \mathbf{B}$$

и

$$\Gamma_n^m \vdash \sim \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}| \supset \sim \mathbf{B}.$$

Следовательно, в силу P,

$$\Gamma_n^m \vdash \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|.$$

Выберем индивидную переменную **x**, которая не встречается в данном доказательстве из гипотез, и заменим в этом доказательстве константу $w_{m,n}$ повсюду на **x**; так как $w_{m,n}$ не встречается ни в одном из элементов класса Γ_n^m, то мы получаем

$$\Gamma_n^m \vdash \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}|.$$

Обобщая по **x** [418] и производя затем одну или несколько алфавитных замен связанных переменных, мы получаем, что $\Gamma_n^m \vdash (\mathbf{a})\,\mathbf{A}$; но так как $\sim (\mathbf{a})\mathbf{A}$ является элементом класса Γ_n^0 и, следовательно, класса Γ_n^m, то это противоречит предположенной непротиворечивости класса Γ_n^m.

Таким образом, мы доказали, что если непротиворечив класс Γ_n^m, то и класс Γ_n^{m+1} тоже непротиворечив. По математической индукции из этого следует, что если непротиворечив класс Γ_n^0, то для всякого m непротиворечив и класс Γ_n^m, а следовательно, и класс Γ_{n+1}^0 тоже непротиворечив. Так как Γ_1^0 совпадает с $\overline{\Gamma}^0$ и поэтому непротиворечив, то по математической индукции мы получаем, что для всякого n непротиворечив класс Γ_n^0.

Пусть Γ_ω — объединение классов Γ_1^0, Γ_2^0, Γ_3^0, ... Тогда Γ_ω является максимальным непротиворечивым классом пп-формул системы S_ω. (Действительно, класс Γ_ω мог бы быть противоречивым только в том случае, если бы для некоторого n был противоречив класс Γ_n^0. Если, далее, **C** есть пп-формула системы S_ω, не противоречащая классу Γ_ω, то **C** для некоторого n есть пп-формула системы S_n, не противоречащая классу Γ_{n+1}^0, а так как Γ_{n+1}^0 — максимальный непротиворечивый класс пп-формул системы S_n, то **C** — элемент класса Γ^0_{n+1} и, следовательно, класса Γ_ω.)

Нам нужны следующие свойства класса Γ_ω:

d1. Если **A** является элементом класса Γ_ω, то $\sim$ **A** не является элементом класса Γ_ω. (Так как в противном случае Γ_ω был бы противоречив.)

d2. Если **A** не является элементом Γ_ω, то $\sim$ **A** является элементом Γ_ω. (Так как, если **A** — не элемент класса Γ_ω, то **A** противоречит Γ_ω; следовательно, по теореме дедукции и P, $\Gamma_\omega \vdash \sim \mathbf{A}$; следовательно, $\sim$ **A** не противоречит Γ_ω; следовательно, $\sim$ **A** есть элемент класса Γ_ω.)

e1. Если **B** — элемент класса Γ_ω, то $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ — тоже элемент класса Γ_ω. (Так как по P имеем $\Gamma_\omega \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$; следовательно, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ не противоречит Γ_ω и поэтому является его элементом.)

e2. Если **A** не является элементом Γ_ω, то $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ является элементом Γ_ω. (Так как, по d2, $\sim$ **A** является элементом Γ_ω и, следовательно, по P, $\Gamma_\omega \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.)

e3. Если **A** является элементом, а **B** не является элементом класса Γ_ω, то $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ не является элементом класса Γ_ω. (Так как, по d2, $\sim$ **B** является элементом класса Γ_ω, и, следовательно, если бы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ было элементом Γ_ω, то Γ_ω был бы противоречив в силу *модус поненс*.)

f1. Если

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|$$

является элементом класса Γ_ω для всякой индивидной константы $w_{m,n}$, то (**a**) **A** является элементом класса Γ_ω. (Так как, в силу d2, если (**a**)**A** не является элементом Γ_ω, то элементом Γ_ω является $\sim$ (**a**)**A**; тогда $\sim$ (**a**)**A** для некоторого n является элементом класса Γ^0_n; следовательно, из того, как был определен класс Γ^{m+1}_n, вытекает, что для некоторого m

$$\sim \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|$$

является элементом класса Γ^{m+1}_n и поэтому элементом класса Γ_ω; отсюда по d1 мы получаем, что для некоторых m и n

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|$$

не является элементом класса Γ_ω.)

f2. Если для хотя бы одной константы $w_{m,n}$

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|$$

не является элементом Γ_ω, то (**a**)**A** не является элементом Γ_ω. (Так как, если (**a**)**A** является элементом Γ_ω, то мы с помощью *306 и *модус поненс* получаем для произвольной индивидной константы $w_{m,n}$, что

$$\Gamma_\omega \vdash \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|$$

и что, следовательно,

$$S^{a}_{w_{m,n}} \mathbf{A}|,$$

не противореча классу Γ_ω, должно быть его элементом.)

Считая натуральные числа областью индивидов, мы теперь следующим образом припишем значения всем пропозициональным и функциональным переменным системы S_ω, или, что то же самое, всем пропозициональным и функциональным переменным чистого исчисления первого порядка.

Пропозициональная переменная $\mathbf{p}$ получает значение t, если пп-формула $\mathbf{p}$ является элементом класса Γ_ω, и значение f, если пп-формула $\mathbf{p}$ не является элементом класса Γ_ω. Обозначая через $u_{m,n}$ натуральное число $\frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2 + 3m + n)$[419], мы получаем, что каждой индивидной константе $w_{m,n}$ соответствует единственное натуральное число $u_{m,n}$ и что каждому натуральному числу $u_{m,n}$ соответствует единственная индивидная константа $w_{m,n}$. Тогда i-арной функциональной переменной $\mathbf{f}$ приписывается в качестве значения i-арная пропозициональная функция индивидов Φ, такая, что $\Phi(u_{m_1,n_1}, u_{m_2,n_2}, \ldots, u_{m_i,n_i})$ есть t или f в соответствии с тем, является ли $\mathbf{f}(w_{m_1,n_1}, w_{m_2,n_2}, \ldots, w_{m_i,n_i})$ элементом класса Γ_ω или нет.

Теперь обратим внимание на связь, существующую между свойствами d1 и d2 — и правилом d из § 30; между e1, e2 и e3 — и правилом e из § 30; между f1 и f2 — и правилом f из § 30. Из этой связи (более точно мы должны были бы говорить о связи с теми пунктами определения термина „значение" в синтаксическом смысле, которые соответствуют правилам d и f из § 30) следует, что всякая пп-формула системы S_ω, не содержащая свободных индивидных переменных, принимает для тех значений, которые мы только что приписали пропозициональным и функциональным переменным, значение t или f в соответствии с тем, принадлежит ли она или нет классу Γ_ω. (Мы предоставляем читателю провести это доказательство со всеми подробностями методом математической индукции.)

Так как элементы класса Γ_0 не содержат свободных индивидных переменных и входят в число элементов класса Γ_ω, то мы, таким образом, показали, что класс Γ_0 совместно выполним в области натуральных чисел и, следовательно, в силу очевидного распространения метатеоремы **439, совместно выполним во всякой счетно-бесконечной области.

Но Γ_0 был выбран как произвольный непротиворечивый класс пп-формул системы S_0, элементы которого не содержат свободных индивидных переменных. Следовательно, *всякий непротиворечивый класс правильно построенных формул системы* S_0 *без свободных индивидных переменных совместно выполним в счетно-бесконечной* *области* (с таким распределением значений по индивидным константам, при котором все они получают различные значения).

Для того чтобы распространить этот результат на произвольный непротиворечивый класс пп-формул чистого функционального исчисления первого порядка, мы только должны таким образом подставить индивидные константы $w_{n,0}$ вместо свободных индивидных переменных, чтобы вместо различных переменных подставлялись различные константы.

Мы доказали, таким образом, следующую метатеорему чистого функционального исчисления первого порядка:

**453. Всякий непротиворечивый класс пп-формул совместно выполним в счетно-бесконечной области.

Нам потребуется также следующая метатеорема:

**454. Всякий совместно выполнимый класс пп-формул непротиворечив.

Доказательство. Пусть Γ — противоречивый класс пп-формул. Тогда существует конечное число пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ из Γ и некоторая пп-формула $\mathbf{B}$, такие, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \vdash \sim \mathbf{B}$. В силу **321, $m > 0$. Поэтому теорема дедукции и P дают, что $\vdash \sim_{\blacksquare} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_m$. Следовательно, в силу **434, $\sim_{\blacksquare} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_m$ общезначимо. Из истинностных таблиц для отрицания и конъюнкции следует, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ не могут одновременно иметь значение t ни для какой системы значений их свободных переменных. Следовательно, Γ не может быть совместно выполнимым.

С помощью **453 и **454 мы получаем в качестве следствия принадлежащий Сколему результат, который был упомянут в начале настоящего параграфа:

** 455. Если класс пп-формул совместно выполним в некоторой непустой области, то он совместно выполним и во всякой счетно-бесконечной области.

Стоит отметить, что теорему Гёделя о полноте и теорему Лёвенгейма можно теперь вывести в качестве следствий, так что мы получаем новые доказательства этих теорем, в которых не используются ни сколемовская нормальная форма, ни результаты § 44.

По отношению к теореме Гёделя это делается следующим образом. Пусть $\mathbf{A}$ будет произвольной общезначимой пп-формулой. Тогда, в силу **430, класс, единственным элементом которого является пп-формула $\sim \mathbf{A}$, не является совместно выполнимым. Поэтому, в силу **453, он противоречив. Следовательно, существует такая пп-формула $\mathbf{B}$, что и $\sim \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, и $\sim \mathbf{A} \vdash \sim \mathbf{B}$. Из этого, в силу теоремы дедукции и P, следует $\vdash \mathbf{A}$.

Упражнения к § 45

45.0. Проведите (указанное в § 44) доказательство метатеоремы **440 для частного случая $n = 0$, внося возможные в этом случае упрощения и проверяя, что доказательство сохраняет силу.

45.1. Докажите метатеорему **454 без использования метатеорем **321 и **434, непосредственно показав, что определенный в § 36 процесс доказательства из гипотез сохраняет свойство принимать значение t для данной системы значений входящих в гипотезы свободных переменных (и для всех значений других встречающихся переменных).

45.2. Основываясь на определении общезначимости (§ 43) и на двух приведенных в тексте доказательствах метатеоремы **440 (§§ 44 и 45), исследуйте вопрос, можно ли использовать **440 (1) в качестве производного правила вывода в чистом функциональном исчислении первого порядка и (2) в качестве аксиомной схемы в некоторой формулировке чистого функционального исчисления первого порядка. (См. изложение логистического метода и определение логистической системы в § 07, проведенное в § 08 различение элементарного и теоретического синтаксиса, введение идей производных правил вывода в § 12 и примечания 183 и 221.)

45.3. Докажите полноту пропозиционального исчисления в формулировке P_1, применяя для этого идеи, использованные в тексте при доказательстве метатеорем **452 и **453. Сравните это доказательство полноты пропозиционального исчисления с тем, которое было дано в главе I, особенно с точки зрения большей или меньшей силы исходных допущений, на основе которых получен результат. (Ср. начальные абзацы § 08.)

45.4. Пусть задан некоторый класс пп-формул Γ и некоторое его частное *означивание* ⟨*valuation*⟩ в области натуральных чисел, т. е. — считая натуральные числа индивидами — некоторая частная система возможных значений свободных переменных пп-формул из Γ. Предположим, что при этом означивании каждая пп-формула из Γ принимает значение t. Покажите, что соответствующим подбором (a) нумерации пп-формул и (b) соответствия, не обязательно одно-однозначного, между константами $w_{m,n}$ и натуральными числами $u_{m,n}$ можно добиться того, чтобы использованный в § 45 (при доказательстве метатеорем **452 и **453) метод получения какого-либо означивания класса Γ, при котором все его элементы принимают значение t, давал бы именно заданное частное означивание Γ.

45.5. Назовем класс пп-формул Γ *дизъюнктивно общезначимым* в некоторой данной непустой области, если при всяком означивании класса Γ в этой области хотя бы одна из входящих в него пп-формул принимает значение t. (1) Если класс пп-формул дизъюнктивно общезначим в некоторой бесконечной области, то дизъюнкция некоторого его конечного подкласса общезначима. (2) Если класс пп-формул дизъюнктивно общезначим в некоторой конечной области, то в этой области общезначима дизъюнкция какого-либо его конечного подкласса.

46. Проблема разрешения, ее решение в частных случаях. Хотя и известно, что проблема разрешения для чистого функционального исчисления первого порядка неразрешима — в том смысле, что не существует эффективной разрешающей процедуры, которая для всякой пп-формулы позволяла бы определить, является ли она теоремой или нет [420], — тем не менее существуют ее решения в целом ряде частных случаев[421], имеющих существенный интерес. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые сравнительно простые из этих случаев.

Мы начинаем с решения (принадлежащего Бернайсу и Шейнфинкелю) проблемы разрешения для частного случая

I *Правильно построенных формул, имеющих предваренную нормальную форму**), *префикс которой не содержит квантора существования, предшествующего какому-нибудь квантору всеобщности.*

---

*) Здесь в оригинале впервые появляется выражение „a prenex normal form". Оно фигурирует и во всех остальных занумерованных римскими цифрами формулировках специальных случаев проблемы разрешимости, за исключением случаев XII и XIII, в формулировках которых, приведенных в упражнении 46.19, употреблены соответственно выражения „the prenex normal forms" и the prenex normal form" (но и здесь артикль „the" вызван, по-видимому, лишь синтаксическими правилами английского языка). В качестве перевода выражения „a prenex normal form" на русский язык нами избрано выражение „предваренная нормальная форма". При этом мы исходили из того, что фраза „ппф **B** является предваренной нормальной формой пп-формулы **A**" может быть истолкована тремя различными способами.

При первом истолковании эта фраза означает то же самое, что и фраза „ппф **B** является стандартной предваренной нормальной формой пп-формулы **A**". Это истолкование не выводит нас из круга уже определенных понятий и хорошо согласуется с непосредственно следующей за формулировкой случая I фразой, где речь идет именно о стандартной предваренной нормальной форме (the prenex normal form). Однако возможно и другое, более широкое истолкование. Именно, назовем ad hoc „допустимым шагом" любой из шагов (i)—(vi) из § 39 с той только разницей, что теперь мы не будем требовать, чтобы операция сведе́ния применялась к первому (слева направо) не начальному вхождению квантора, а будем разрешать ее применение к любому не начальному вхождению. Будем, далее, говорить, что „ппф **B** является предваренной нормальной формой пп-формулы **A**", если **B** находится в предваренной нормальной форме и может быть получено из **A** конечной цепочкой допустимых шагов. Такое понимание термина „предваренная нормальная форма" хорошо согласуется с абзацем, непосредственно следующим за доказательством метатеоремы *465 где говорится о варьировании процедуры сведения к стан-

В силу § 39 и *301, *306, достаточно будет найти разрешающую процедуру для замыканий всеобщности стандартных предваренных нормальных форм этих пп-формул. Следовательно, решение этого случая проблемы разрешения заключено в следующих четырех метатеоремах:

*460. Пусть **M** — бескванторная формула, и пусть $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ ($n \geqslant 0$) — полный перечень ее индивидных переменных. Если какая-нибудь пфпи формулы **M** является тавтологией, то

$$\vdash (\exists \mathfrak{b}_1)(\exists \mathfrak{b}_2)\ldots(\exists \mathfrak{b}_n)\mathbf{M}.$$

Доказательство. $\mathrm{S}^{\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n}_{x x \ldots x}\mathbf{M}|$ является подстановковым частным случаем пфпи формулы **M** и поэтому, в силу *330, является теоремой. Теперь используем *311 и *модус поненс*.

461. Пусть **M — бескванторная формула, и пусть $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{b}_n$ ($n \geqslant 0$) — полный перечень индивидных переменных в **M**. Если

$$\vdash (\exists \mathfrak{b}_1)(\exists \mathfrak{b}_2)\ldots(\exists \mathfrak{b}_n)\mathbf{M},$$

то всякая пфпи формулы **M** есть тавтология.

Доказательство. Если к пфпи формулы **M** приписать спереди $2n$ знаков отрицания, $\sim$, то получится пфпи формулы

$$(\exists \mathfrak{b}_1)(\exists \mathfrak{b}_2)\ldots(\exists \mathfrak{b}_n)\mathbf{M}.$$

После этого используем **320 и истинностную таблицу для отрицания.

дартной предваренной нормальной форме. При таком истолковании фразы „ппф **B** является предваренной нормальной формой пп-формулы **A**" остаются верными зависящие от этого истолкования утверждения о наличии разрешающих процедур для случаев I, II, V (из упражнения 46.16), V′, VI, VII, VIII, IX, XII, XIII, XIV (из упражнения 46.20), поскольку можно указать алгоритм, позволяющий для каждой ппф **A** составить список (очевидно, конечный) всех ппф, являющихся предваренными нормальными формами формулы **A**.

Наконец, третье, наиболее широкое истолкование состоит в том, что ппф **B** называется предваренной нормальной формой пп-формулы **A**, если, во-первых, **B** находится в предваренной нормальной форме и, во-вторых, $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Хотя и не существует алгоритма, позволяющего для любой пары (пп-формул **A**, **B**) распознать, является ли **B** предваренной нормальной формой пп-формулы **A**, тем не менее существует эффективный процесс выписывания всех тех пар пп-формул, для которых это так. Отсюда следует, что если для заданной пп-формулы **A** существует предваренная нормальная форма, обладающая некоторым эффективно распознаваемым свойством, то эта нормальная форма может быть найдена (путем просмотра указанного списка пар; ср. примечание 183). Поэтому утверждения о наличии разрешающих процедур для перечисленных в предыдущем абзаце одиннадцати случаев проблемы разрешения остаются верными (снова ср. примечание 183).— *Прим. перев.*

* 462. Пусть **M** — бескванторная формула, и пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$) — полный перечень ее индивидных переменных. Если дизъюнкция **D** всевозможных пп-формул вида

$$\mathrm{S}^{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n}_{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\ldots\mathbf{d}_n}\mathbf{M}\,\Big|,$$

где $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n$ — произвольные переменные из числа $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, взятые в произвольном порядке и не обязательно все различные [422], является подстановковым частным случаем некоторой тавтологии из P, то

$$\vdash (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}.$$

Доказательство. В силу *330 и *модус поненс*,

$$\mathrm{S}^{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n}_{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\ldots\mathbf{d}_n}\mathbf{M}\,\Big| \vdash (\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}.$$

Следовательно, в силу теоремы дедукции и P,

$$\mathbf{D} \vdash (\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}.$$

Так как **D** является подстановковым частным случаем некоторой тавтологии, то мы по *311 получаем, что

$$\vdash (\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}.$$

Затем с помощью обобщения мы получаем

$$\vdash (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}.$$

463. Пусть **M — бескванторная формула, и пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$) — полный перечень ее индивидных переменных. Если

$$\vdash (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M},$$

то дизъюнкция **D** всевозможных пп-формул вида

$$\mathrm{S}^{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n}_{\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2\ldots\mathbf{d}_n}\mathbf{M}\,\Big|,$$

где $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n$ — произвольные переменные из числа $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, взятые в произвольном порядке и не обязательно все различные [422], является подстановковым частным случаем тавтологии из P.

Доказательство. По *306 и *модус поненс*, $(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}$ является теоремой. Поэтому, в силу **434, эта формула общезначима, в частности общезначима в области из m индивидов $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Зафиксировав эту область индивидов, рассмотрим некоторую систему возможных значений свободных переменных формулы $(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\mathbf{M}$, при которой значениями переменных $\mathbf{a}_1$,

$\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ являются $u_1, u_2, \ldots, u_m$ соответственно. Для этой системы значений своих свободных переменных формула $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots \ldots (\exists \mathbf{b}_n)\, \mathbf{M}$ принимает значение t. Следовательно, в силу определения значения (правила d и f § 30), для той же системы значений переменных и для определенных значений $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$ переменных $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ соответственно формула $\mathbf{M}$ принимает значение t. Если в качестве $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n$ взять $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_n}$ соответственно, то

$$\mathrm{S}^{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n}_{\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \ldots \mathbf{d}_n} \mathbf{M} \,|$$

принимает значение t. Поэтому — все еще для той же системы значений свободных переменных формулы $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots (\exists \mathbf{b}_n)\, \mathbf{M}$ — дизъюнкция $\mathbf{D}$ принимает значение t.

Так как свободные переменные формулы $\mathbf{D}$ совпадают со свободными переменными формулы $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots (\exists \mathbf{b}_n)\, \mathbf{M}$, то мы показали, что для данной конечной области из m индивидов и для всякой системы возможных значений свободных переменных формулы $\mathbf{D}$, при которой переменные $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ получают значения $u_1, u_2, \ldots, u_m$ соответственно, значением формулы $\mathbf{D}$ является t. Если теперь задано некоторое распределение истинностных значений по элементарным частям формулы $\mathbf{D}$ [423], то ясно (поскольку значения переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ все различны между собой), что всегда можно так подобрать значения пропозициональных и функциональных переменных формулы $\mathbf{D}$, чтобы при этом воспроизводилось заданное распределение истинностных значений по элементарным частям формулы $\mathbf{D}$. Таким образом, формула $\mathbf{D}$ принимает значение t для всякого распределения истинностных значений по ее элементарным частям. Следовательно, $\mathbf{D}$ является подстановковым частным случаем некоторой тавтологии из P.

Как теперь нетрудно видеть, содержащееся в *462 и **463 условие, что $\mathbf{D}$ является подстановковым частным случаем некоторой тавтологии, эквивалентно условию, что

$$(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2) \ldots (\mathbf{a}_n)(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots (\exists \mathbf{b}_n)\, \mathbf{M}$$

общезначима в области из m индивидов. Точно так же содержащееся в *460 и **461 условие, что пфпи формулы $\mathbf{M}$ является тавтологией, эквивалентно условию, что выражение

$$(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots (\exists \mathbf{b}_n)\, \mathbf{M}$$

общезначимо в области из одного-единственного индивида. Поэтому мы имеем следующее следствие метатеорем *460—**463:

* 464. Пусть $\mathbf{M}$ — бескванторная формула, и пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ ($m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$) — полный перечень ее индивидных переменных. Тогда

$$(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2) \ldots (\mathbf{a}_m)(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots (\exists \mathbf{b}_n)\, \mathbf{M}$$

является теоремой, если она общезначима в области из m индивидов, или, в случае $m = 0$, в области из одного-единственного индивида.

Так как определение общезначимости в области непосредственно приводит к эффективному методу проверки общезначимости во всякой конечной области и так как, в силу **434, теорема должна быть общезначимой во всякой непустой области, включая и конечные области, то мы можем считать, что метатеорема *464 является иной возможной формулировкой нашего решения случая I проблемы разрешения. В действительности именно в последней форме и формулируют обычно решение проблемы, и мы будем вводить соответствующие формулировки решения (сводящие проблему к общезначимости в определенной конечной области) также и в некоторых других случаях, рассматриваемых ниже.

Теперь мы приступаем к рассмотрению другой разрешающей процедуры, применимой в целом ряде случаев. Будет удобнее сначала описать саму разрешающую процедуру и лишь затем заняться вопросом о том, к каким классам пп-формул она применима.

Некоторое частное вхождение пп-формулы **P** в пп-формулу **A** в качестве пп-части последней называется *вхождением в* **A** *в качестве истинностно-функциональной составляющей*, или, как мы еще будем говорить, *вхождением в* **A** *в качестве* Р-*составляющей*, если она не находится в области какого-либо квантора и не имеет ни вида $\sim \mathbf{B}$, ни вида $[\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2]$. А *истинностно-функциональными составляющими*, или Р-*составляющими*, формулы **A** называются те пп-формулы, которые имеют вхождения в **A** в качестве Р-составляющих.

Ясно, что всякая Р-составляющая некоторой пп-формулы либо является элементарной частью, либо имеет вид (**a**)**B**. Далее, всякую пп-формулу можно считать полученной подстановкой ее Р-составляющих вместо пропозициональных переменных некоторой пп-формулы пропозиционального исчисления, причем для всякой данной пп-формулы как соответствующая пп-формула пропозиционального исчисления, так и соответствующая подстановка определены однозначно с точностью до алфавитной замены пропозициональных переменных.

Первый шаг описываемой нами разрешающей процедуры состоит в том, что мы сводим (по отдельности) каждую Р-составляющую данной пп-формулы к предваренной нормальной форме, причем если после этого оказывается, что какие-либо Р-составляющие различаются только алфавитной заменой связанных переменных, то мы совершаем соответствующие алфавитные замены так, чтобы эти Р-составляющие стали тождественны[424]. Пусть **A** будет полученной таким образом пп-формулой. (Ясно, что данная пп-формула является теоремой тогда и только тогда, когда теоремой является **A**.)

Если **A** содержит точно m различных P-составляющих $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_m$, то для каждой из 2^m различных систем истинностных значений этих P-составляющих мы можем установить соответствующее истинностное значение пп-формулы **A**. (Этот процесс можно организовать так, как это было описано в § 15 для пп-формул пропозиционального исчисления.) Если окажется, что для всех систем истинностных значений P-составляющих формула **A** принимает значение t, то, в силу *311, $\vdash \mathbf{A}$. В противном случае мы выписываем все *опровергающие* системы истинностных значений P-составляющих пп-формулы **A**, т. е. те системы истинностных значений, для которых **A** принимает значение f, и затем применяем следующую метатеорему, очевидным образом связанную с конъюнктивной нормальной формой:

*465. Пусть **A** — произвольная пп-формула, пусть $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_m$ — полный перечень P-составляющих формулы **A**, и пусть $\tau_1^i, \tau_2^i, \ldots, \tau_m^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — полный перечень опровергающих систем истинностных значений P-составляющих формулы **A** соответственно. Пусть $\mathbf{P}_j^i$ будет либо $\mathbf{P}_j$, либо $\sim \mathbf{P}_j$, в соответствии с тем, есть ли τ_j^i t или f. Тогда $\vdash \mathbf{A}$ в том и только в том случае, если все пп-формулы

$$\mathbf{P}_1^i \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^i \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^i \supset \sim \mathbf{P}_m^i$$

являются теоремами.

Доказательство. f тогда и только тогда является значением пп-формулы **A** для некоторой произвольной системы истинностных значений формул $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_m$, когда f является значением одной из пп-формул

$$\mathbf{P}_1^i \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^i \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^i \supset \sim \mathbf{P}_m^i.$$

Следовательно, формула

$$\mathbf{A} \equiv [\mathbf{P}_1^1 \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^1 \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^1 \supset \sim \mathbf{P}_m^1][\mathbf{P}_1^2 \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^2 \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^2 \supset \sim \mathbf{P}_m^2] \ldots$$
$$\ldots [\mathbf{P}_1^n \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^n \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^n \supset \sim \mathbf{P}_m^n]$$

является подстановковым частным случаем тавтологии, а потому, в силу *311, теоремой. Следовательно, по P, если $\vdash \mathbf{A}$, то все пп-формулы

$$\mathbf{P}_1^i \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^i \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^i \supset \sim \mathbf{P}_m^i$$

являются теоремами, и обратно, если все эти пп-формулы являются теоремами, то $\vdash \mathbf{A}$.

Таким образом, проблема разрешения для **A** сведена к проблеме разрешения для пп-формул

$$\mathbf{P}_1^i \supset_{\centerdot} \mathbf{P}_2^i \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}_{m-1}^i \supset \sim \mathbf{P}_m^i.$$

Эти пп-формулы мы сводим затем к какой-либо предваренной нормальной форме, так как известны разрешающие процедуры для пп-формул в предваренной нормальной форме с префиксами различных специальных видов. Согласно определенной в § 39 процедуре сведения к *стандартной* предваренной нормальной форме, кванторы берутся один за другим в порядке вхождения слева направо и выносятся вперед в префикс. Здесь же мы меняем эту фиксированную процедуру, разрешая брать кванторы (и выносить их в префикс) и в других возможных порядках. При этом мы пытаемся получить префикс одного из тех видов, для которых известна разрешающая процедура. Если, например, нам удается получить во всех n случаях такие префиксы, в которых никакой квантор существования не предшествует никакому квантору общности, то мы можем решить, является ли **A** теоремой или нет, используя для этого наше прежнее решение проблемы разрешения для частного случая I.

В частности, такое сведение к случаю I всегда можно провести, если описанная выше процедура применяется к одной из [425]:

II *Правильно построенных формул, истинностно-функциональные составляющие которых либо вовсе не содержат кванторов, либо имеют предваренную нормальную форму с такими префиксами, в которых встречаются одни только кванторы общности.*

Отметим также следующий особой важности подслучай случая II:

II′ *Правильно построенных формул, в которых нет свободных индивидных переменных и в которых всякая истинностно-функциональная составляющая либо бескванторна (и, следовательно, является пропозициональной переменной), либо имеет вид* **(a)M**, *где* **M** *не содержит ни кванторов, ни пропозициональных переменных.*

В подслучае II′ возможны два следующих упрощения разрешающей процедуры, проверка чего предоставляется читателю:

(1) Предположим, что P-составляющие формулы **A** перенумерованы таким образом, что $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$ — те из них, которые являются пропозициональными переменными, а остальные P-составляющие суть $\mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{P}_{k+2}, \ldots, \mathbf{P}_m$. Тогда, применяя *465, мы можем упростить заключение этой метатеоремы следующим образом: — **A** в том и только в том случае, если все пп-формулы

$$\mathbf{P}^i_{k+1} \supset_{\centerdot} \mathbf{P}^i_{k+2} \supset_{\centerdot} \ldots \mathbf{P}^i_{m-1} \supset \sim \mathbf{P}^i_m$$

являются теоремами.

(2) Мы можем предположить, что с помощью алфавитной замены связанных переменных пп-формула **A** приведена к такому

виду, когда в нее входит только одна индивидная переменная x. Тогда $\mathbf{P}_{k+1}$, $\mathbf{P}_{k+2}$, ..., $\mathbf{P}_m$ имеют соответственно вид $(x)\,\mathbf{M}_{k+1}$, $(x)\,\mathbf{M}_{k+2}$, ..., $(x)\,\mathbf{M}_m$, где $\mathbf{M}_{k+1}$, $\mathbf{M}_{k+2}$, ..., $\mathbf{M}_m$ не содержат ни кванторов, ни пропозициональных переменных, ни отличных от x индивидных переменных. Из какой-либо частной опровергающей системы истинностных значений τ_1^i, τ_2^i, ..., τ_m^i для пп-формул $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_m$ выберем последние $m-k$ истинностных значений τ_{k+1}^i, τ_{k+2}^i, ..., τ_m^i и предположим, что среди них $\tau_{t_1}^i$, $\tau_{t_2}^i$, ..., $\tau_{t_l}^i$ суть t, а $\tau_{f_1}^i$, $\tau_{f_2}^i$, ..., $\tau_{f_{m-k-l}}^i$ суть f. Тогда для того, чтобы

$$\mathbf{P}_{k+1}^i \supset . \mathbf{P}_{k+2}^i \supset . \dots \mathbf{P}_{m-1}^i \supset \sim \mathbf{P}_m^i$$

было теоремой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из бескванторных формул

$$\mathbf{M}_{t_1} \supset . \mathbf{M}_{t_2} \supset . \dots \mathbf{M}_{t_l} \supset \mathbf{M}_{f_j}$$

была подстановковым частным случаем тавтологии ($j = 1, 2, \dots, \dots, m-k-l$).

Возвращаясь к общему случаю описанной выше разрешающей процедуры (опирающейся на *465), мы замечаем, что, грубо говоря, чем мельче разбиение, достигаемое разложением пп-формулы **A** на ее P-составляющие, тем вероятнее успех в нашей попытке выяснить с помощью этой процедуры, является ли **A** теоремой. Поэтому, прежде чем применять эту разрешающую процедуру к какой-либо данной пп-формуле **A**, желательно преобразовать вначале **A**, насколько возможно, с помощью шагов сведения (a) — (g) из упражнения 39.6 [426].

В частности, как сказано в упражнении 39.6, если **A** не содержит иных функциональных переменных, кроме сингулярных, то процесс сведения, указанный в этом упражнении, позволяет свести замыкание всеобщности пп-формулы **A** к случаю *II'*, который был только что рассмотрен. Это — принадлежащее Куайну решение проблемы разрешения для частного случая:

III *Правильно построенных формул сингулярного функционального исчисления первого порядка.*

История исследования этого случая проблемы разрешения описана в § 49. Помимо принадлежащего Куайну решения (которое восходит к Бэману), возможен иной подход, основанный на следующей метатеореме Бернайса и Шейнфинкеля [427]:

**466. Если пп-формула сингулярного функционального исчисления первого порядка достоверна в области из 2^N индивидов, где N — число различных входящих в пп-формулу функциональных переменных, то она общезначима во всякой области индивидов.

Доказательство. В силу **432 мы можем предположить, что данная пп-формула не содержит свободных индивидных переменных. Обозначим через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_l$ входящие в нее пропозициональные переменные и через $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_N$ входящие в нее функциональные переменные. Рассмотрим систему значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ этих переменных в соответствующем порядке, беря в качестве области индивидов произвольную непустую область $\mathfrak{U}$. Пусть индивиды из $\mathfrak{U}$ разбиты на классы таким образом, что два индивида u_1 и u_2 относятся к одному классу тогда и только тогда, когда истинностные значения $\Phi_1(u_1)$, $\Phi_2(u_1)$, $\ldots$, $\Phi_N(u_1)$ совпадают соответственно с истинностными значениями $\Phi_1(u_2)$, $\Phi_2(u_2)$, $\ldots$, $\Phi_N(u_2)$. При этом мы получаем не более 2^N непустых классов индивидов, которые назовем $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $(1 \leqslant n \leqslant 2^N)$. Определим сингулярные пропозициональные функции этих классов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$ таким образом, что $\Psi_i(v_j)$ есть то же самое истинностное значение, что и $\Phi_i(u)$, где u — произвольный элемент класса v_j.

Возьмем теперь конечную область $\mathfrak{V}$, состоящую из индивидов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, и рассмотрим значения $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$ переменных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_l, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_N$ соответственно. Для этой системы значений своих свободных переменных данная пп-формула принимает значение t (так как, будучи общезначимой в области из 2^N индивидов, она в силу **439 общезначима и в области $\mathfrak{V}$). Однако из того, как были определены пропозициональные функции Ψ_i, видно, что данная пп-формула принимает в области $\mathfrak{V}$ и для системы значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N$ то же самое значение, которое она принимает в области $\mathfrak{U}$ для системы значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ своих свободных переменных. Следовательно, данная пп-формула принимает значение t также и в области $\mathfrak{U}$ для последней системы значений своих свободных переменных.

Таким образом, мы показали, что данная пп-формула принимает значение t для всякой системы значений своих свободных переменных в произвольно выбранной области $\mathfrak{U}$, т. е. мы показали, что она общезначима.

Можно заметить, что метатеорема **466 сформулирована не как решение частного случая проблемы разрешения (т. е. проблемы разрешения для доказуемости), а как решение частного случая того, что мы будем называть *проблемой разрешения для общезначимости*, т. е. проблемы нахождения эффективной процедуры определения общезначимости.

Из теоремы Гёделя о полноте (доказанной в § 44 и вновь доказанной другим методом в § 45) следует истинность, в некотором смысле, утверждения, что решение какого-либо частного случая проблемы разрешения общезначимости есть в то же время решение — для того же частного случая — и проблемы разрешения. Однако в другом смысле, который мы не пытаемся уточнить, это неверно. Действительно, доказательство метатеоремы **466 не дает никакого эффективного метода для нахождения доказательства пп-формулы, которая успешно прошла проверку того, что она не содержит никаких функциональных переменных, отличных от сингулярных, и общезначима в области из 2^N предметов [428].

С проблемой разрешения для общезначимости тесно связана *проблема разрешения для выполнимости*, т. е. проблема нахождения эффективной процедуры определения выполнимости. В силу метатеорем **430 и **431, каждое решение какого-либо частного случая одной из этих проблем влечет решение для соответствующего частного случая и другой проблемы, так что нет нужды рассматривать каждую из этих проблем в отдельности. В значительной части существующей по этой теме литературы главное внимание уделено проблеме разрешения для выполнимости. Что же касается важности этой проблемы, то следует заметить, что (в силу теоремы Гёделя о полноте) непротиворечивость логистической системы, полученной добавлением постулатов [429] к простому прикладному функциональному исчислению первого порядка, всегда очевидным образом эквивалентна выполнимости соответствующей пп-формулы чистого функционального исчисления первого порядка.

Если принять одну из главных интерпретаций (§ 30), то чистое функциональное исчисление первого порядка становится формализованным языком. Лежащая в основе интерпретации область индивидов может быть бесконечной или же конечной. В первом случае *семантическая проблема разрешения* языка (определенная в § 15) эквивалентна проблеме разрешения для общезначимости в том смысле, что решение какого-либо частного случая одной из этих проблем является также решением для того же частного случая и другой. Во втором случае семантическая проблема разрешения языка эквивалентна проблеме разрешения для общезначимости в той же конечной области индивидов и поэтому полностью решена (в предположении, что конечная область задана таким образом, что известно число ее индивидов).

Мы больше не будем заниматься вопросом о частных случаях какой-либо из этих проблем разрешения, а закончим тем, что просто укажем на существование решений проблемы разрешения или проблемы разрешения для общезначимости для следующих частных случаев (которые либо явно содержатся в литературе, либо легко получаются имеющимися в литературе методами) [430]:

IV *Правильно построенных формул* **A**, *в каждой элементарной части которых не более чем одна переменная имеет такие вхождения, согласно которым она является связанной переменной в* **A**.

V′ *Правильно построенных формул, имеющих предваренную нормальную форму, основа которой либо является дизъюнк-*

цией элементарных частей и отрицаний элементарных частей, либо эквивалентна такой дизъюнкции в соответствии с законами пропозиционального исчисления[431].

VI *Правильно построенных формул, имеющих предваренную нормальную форму только с одним квантором существования в префиксе, т. е. с префиксом вида*

$$(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)\ (\exists\mathbf{b})(\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2)\ldots(\mathbf{c}_l)$$ [432].

VII *Правильно построенных формул, имеющих предваренную нормальную форму с префиксом вида*

$$(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)\ (\exists\mathbf{b}_1)\ (\exists\mathbf{b}_2)\ (\mathbf{c}_1)\ (\mathbf{c}_2)\ldots(\mathbf{c}_l)$$ [433].

VIII *Правильно построенных формул, имеющих предваренную нормальную форму с префиксом вида*

$$(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)\ \ (\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)\ (\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2)\ldots(\mathbf{c}_l)$$

и с основой, в которой каждая элементарная часть, содержащая хотя бы одну из переменных $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, *либо содержит все переменные* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, *либо содержит хотя бы одну из переменных* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_l$ [434].

IX *Правильно построенных формул, имеющих предваренную нормальную форму с префиксом, который оканчивается на* $(\mathbf{c}_1),(\mathbf{c}_2)\ldots(\mathbf{c}_l)$, *и основу, в которой каждая элементарная часть, содержащая какую-нибудь входящую в префикс переменную, содержит также по меньшей мере одну из переменных* $\mathbf{c}_1$, c_2, ..., $\mathbf{c}_l$ [434].

X *Правильно построенных формул вида* $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_n)\mathbf{M} \supset (\exists\mathbf{b})(\mathbf{c})\,\mathbf{f}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, *где* $n \leqslant 4$, *а* $\mathbf{M}$ *не содержит ни кванторов, ни отличных от* $\mathbf{f}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ *переменных*[435].

Рассмотрение или частичное рассмотрение всех этих случаев, кроме VII и X, а также некоторых других менее важных случаев будет кратко намечено в упражнениях в конце этого параграфа.

В большинстве случаев возможно дать решение проблемы разрешения для общезначимости в виде утверждения, что если пп-формула рассматриваемого класса общезначима в области из определенного конечного числа индивидов, то она общезначима (хотя такая форма решения редко является наиболее удобной для практического использования, т. е. для применения разрешающей процедуры к конкретным пп-формулам). Случай X представляет некоторый интерес как исключение из этого. Дело в том, что он включает некоторые пп-формулы, которые общезначимы во всякой конечной области, но не общезначимы в бесконечной области; это может быть показано на примере 43.5 (2).

Упражнения к § 46

46.0. С целью обоснования упрощенной разрешающей процедуры для случая II′ проблемы разрешения докажите правила (1) и (2), приведенные выше в связи с этим случаем.

46.1. (1) Рассмотрите пп-формулу **A** сингулярного функционального исчисления первого порядка (случай III). Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_N$ — различные входящие в **A** функциональные переменные. В силу **432, мы можем считать, что в **A** нет свободных индивидных переменных. В соответствии с описанным выше куайновским решением случая III проблемы разрешения, вначале к **A** должен быть применен процесс сведения из упражнения 39.6. Видоизменяя этот процесс сведе́ния, покажите, что пп-формула **A** может быть сведена к такой пп-формуле **B**, что $\vdash \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ и все Р-составляющие формулы **B**, отличные от пропозициональных переменных, имеют вид $(x) \,.\, \mathbf{D}_1 \supset \,.\, \mathbf{D}_2 \supset \,.\, \ldots \mathbf{D}_{N-1} \supset \mathbf{D}_N$, где каждое в отдельности $\mathbf{D}_i$ есть либо $\mathbf{f}_i(x)$, либо $\sim \mathbf{f}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Однако может существовать лишь 2^N различных Р-составляющих такого вида. Поэтому докажите **466, применяя к **B** разрешающую процедуру случая II′. (2) Покажите также, что $\vdash \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда всякая опровергающая система истинностных значений Р-составляющих формулы **B** приписывает всем отличным от пропозициональных переменных Р-составляющим значение t.

46.2. Примените куайновское решение случая III к каждой из следующих пп-формул:

(1) $$(\exists x)(y) \,.\, F(x) \equiv p \supset \,.\, F(y) \equiv p.$$

(2) $$(\exists x)(y) \,.\, F(x) \equiv F(y).$$

(3) $$(\exists x)\,[F(x) \supset G(x)] \equiv (\exists x)(\exists y)\,[F(x) \supset G(y)].$$

(4)[436] $$F(x) \supset_x [F(y) \supset G(x)] \supset \,.\, p \supset \,.\, (x)\, F(x) \supset G(y).$$

(5) $$(\exists x)(\exists y)(z_1)(z_2) \,.\, F(y) \supset G(z_1) \supset G(x) \sim F(z_1) \supset \,.\, F(x) \vee G(x) \supset H(x) \supset H(z_2) \,.\, H(y) \supset \,.\, F(z_2) \vee G(z_2) \supset H(z_2).$$

46.3. Решите случай IV проблемы разрешения, используя тот же процесс сведения (ср. упражнение 39.6), что и в куайновском решении случая III. В порядке иллюстрации используйте этот метод для определения того, какая из следующих пп-формул является теоремой:

(1) $$(\exists x)(y_1)(y_2) \,.\, \sim F(x, z) \supset F(z, y_1) \supset \,.\, F(y_2, z) \supset F(z, y_2).$$

(2) $$(\exists z)\, F(x, z) \supset (z)\, G(x, z) \supset \,.\, (z)\,[G(z, z) \supset F(z, y)] \supset \,.\, F(x, y) \equiv (z)\, G(x, z).$$

46.4. Решите случай IV проблемы разрешения, сведя его к случаю III. Для этого найдите для каждой пп-формулы **A** класса IV соответствующую пп-формулу класса III, которая является теоремой тогда и только тогда, когда **A** является теоремой. (*Указание.* Используйте идею замены каждой элементарной части пп-формулы **A** на такую элементарную часть, которая содержала бы только сингулярную функциональную переменную.) Испробуйте ваше решение, применив его к следующим двум пп-формулам и проверив, что результат получается тот же, что и в случае применения к этим пп-формулам разрешающей процедуры случая I:

$$F(x, y) \supset_x F(y, x) \supset \sim_{\blacksquare} F(x, y) \supset_x \sim F(y, x);$$

$$F(x, y) \supset F(y, x) \supset_x G(x, y) \supset \sim_{\blacksquare} F(x, y) \supset F(y, x) \supset_x \sim G(x, y).$$

46.5. Как указывалось выше, всякое решение какого-либо частного случая проблемы разрешения для общезначимости влечет решение соответствующего частного случая проблемы разрешения для выполнимости. Сформулируйте те частные случаи проблемы разрешения для выполнимости, которые таким образом соответствуют случаям I—IV проблемы разрешения для общезначимости, и для каждого из этих случаев сформулируйте разрешающую процедуру непосредственно (т. е. без ссылок на разрешающие процедуры случаев I—IV проблемы разрешения для общезначимости).

46.6. Пусть случай VI_0^1 будет таким подслучаем случая VI, в котором нет свободных переменных, $m = 0$ и $l = 1$, т. е. в случае VI_0^1 данная пп-формула **A** имеет в качестве предваренной нормальной формы $(\exists \mathfrak{b})(\mathfrak{c})\mathbf{M}$, где **M** есть основа, не содержащая никаких индивидных переменных, кроме $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.

Допустим, что в **A** нет никаких пропозициональных переменных и что единственной встречающейся функциональной переменной является бинарная функциональная переменная $\mathfrak{f}$. Приняв положительные целые числа за область индивидов, рассмотрите следующую попытку подобрать такое значение для функциональных переменной $\mathfrak{f}$, при котором пп-формула **A** имела бы значение f (ложь). Для значения 1 переменной $\mathfrak{b}$ мы должны найти такое значение переменной $\mathfrak{c}$, чтобы значением **M** было f, и мы можем без потери общности предположить, что таким значением переменной $\mathfrak{c}$ является 2. Различными элементарными частями формулы **M** являются некоторые или все формулы из списка $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$; приписывая им подходящие истинностные значения, мы можем в 0 или большем числе случаев придать **M** значение f. Исходя из этого, мы определяем возможные значения для $\Phi(1, 2)$, $\Phi(2, 1)$, $\Phi(1, 1)$, $\Phi(2, 2)$, где Φ — та пропозициональная функция, которая должна быть значением переменной $\mathfrak{f}$. Затем мы должны также рассмотреть значение 2 переменной $\mathfrak{b}$ и для него найти такое значение переменной $\mathfrak{c}$, чтобы значением **M** было f. Без потери общности можно предположить, что этим новым значением переменной $\mathfrak{c}$ является 3. Вновь мы рассматриваем истинностные значения, которые должны быть приписаны формулам $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$, для того чтобы формула **M** приняла значение f, и определяем таким образом возможные значения для $\Phi(2, 3)$, $\Phi(3, 2)$, $\Phi(2, 2)$, $\Phi(3, 3)$. Это дает нам два независимых определения того, чем должно быть $\Phi\,(2, 2)$, и ясно, что нам могут при этом встретиться два следующих случая. (i) Может случиться, что эти два независимых определения значения $\Phi(2, 2)$ функции Φ нельзя согласовать друг с другом за счет использования каких-либо возможных распределений истинностных значений по формулам $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ из числа тех, для которых **M** принимает значение f (как с использованием оба раза одного и того же распределения значений по $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$, так и использованием двух различных распределений). В этом случае **A** общезначима. (ii) Может случиться, что эти два независимых определения значения $\Phi(2, 2)$ функции Φ могут быть согласованы друг с другом. Тогда мы можем найти для значения 3 переменной $\mathfrak{b}$ такое значение 4 переменной $\mathfrak{c}$, чтобы значением **M** было f, и для значения 4 переменной $\mathfrak{b}$ такое значение 5 переменной $\mathfrak{c}$, чтобы значением **M** было f, и т. д. Так как при этом мы больше не можем встретить никаких препятствий, то **A** не общезначима. Таким образом, исход зависит от того, можно ли или нет найти такое значение Φ для переменной $\mathfrak{f}$, чтобы **M** принимало значение f как для значений 1, 2 переменных $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, так и для значений, 2, 3 переменных $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

(1) Проведите детали рассуждения, намеченного в предыдущем абзаце, и сделайте это так, чтобы показать, что пп-формула **A** общезначима тогда и только тогда, когда дизъюнкция

$$S^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}_{x_1 x_2}\,\mathbf{M}\,\big| \vee S^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}_{x_2 x_3}\,\mathbf{M}\,\big|$$

является подстановковым частным случаем тавтологии, или, как мы будем говорить, тогда и только тогда, когда эта дизъюнкция *тавтологична*.

(2) Распространите этот результат на такой более общий подслучай случая VI^1_0, в котором допускается произвольное число пропозициональных переменных и единственная функциональная переменная (не обязательно бинарная). То есть покажите, что и в этом случае **A** общезначима тогда и только тогда, когда дизъюнкция

$$S^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}_{x_1 x_2}\,\mathbf{M}\,\big| \vee S^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}_{x_2 x_3}\,\mathbf{M}\,\big|$$

тавтологична.

(3) Осуществите решение этого частного случая проблемы разрешения, явно показав, как получить доказательство пп-формулы **A** в случае, если предыдущая дизъюнкция тавтологична.

46.7. Тем же методом решите такой дальнейший подслучай случая VI_0^1 проблемы разрешения, в котором допускается произвольное число пропозициональных переменных и ровно две функциональные переменные. Покажите, что в этом случае пп-формула **A** является теоремой тогда и только тогда, когда дизъюнкция

$$\mathrm{S}_{x_1 x_2}^{\mathbf{b}\,\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,| \vee \mathrm{S}_{x_2 x_3}^{\mathbf{b}\,\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,| \vee \mathrm{S}_{x_3 x_4}^{\mathbf{b}\,\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,| \vee \mathrm{S}_{x_4 x_5}^{\mathbf{b}\,\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,|$$

тавтологична.

46.8. Тем же методом решите случай VI_0^1 проблемы разрешения. А именно, покажите, что пп-формула **A** является теоремой тогда и только тогда, когда дизъюнкция

$$\mathrm{S}_{x_1 x_2}^{\mathbf{b}\,\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,| \vee \mathrm{S}_{x_2 x_3}^{\mathbf{b}\,\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,| \vee \ldots \vee \mathrm{S}_{x_{2^N} x_{2^N+1}}^{\mathbf{b}\quad\mathbf{c}}\,\mathbf{M}\,|,$$

где N — число различных входящих в **A** функциональных переменных, тавтологична.

46.9. Используйте разрешающую процедуру из 46.6—46.8 для выяснения того, какие из следующих пп-формул являются теоремами:

(1) $(\exists x)(y)\,.\,F(x, y) \equiv F(x, x) \supset .\, F(x, y) \equiv F(y, y).$

(2)[437] $(\exists x)(y)\,.\,F(x, x) \supset F(y, y) \supset F(x, y)\,G(x) \supset G(y).$

(Заметьте, что в этих упражнениях не требуется явно выписывать доказательство той пп-формулы, которая окажется теоремой. Поэтому вместо того, чтобы использовать дизъюнкцию, которая в соответствии с 46.6—46.8 тавтологична тогда и только тогда, когда данная пп-формула является теоремой, часто оказывается более удобным просто проследить за такой же процедурой, как та, при которой получается эта дизъюнкция, т. е. за процедурой, которая описана во втором абзаце упражнения 46.6, или за подходящим обобщением этой процедуры.)

46.10. В качестве следствия из 46.8 получите результат Бернайса и Шейнфинкеля, согласно которому в случае VI_0^1 пп-формула **A** достоверна, если она достоверна в области из $2^{N'}$ индивидов, где N' есть либо число различных входящих в **A** функциональных переменных, либо же 2, смотря по тому, какое из этих чисел больше.

46.11. Использованный в 46.6—46.8 метод решения случая VI_0^1 проблемы разрешения может в действительности быть использован и для решения общего случая VI [438].

(1) Используйте этот метод для решения случая VI_0^2, в котором данная пп-формула **A** имеет предваренную нормальную форму $(\exists\mathfrak{b})(\mathfrak{c}_1)(\mathfrak{c}_2)\mathbf{M}$, где **M** — основа, не содержащая отличных от $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ индивидных переменных. Покажите, что в этом случае пп-формула **A** является теоремой тогда и только тогда, когда дизъюнкция

$$\mathrm{S}_{x_1 x_2 x_3}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2}\mathbf{M}| \vee \mathrm{S}_{x_2 x_4 x_5}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2}\mathbf{M}| \vee \mathrm{S}_{x_3 x_6 x_7}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2}\mathbf{M}| \vee \mathrm{S}_{x_4 x_8 x_9}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2}\mathbf{M}| \vee \ldots \vee \mathrm{S}_{x_\mu x_{2\mu} x_{2\mu+1}}^{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_2}\mathbf{M}|,$$

где N — число различных входящих в **A** функциональных переменных, а

$$\mu = 2^{2^N} - 1,$$

тавтологична.

(2) Используйте этот метод для решения случая VI_1^1, в котором данная пп-формула имеет предваренную нормальную форму $(\mathfrak{a})(\exists\mathfrak{b})(\mathfrak{c})\,\mathbf{M}$, где **M** — основа, не содержащая отличных от $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ индивидных переменных. Покажите, что в этом случае пп-формула **A** является теоремой тогда и только тогда, когда тавтологична дизъюнкция

$$\mathrm{S}_{xxx_1}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\mathbf{M}| \vee \mathrm{S}_{xx_1x_2}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}\mathbf{M}| \vee \mathrm{S}_{xx_2x_3}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}\mathbf{M}| \vee \mathrm{S}_{xx_3x_4}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}\mathbf{M}| \vee \ldots \vee \mathrm{S}_{xx_{2\nu-1}x_{2\nu}}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\quad\mathfrak{c}}\mathbf{M}|,$$

где ν есть сумма *весов* различных входящих в **A** функциональных переменных, если весом h-арной функциональной переменной $\mathfrak{f}$ считать число различных пп-формул вида $\mathfrak{f}(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_h)$, входящих в $\mathrm{S}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\mathbf{M}|$ в качестве элементарных частей, исключая только одну пп-формулу $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{a})$ (которая не должна при этом учитываться). (Принимая натуральные числа за область индивидов, попытайтесь придать пп-формуле **A** значение f. Для этого достаточно найти одно значение переменной, при котором формула $(\exists\mathfrak{b})(\mathfrak{c})\,\mathbf{M}$ имела бы значение f, и без потери общности можно считать, что этим значением переменной $\mathfrak{a}$ является 0. После этого действуйте, как в 46.6 или как в 46.8.)

46.12. Примените разрешающую процедуру из 46.11 для определения того, какие из следующих пп-формул являются теоремами:

(1) $$(\exists x)(y)(z)\,.\,F(y, z) \supset [G(y) \supset H(x)] \supset F(x, x) \supset .\, F(z, x) \supset G(x) \supset H(z) \supset .\, F(x, y) \supset F(z, z).$$

(2) $$(x)(\exists y)(z)\,.\,F(y, x) \supset [F(x, z) \supset F(x, y)]\,.\, F(x, y) \supset .\sim F(x, z) \supset F(y, x)F(z, y).$$

(3) $$(\exists x)(y)(z)\,.\,F(y) \supset G(y) \equiv F(x) \supset .\, F(y) \supset H(y) \equiv G(x) \supset .\, F(y) \supset G(y) \supset H(y) \equiv H(x) \supset F(z)\,G(z)\,H(z).$$

46.13. Как заметил Сколем в 1928 г., этот же метод может быть распространен на случаи, в которых имеется более чем один квантор существования.

Возьмем в качестве примера случай префикса $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2)(\mathbf{c})$. В связи с префиксом $(\exists \mathbf{b})(\mathbf{c})$ мы использовали следующую последовательность пар значений переменных $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$: $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 4, 5\rangle$ и т. д. неограниченно. Подобно этому нам нужно и в связи с префиксом $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2)(\mathbf{c})$ возможно точнее придерживаться метода из 46.6—46.8, используя следующую последовательность троек положительных целых чисел в качестве значений переменных $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}$: $\langle 1, 1, 2\rangle$; $\langle 1, 2, 3\rangle$, $\langle 2, 1, 4\rangle$, $\langle 2, 2, 5\rangle$; $\langle 1, 3, 6\rangle$, $\langle 3, 1, 7\rangle$, $\langle 2, 3, 8\rangle$, $\langle 3, 2, 9\rangle$, $\langle 3, 3, 10\rangle$; $\langle 1, 4, 11\rangle$, $\langle 4, 1, 12\rangle$, $\langle 2, 4, 13\rangle$, $\langle 4, 2, 14\rangle$, $\langle 3, 4, 15\rangle$, $\langle 4, 3, 16\rangle$, $\langle 4, 4, 17\rangle$; $\langle 1, 5, 18\rangle$, $\langle 5, 1, 19\rangle$, $\langle 2, 5, 20\rangle$, $\langle 5, 2, 21\rangle$, $\langle 3, 5, 22\rangle$, $\langle 5, 3, 23\rangle$, $\langle 4, 5, 24\rangle$, $\langle 5, 4, 25\rangle$, $\langle 5, 5, 26\rangle$; $\langle 1, 6, 27\rangle$, $\langle 6, 1, 28\rangle$, ... Использованная здесь нумерация упорядоченных пар положительных целых чисел видоизменена по сравнению с той, которая была применена в § 44. Однако с точки зрения § 44 это изменение несущественно, и мы можем поэтому считать, что пп-формулы $\mathbf{C}_k$ из § 44 модифицированы соответствующим образом, т. е. в соответствии с использованием модифицированной только что нумерации упорядоченных пар положительных целых чисел. Если в каком-либо частном случае мы можем найти некоторое значение K для k, относительно которого можно доказать, что либо $\mathbf{C}_K$ тавтологично, либо никакое $\mathbf{C}_k$ не тавтологично, то мы получаем решение этого частного случая проблемы разрешения прямым применением методов § 44 [439].

(1) Используйте этот метод для решения такого случая V″ проблемы разрешения, в котором данная пп-формула **A** находится в сколемовской нормальной форме и в то же время удовлетворяет условиям случая V′. Покажите, что в этом случае $K = (l + 1)^n$, где n есть число кванторов существования в префиксе, а l — число кванторов общности. (Используйте тот факт, что **M** принимает значение f для не более чем одной системы истинностных значений своих элементарных частей.)

(2) Используйте этот метод для решения такого подслучая IX′ случая IX, в котором нет свободных индивидных переменных, а префикс имеет вид $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2) \ldots (\exists \mathbf{b}_n)(\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2) \ldots (\mathbf{c}_l)$, для чего покажите, что в этом случае данная пп-формула **A** является теоремой тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{S}^{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n}_{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1\ldots\mathbf{b}_1}\mathbf{M}\,|$$

тавтологично.

(3) Используйте этот метод для решения такого подслучая $\mathrm{VIII}_0^{2,1}$ случая VIII, в котором нет свободных индивидных переменных, а префиксом является $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2)(\mathbf{c})$. (i) Предполагая, что в **A** входит только одна-единственная бинарная функциональная пере-

менная, найдите бескванторную дизъюнкцию, как можно более короткую и не обязательно совпадающую с одной из пп-формул $\mathbf{C}_k$, такую, что данная пп-формула **A** является теоремой тогда и только тогда, когда эта дизъюнкция тавтологична. Проделайте то же самое в предположениях: (ii) что в **A** входит одна бинарная функциональная переменная и произвольное число сингулярных функциональных переменных; (iii) что в **A** входят точно две бинарные функциональные переменные $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ и нет элементарных частей, отличных от $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{f}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{g}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$. После этого (iv) покажите, как решить общий случай $\mathrm{VIII}_0^{2,1}$, не стараясь обязательно найти кратчайшую разрешающую процедуру или наименьшее число K, но обеспечивая успех метода указанием верхней границы для K[440].

(4) Примените этот метод для решения такого подслучая VIII_0 случая VIII, в котором нет свободных индивидных переменных и $m = 0$. (Опять-таки укажите верхнюю границу для K.)[440]

46.14. Используйте разрешающую процедуру из упражнения 46.13 для определения того, какие из следующих пп-формул являются теоремами:

(1) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, x) \supset_{\centerdot} F(y, y) \supset_{\centerdot} F(x, z) \supset F(z, y)$.

(2) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, z) \equiv F(z, y) \supset_{\centerdot} F(z, y) \equiv F(z, z) \supset_{\centerdot}$
$F(x, y) \equiv F(y, x) \supset_{\centerdot} F(x, y) \equiv F(x, z)$.

(3) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, z) \supset_{\centerdot} F(y, z) \supset_{\centerdot} F(x, y) \equiv F(z, z) \supset_{\centerdot}$
$F(y, x) \vee F(z, z) \supset_{\centerdot} F(z, x) \vee F(z, y)$.

(4) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, y)\, F(y, x) \not\equiv F(x, z) \supset_{\centerdot} F(x, z) \equiv F(z, x) \supset_{\centerdot}$
$F(x, z) \equiv F(y, z) \supset_{\centerdot} F(y, x) \supset F(x, y) \equiv F(z, z) \supset_{\centerdot}$
$F(x, y) \equiv F(y, x) \equiv F(z, y)$.

[Ответ: (4) является теоремой.]

(5) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, y) \supset F(y, z) F(z, z)_{\centerdot}\, F(x, y)\, G(x, y) \supset$
$G(x, z)\, G(z, z)$.

(6) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, y) \supset [F(x, z) \equiv G(y, z)] \supset_{\centerdot}$
$F(x, y) \equiv [F(z, z) \supset G(z, z)] \supset_{\centerdot} G(x, y) \equiv G(z, z)$.

(7) $(\exists x)(\exists y)(z)_{\centerdot}\, F(x, z) \supset_{\centerdot} F(z, z) \supset G(z, z) \equiv F(x, y) \supset_{\centerdot}$
$G(z, z) \supset F(z, z) \equiv G(x, y) \supset_{\centerdot} G(x, y) \supset F(y, x) \equiv G(y, z) \supset_{\centerdot}$
$F(z, y) \equiv F(y, x)$.

46.15. Распространяя метод упражнения 46.13 (1) [ср. также с 46.11 (2)], получите решение случая V′ проблемы разрешения.

Вначале выработайте метод в применении к следующим частным примерам:

(1) $(x)(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \,.\, F(x, z) \supset .\, F(y_1, z) \supset .\, F(y_2, z) \supset .$
$$F(y_1, x) \supset F(z, y_2).$$
(2) $(x_1)(x_2)(\exists y)(z) \,.\, F(x_1, y) \supset .\, F(z, x_1) \supset .\, F(z, y) \supset$
$$F(x_2, y) \vee F(x_2, z).$$
(3) $(\exists x)(y)(\exists z) \,.\, F(x, y) \supset .\, F(z, x) \supset F(y, y)$.

(4) $(\exists x)(y)(\exists z) \,.\, F(x, y, z) \supset F(y, z, z)$.

(5) $(\exists x)(y)(\exists z_1)(\exists z_2) \,.\, F(x, y, z_1, z_2, z_1) \supset F(z_1, x, y, z_1, z_2)$.

(6) $(\exists x_1)(x_2)(\exists x_3)(x_4) \,.\, F(x_1, x_2, x_3) \supset F(x_2, x_3, x_4)$.

(7) $(x_1)(\exists x_2)(x_3)(\exists x_4) \,.\, F(x_1, x_2, x_3) \supset F(x_4, x_4, x_1)$.

Затем (8) сформулируйте метод в общем виде и покажите, что он дает решение случая V′ проблемы разрешения для общезначимости. Наконец, (9) покажите, как получить доказательство пп-формулы, общезначимость которой была обнаружена этим методом.

46.16. (1) Тем же самым методом решите также следующий случай V проблемы разрешения:

V *Пп-формул с такой предваренной нормальной формой, в которой основа обладает свойством не принимать значение ложь для двух распределений истинностных значений по ее элементарным частям, если только эти распределения не отличаются истинностными значениями по меньшей мере одной такой элементарной части, которая не содержит ни одной входящей в префикс переменной.*

Проиллюстрируйте решение, применяя его к следующим частным примерам (предварительно отсекая, если нужно, кванторы общности, стоящие в начале префикса):

(2) $(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \,.\, F(x, y_1) \supset F(z, x) \supset F(x, x) \supset F(x, x)F(y_1, y_2)$.

(3) $(x)(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \,.\, F(x, z) \supset [F(y_1, z) \supset F(y_2, x)] \supset F(x, x) \supset .$
$$F(x, x) \,.\, F(y_1, y_2) \supset F(z, z).$$
(4) $(x_1)(x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \,.$
$$F(x_1, x_2, y_1) \supset F(y_2, y_1, z) \supset [F(x_1, x_1, x_2) \supset F(x_1, x_2, x_2)] \supset .$$
$$F(x_2, y_1, y_2) \supset F(y_1, z, z) \supset [F(x_1, x_2, x_2) \supset F(x_1, x_1, x_2)] \supset .$$
$$F(y_1, y_2, z) \supset F(x_2, x_2, y_1) \,.\, F(x_1, x_1, x_2) \equiv F(x_1, x_2, x_2)$$

46.17. (1) Точно так же, распространяя метод упражнения 46.13 (2), получите решение случая IX проблемы разрешения и проиллюстрируйте полученное решение, применяя его к следующим частным примерам:

(2) $(x_1)(x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)(z_1)(z_2) \centerdot F(x_2, z_1) \supset_{\centerdot}$
$F(y_1, z_2) \supset F(y_1, z_1) F(y_2, z_1) \vee F(x_2, z_2) F(y_2, z_2)$.

(3) $(\exists x_1)(\exists x_2)(y) \centerdot [F(x_1, y) \equiv F(x_2, y) \equiv F(z_1, z_2)] \vee [F(z_1, y) \equiv F(z_2, y)]$.

(4) $(\exists x_1)(x_2)(\exists x_3)(x_4) \centerdot [F(x_1, x_4) \equiv F(x_4, x_3) \equiv F(x_3, x_4) \equiv F(x_4, x_1)] \centerdot F(x_2, x_4) \equiv F(x_4, x_3) \equiv F(x_3, x_4) \equiv F(x_1, x_2)$.

(5) $(\exists x_1)(x_2)(\exists x_3)(x_4) \centerdot F(x_1, x_4) \equiv F(x_2, x_4) \supset_{\centerdot}$
$F(x_1, x_4) \equiv F(x_4, x_3) \equiv F(x_3, x_4) \equiv F(x_4, x_2)$.

46.18. (1) Аналогичным образом, распространяя метод упражнения 46.13 (3), (4), решите случай VIII проблемы разрешения [440]. Проиллюстрируйте полученное решение, применяя разрешающую процедуру к следующим частным примерам:

(2) $(x)(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \centerdot F(x, z) \equiv F(z, x) \supset_{\centerdot}$
$F(x, z) \equiv F(y_2, z) \centerdot F(y_1, z) \supset F(y_1, y_2)$.

(3) $(x_1)(x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \centerdot F(x_1, y_2, x_1, z) \supset_{\centerdot}$
$F(x_1, y_1, x_1, y_2) \equiv F(y_1, x_2, y_1, y_2) \supset_{\centerdot}$
$F(x_1, y_1, x_1, y_2) \supset [F(x_1, y_2, y_1, y_2) \supset$
$F(x_1, z, y_1, z)] \centerdot F(x_1, z, y_1, z) \supset_{\centerdot} F(x_1, y_1, x_1, y_2) \equiv F(x_1, y_2, y_1, y_2)$.

(4) $(x_1)(x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)(z) \centerdot F(x_1, x_2) \supset_{\centerdot} F(y_1, y_2) \supset F(x_2, z) \vee F(y_2, z) \supset_{\centerdot}$
$F(y_1, y_2) \supset [F(x_2, z) \equiv F(y_1, z)] \supset F(z, z) \supset_{\centerdot}$
$F(y_1, y_2) \centerdot F(y_1, z) \equiv F(y_2, z)$.

(5) $(x)(\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(z) \centerdot F(y_1, y_2, y_3) \supset$
$[F(x, x, z) \supset F(y_2, y_3, y_1) \vee F(y_3, y_1, y_2)] \supset_{\centerdot}$
$F(y_3, y_1, y_2) \supset F(y_1, y_2, y_3) F(y_2, y_3, y_1) \equiv F(y_2, y_1, z) \supset_{\centerdot}$
$F(y_2, y_3, y_1) \supset F(y_1, y_2, y_3) F(y_3, y_1, y_2) \equiv F(y_1, z, y_2) \supset_{\centerdot}$
$F(y_3, y_1, y_2) \supset \sim F(y_2, y_3, y_1) \supset F(y_1, y_2, y_3) \equiv$
$F(z, y_2, y_1) \supset_{\centerdot} F(y_1, y_2, y_3) F(y_2, y_3, y_1) F(y_3, y_1, y_2) \equiv$
$F(z, z, z)$.

46.19. Используйте сказанное в примечании 425 для сведе́ния решения каждого из следующих дополнительных частных случаев проблемы разрешения к решениям случаев I, V—IX:

XI′ *Пп-формул, в которых каждая истинностно-функциональная составляющая находится в предваренной нормальной форме с элементарной частью или отрицанием элементарной части в качестве основы.*

XI *Пп-формул, в которых каждая истинностно-функциональная составляющая находится в предваренной нормальной форме с основой, не более чем одна элементарная часть которой содержит переменные, входящие в ее префикс.*

XII *Пп-формул, в которых предваренные нормальные формы истинностно-функциональных составляющих имеют префиксы только следующих видов:* $(\mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)$, $(\mathbf{a}_1)(\exists\mathbf{b}_1)$, $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)(\exists\mathbf{b}_1)$, $(\mathbf{a}_1)(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)$, $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)$.

XIII *Пп-формул, в которых предваренная нормальная форма каждой истинностно-функциональной составляющей* $\mathbf{P}_i$ *имеет префикс вида*

$$(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n) \text{ или } (\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_{m_i})(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)$$

и основу, каждая отличная от пропозициональной переменной элементарная часть которой содержит все переменные $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, *где число* n *— одно и то же для всех составляющих* $\mathbf{P}_i$, *а все числа* m_i *не превосходят* n.

46.20. Рассмотрите следующий дополнительный случай проблемы разрешения:

XIV *Пп-формул, имеющих предваренную нормальную форму с префиксом вида* $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)(\exists\mathbf{b}_1)(\exists\mathbf{b}_2)\ldots(\exists\mathbf{b}_n)(\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2)\ldots(\mathbf{c}_l)$ *и с основой, полным перечнем функциональных переменных которой является* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_M, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_N$ *и в которой никакая элементарная часть, содержащая одну из функциональных переменных* $\mathbf{f}_i$, *не содержит ни одной из переменных* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$ *и каждая элементарная часть, содержащая одну из функциональных переменных* $\mathbf{g}_i$, *либо не содержит ни одной из переменных* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, *либо содержит по крайней мере одну из переменных* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_l$.

(1) С помощью описанного в 46.13 метода решите подслучай XIV_0, в котором нет свободных индивидных переменных и $m = 0$, показав, что в этом случае $K = 1$. (2) Распространяя этот метод, решите общий случай XIV. (3) Полагая $l = 0$, найдите решение случая I как следствие решения случая XIV. (4) Проиллюстрируйте полученное решение случая XIV, применив его к следующему примеру:

$$(x_1)(x_2)(\exists y_1)(\exists y_2)(z)\,.\,F(x_1, x_2) \supset .\, G(x_1, x_2) \supset .$$
$$G(x_2, z) \equiv G(y_2, z) \supset [F(y_1, y_2) \supset F(x_2, y_2)] \supset .$$
$$G(x_2, z) \equiv G(y_1, z) \supset F(x_1, y_1)\, F(x_2, y_1)\, F(y_1, y_2).$$

46.21. Рассмотрите намеченный в примечаниях 439 и 440 общий метод решения проблемы разрешения и изучите вопрос о возможности его распространения на случаи, в которых строка (или строчная пара и т. д.) может быть связана с более чем одной предыдущей строкой (строчной парой и т. д.). Объясните, почему этот метод нельзя распространить на произвольные случаи такого рода, и постарайтесь найти какие-нибудь частные случаи такого рода, на которые такое распространение возможно. Рассмотрите, в частности, случай VII_0^1 пп-формулы $\mathbf{A}$, имеющей предваренную нормальную форму, в которой нет свободных индивидных переменных и префиксом является $(\exists \mathfrak{b}_1)(\exists \mathfrak{b}_2)(\mathfrak{c})$.

46.22. Проблема, обычно рассматриваемая под названием *категорического силлогизма*, может быть следующим образом представлена в связи с некоторым прикладным функциональным исчислением первого порядка, среди исходных символов которого имеются сингулярные функциональные константы. Будем говорить, что некоторое предложение выражает *категорическое суждение*, если оно имеет один из четырех видов $\mathfrak{f}(x) \supset_x \mathfrak{g}(x)$, $\mathfrak{f}(x) \supset_x \sim \mathfrak{g}(x)$, $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x)\, \mathfrak{g}(x)$, $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x) \sim \mathfrak{g}(x)$, где (в каждом случае) $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ — сингулярные функциональные константы [441]. Требуется найти все правильные формы вывода, в которых имеются две посылки и в которых посылки и заключение имеют одну из четырех категорических форм. При этом должны быть исключены случаи, в которых посылки противоречивы, равно как и случаи, когда по существу имеется только одна посылка, т. е. когда имеется более простой вывод, в соответствии с которым рассматриваемое заключение является следствием одной посылки из числа двух данных.

Среди искомых форм вывода имеются, например, следующие, которые соответствуют традиционным силлогизмам типа *Darii*, *Ferio* и *Feriso* соответственно и которые должны считаться различными: из $\mathfrak{g}(x) \supset_x \mathfrak{h}(x)$ и $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x)\, \mathfrak{g}(x)$ следует $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x)\, \mathfrak{h}(x)$; из $\mathfrak{g}(x) \supset_x \sim \mathfrak{h}(x)$ и $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x)\, \mathfrak{g}(x)$ следует $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x) \sim \mathfrak{h}(x)$; из $\mathfrak{g}(x) \supset_x \sim \mathfrak{h}(x)$ и $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{g}(x)\, \mathfrak{f}(x)$ следует $(\exists x)_{\blacksquare}\, \mathfrak{f}(x) \sim \mathfrak{h}(x)$.

Очевидно, что каждую такую форму вывода можно проверить, выписав соответствующий ей *основной принцип* в виде пп-формулы чистого функционального исчисления первого порядка (ср. упражнение 15.9), и форма вывода должна считаться правильной тогда и только тогда, когда ее основной принцип общезначим. Например, основным принципом для *Darii* является $G(x) \supset_x H(x) \supset_{\blacksquare} (\exists x)\, [F(x)\, G(x)] \supset (\exists x)_{\blacksquare}\, F(x)\, H(x)$, и с помощью описанной выше разрешающей процедуры для случая III можно проверить, что этот основной принцип общезначим и что не общезначим ни один из более простых основных принципов $G(x) \supset_x H(x) \supset (\exists x)_{\blacksquare}\, F(x)\, H(x)$, $(\exists x)\, [F(x)\, G(x)] \supset (\exists x)_{\blacksquare}\, F(x)\, H(x)$.

Указанным методом решите проблему нахождения всех таких правильных форм вывода (правильных категорических силлогизмов).

46.23. В некоторых из предыдущих упражнений (см. 46.11 (2), 46.13, 46.15—46.18) неявно содержится принадлежащая Эрбрану [442] метатерема, являющаяся обобщением метатеоремы **441 на случай пп-формулы **A** в предваренной нормальной форме с произвольным префиксом, причем формулировка этой обобщенной метатеоремы отличается, помимо этого, только подстановкой, с помощью которой бескванторная пп-формула $\mathbf{B}_k$ получается из **M**. Явно сформулируйте это обобщение метатеоремы **441 (1) для случая, когда префиксом является $(\exists \mathbf{b})(\mathbf{c})(\exists \mathbf{d})(\mathbf{e})$, а свободными индивидными переменными пп-формулы **A** являются $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$; (2) для случая произвольного префикса и произвольного числа свободных индивидных переменных в **A**.

46.24. С помощью метатеоремы из упражнения 46.23 докажите полноту (в смысле § 44) описываемой ниже формулировки F^{1p}_{h} чистого функционального исчисления первого порядка, принадлежащей Эрбрану [442]. Исходными сентенциональными связками являются отрицание и дизъюнкция. Исходными кванторами служат квантор общности и квантор существования. Аксиомами являются все бескванторные тавтологичные пп-формулы. А правилами вывода, из которых ни одно не требует более одной посылки, являются следующие: правило алфавитной замены связанных переменных (*402); правило обобщения (*401); из **A** следует $(\exists \mathbf{b})\mathbf{B}$, где $\mathbf{b}$ — не входящая в **A** индивидная переменная, а **B** получена из **A** подстановкой $\mathbf{b}$ вместо нуля или большего числа вхождений $\mathbf{a}$ в **A** (не обязательно вместо всех вхождений $\mathbf{a}$ в **A**); пп-часть $(\mathbf{a})[\mathbf{C} \vee \mathbf{D}]$ может быть заменена на $(\mathbf{a})\mathbf{C} \vee \mathbf{D}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в **D**; пп-часть $(\exists \mathbf{a})[\mathbf{C} \vee \mathbf{D}]$ может быть заменена на $(\exists \mathbf{a})\mathbf{C} \vee \mathbf{D}$, если $\mathbf{a}$ не свободно в **D**; пп-часть $(\mathbf{a}) \sim \mathbf{C}$ может быть заменена на $\sim (\exists \mathbf{a})\mathbf{C}$; пп-часть $(\exists \mathbf{a}) \sim \mathbf{C}$ может быть заменена на $\sim (\mathbf{a})\mathbf{C}$; пп-часть $\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}$ может быть заменена на $\mathbf{Q} \vee \mathbf{P}$; пп-часть $\mathbf{P} \vee [\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}]$ может быть заменена на $[\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}] \vee \mathbf{R}$; пп-часть $[\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}] \vee \mathbf{R}$ может быть заменена на $\mathbf{P} \vee [\mathbf{Q} \vee \mathbf{R}]$; пп-часть $\mathbf{P} \vee \mathbf{P}$ может быть заменена на **P**.

47. Сведéния проблемы разрешения. *Сведéние проблемы разрешения* (чистого функционального исчисления первого порядка) состоит из некоторого класса пп-формул Γ и эффективной процедуры, которая позволяет для всякой данной пп-формулы **A** найти такую соответствующую ей пп-формулу $\mathbf{A}_\Gamma$ из класса Γ, что **A** является теоремой тогда и только тогда, когда теоремой является $\mathbf{A}_\Gamma$, и которая, далее, позволяет найти доказательство пп-формулы **A**, если известно доказательство пп-формулы $\mathbf{A}_\Gamma$. Например, метатеоремы **420 и *421 определяют сведение проблемы разрешения, причем классом Γ является в этом случае класс пп-формул в сколемовской нормальной форме.

Сведение проблемы разрешения для общезначимости состоит из некоторого класса пп-формул Γ и эффективной процедуры, которая позволяет для всякой данной пп-формулы **A** найти такую соответствующую ей пп-формулу $\mathbf{A}_\Gamma$ из класса Γ, которая общезначима тогда и только тогда, когда общезначима пп-формула **A**. Аналогично этому, *сведение проблемы разрешения для выполнимости* состоит из некоторого класса пп-формул и эффективной процедуры, позволяющей для всякой данной пп-формулы **A** найти такую соответствующую ей пп-формулу из упомянутого класса, которая выполнима тогда и только тогда, когда выполнима пп-формула **A**.

Ясно, что всякое сведение проблемы разрешения для выполнимости ведет к соответствующему сведению проблемы разрешения для общезначимости, и *vice versa* (для иллюстрации можно взять соответствие между **437 и **438). Поэтому достаточно рассматривать только один из этих двух видов сведения. Говоря о каких-нибудь результатах, сформулированных в литературе в форме сведений проблемы разрешения для выполнимости, мы всегда будем воспроизводить их здесь в другой форме, т. е. будем формулировать существующие сведения проблемы разрешения для общезначимости.

Сведения проблемы разрешения в нашем смысле, т. е. проблемы разрешения для доказуемости, редко рассматривались в литературе — быть может, только в работе Эрбрана. Исключение составляют сведения к сколемовской нормальной форме, а также сведения, которые либо (подобно сведению к предваренной нормальной форме) можно считать охваченными сведением к сколемовской нормальной форме, либо же (подобно сведениям из 39.5, *465) выводятся из сведения к сколемовской нормальной форме средствами, незначительно выходящими за пределы пропозиционального исчисления. Так как для многих целей достаточен более слабый результат, то в остальной части настоящего параграфа мы будем заниматься сведениями проблемы разрешения для общезначимости, и при описании таких сведений будет удобно говорить, что Γ есть *класс сведения*.

Ввиду неразрешимости общей проблемы разрешения чистого функционального исчисления первого порядка (как для доказуемости, так и для общезначимости), очевидно, что *если Γ является классом сведения, то частный случай проблемы разрешения для пп-формул класса Γ неразрешим.* Этим обстоятельством частично объясняется то значение, которое имеют сведения проблемы разрешения для общезначимости.

В качестве леммы для дальнейших доказательств мы вначале установим следующую метатеорему, идея которой принадлежит Эрбрану [443]:

470. Пусть **A — произвольная пп-формула, пусть $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_M$ — полный перечень различных пропозициональных переменных, входящих в **A**, и пусть $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_N$ — полный перечень различных функциональных переменных, входящих в **A**. Предположим, что $\mathfrak{f}_i$ есть h_i-арная функциональная переменная ($i = 1, 2, \ldots, N$), и пусть $h - 1$ есть наибольшее из чисел $h_1, h_2, \ldots, h_N$. Выберем различные индивидные переменные [444] $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{M+N}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{y}_{h-1}$, из которых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{M+N}$ не входят в **A**, и выберем h-арную функциональную переменную $\mathfrak{f}$ [444]. Пусть $\mathbf{C}_j$ есть $\mathfrak{f}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_j)$ ($j = 1, 2, \ldots, M$); пусть $\mathbf{F}_i$ есть $\mathfrak{f}_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{h_i})$ ($i = 1, 2, \ldots, N$); пусть $\mathbf{D}_i$ есть $\mathfrak{f}(\mathbf{x}_{M+i}, \mathbf{x}_{M+i}, \ldots, \mathbf{x}_{M+i}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{h_i})$ ($i = 1, 2, \ldots, N$); и пусть **B** есть

$$\check{S}^{\mathfrak{p}_1}_{\mathbf{C}_1}\check{S}^{\mathfrak{p}_2}_{\mathbf{C}_2}\ldots\check{S}^{\mathfrak{p}_M}_{\mathbf{C}_M}\check{S}^{\mathbf{F}_1}_{\mathbf{D}_1}\check{S}^{\mathbf{F}_2}_{\mathbf{D}_2}\ldots\check{S}^{\mathbf{F}_N}_{\mathbf{D}_N}\mathbf{A}|\ldots|||\ldots||.$$

Тогда **B** общезначима в том и только в том случае, если **A** общезначима.

Доказательство. Если $\vdash \mathbf{A}$, то, в силу *352, $\vdash \mathbf{B}$. В силу **440 и **434, из этого следует, что если **A** общезначима, то и **B** общезначима.

В силу *301 и *306, мы можем предположить, что **A** не содержит свободных индивидных переменных. Считая областью индивидов положительные целые числа, предположим, что **B** общезначима, и рассмотрим некоторую систему значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M$, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ свободных переменных $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_M, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_N$ пп-формулы **A**. Пусть свободным переменным $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{M+N}$ пп-формулы **A** приписаны значения $1, 2, \ldots, M+N$ соответственно, и пусть значение Φ свободной переменной $\mathfrak{f}$ пп-формулы **B** определено следующим образом: $\Phi(j, j, \ldots, j) = \tau_j$ ($j = 1, 2, \ldots, M$); $\Phi(M+i, M+i, \ldots, M+i, u_1, u_2, \ldots, u_{h_i}) = \Phi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{h_i})$ ($i = 1, 2, \ldots, N$); $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_h) = \mathrm{t}$ во всех остальных случаях. Очевидно, что значение пп-формулы **B** для этой системы значений ее свободных переменных совпадает со значением пп-формулы **A** для системы значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ свободных переменных пп-формулы **A**. А так как значением пп-формулы **B** является t, то и значением пп-формулы **A** также является t.

Таким образом, мы показали, что если **B** общезначима в области положительных целых чисел, то и **A** также общезначима в области положительных целых чисел. Следовательно, в силу **450, если общезначима **B**, то общезначима и **A**.

Отсюда следует, что класс пп-формул, содержащих только одну функциональную переменную и не содержащих никаких пропозициональных переменных, является классом сведения. Однако мы сразу же перейдем к получению более сильных сведе́ний, чем это.

В соответствии с одним из результатов Лёвенгейма, класс пп-формул, содержащих только бинарные функциональные переменные, является классом сведения. Несколько усовершенствуя метод Лёвенгейма, можно получить результат, заключающийся в том, что класс пп-формул, содержащих только одну бинарную функциональную переменную (и не содержащих ни других функциональных переменных, ни каких-либо пропозициональных переменных), является классом сведения [445]. Мы сейчас покажем, как это может быть сделано.

Если нам дана некоторая пп-формула $\mathbf{A}$, то мы вначале сводим ее с помощью **470 к такой пп-формуле $\mathbf{B}$, которая содержит одну только h-арную функциональную переменную $\mathbf{f}$. Если $h \neq 2$, то мы выбираем какую-либо бинарную функциональную переменную $\mathbf{g}$ и $2h+1$ различных индивидных переменных $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{c}_h, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{h+1}$, из которых $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{h+1}$ не входят в $\mathbf{B}$ [444], и обозначаем через $\mathbf{G}$ конъюнкцию

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)\, \mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_h, \mathbf{d}_{h+1})\, \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+1}, \mathbf{d}_1)\, \mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{c}_1)\, \mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{c}_2) \ldots$$
$$\ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_h, \mathbf{c}_h) \sim \mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1) \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_2) \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_2, \mathbf{d}_3) \ldots$$
$$\ldots \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_h, \mathbf{d}_{h+1})\, \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+1}, \mathbf{c}_1).$$

После этого, обозначив через $\mathbf{C}$ пп-формулу

$$\check{\mathrm{S}}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2) \ldots (\exists \mathbf{d}_{h+1})\mathbf{G}} \mathbf{B} \,\Big|,$$

мы показываем, что $\mathbf{C}$ общезначима тогда и только тогда, когда общезначима $\mathbf{B}$, и, следовательно, тогда и только тогда, когда общезначима $\mathbf{A}$.

Если $\vdash \mathbf{B}$, то, в силу *352, имеем $\vdash \mathbf{C}$. По **440 и **434, из этого следует, что если $\mathbf{B}$ общезначима, то общезначима и $\mathbf{C}$.

В силу *301 и *306, мы можем рассматривать вместо пп-формул $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ их замыкания всеобщности $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{C}'$. Принимая натуральные числа в качестве области индивидов, допустим, что $\mathbf{C}'$ общезначима, и рассмотрим некоторое произвольное значение Φ единственной свободной переменной $\mathbf{f}$ пп-формулы $\mathbf{B}'$. Теперь следующим образом определим значение Ψ единственной свободной переменной $\mathbf{g}$ пп-формул $\mathbf{C}'$.

Перенумеруем (упорядоченные) h-ки натуральных чисел так, чтобы все входящие в k-ю по порядку h-ку натуральные числа были меньше, чем k. (Подобно нумерации, использованной в § 44, это можно сделать упорядочением h-ек $\langle v_1, v_2, \ldots, v_h \rangle$ по возрастанию сумм $v_1 + v_2 + \ldots + v_h$, а для h-ек с одинаковыми сумма-ми — упорядочением их в лексикографическом порядке.) Тогда $\Psi(u, u) = \mathrm{t}$, за исключением тех случаев, когда $u = k(h+1)+1$ (т. е. случаев, когда u сравнимо с 1 по модулю $h+1$). Если существует натуральное число k, такое, что $u_1 = k(h+1)+1$, $u_2 = k(h+1)+2$, ..., $u_{h+1} = (k+1)(h+1)$, то $\Psi(u_1, u_2) = \Psi(u_2, u_3) = \ldots = \Psi(u_h, u_{h+1}) = \Psi(u_{h+1}, u_1) = \mathrm{t}$. Если $\langle v_1, v_2, \ldots, v_h \rangle$ есть $(k+1)$-я h-ка и $u_l = k(h+1)+l$ $(l = 1, 2, \ldots, h+1)$, то $\Psi(u_1, v_1) = \Psi(u_2, v_2) = \ldots = \Psi(u_h, v_h) = \mathrm{t}$, а $\Psi(u_{h+1}, v_1) = \Phi(v_1, v_2, \ldots, v_h)$. Во всех остальных случаях $\Psi(u, v) = \mathrm{f}$.

Свойства пропозициональной функции Ψ таковы, что значение пп-формулы $\mathbf{C}'$ для значения Ψ переменной $\mathbf{g}$ совпадает со значением пп-формулы $\mathbf{B}'$ для значения Φ переменной $\mathbf{f}$. А так как значением $\mathbf{C}'$ является t, то и значением $\mathbf{B}'$ является также t.

Мы показали, таким образом, что если $\mathbf{C}'$ общезначима в области натуральных чисел, то в этой области общезначима и $\mathbf{B}'$. Отсюда следует, что если $\mathbf{C}$ общезначима, то общезначима и $\mathbf{B}$.

Тем самым доказательство завершено, так как мы показали, что $\mathbf{C}$ общезначима тогда и только тогда, когда общезначима $\mathbf{A}$, и так как $\mathbf{C}$ содержит одну только бинарную функциональную переменную $\mathbf{g}$.

Отметим, что в предыдущем доказательстве мы могли бы вместо пп-формулы $(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{G}$ с таким же успехом воспользоваться и пп-формулой $(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ есть

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \supset_{\blacksquare} \mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_h, \mathbf{d}_{h+1}) \supset_{\blacksquare} \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+1}, \mathbf{d}_1) \supset_{\blacksquare}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{c}_1) \supset_{\blacksquare} \mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{c}_2) \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_h, \mathbf{c}_h) \supset_{\blacksquare} \sim \mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1) \supset_{\blacksquare}$$
$$\sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_2) \supset_{\blacksquare} \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_2, \mathbf{d}_3) \supset_{\blacksquare} \ldots \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_h, \mathbf{d}_{h+1}) \supset \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+1}, \mathbf{c}_1).$$

Это объясняется тем, что как пп-формула $(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{G}$, так и пп-формула $(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{H}$ равным образом принимают значение $\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_h)$ для системы значений $\Psi, v_1, v_2, \ldots, v_h$ своих свободных переменных $\mathbf{g}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h$ (где Ψ — введенная выше пропозициональная функция). Воспользовавшись этим замечанием, мы сейчас установим следующее еще более сильное сведение проблемы разрешения для общезначимости:

**471. Класс пп-формул в сколемовской нормальной форме, содержащих только одну бинарную функциональную переменную (и не содержащих ни других функциональных переменных, ни пропозициональных переменных), является классом сведения.

Доказательство. В силу **437, мы можем предположить, что данная пп-формула $\mathbf{A}$ уже находится в сколемовской нормальной форме.

Вначале мы рассмотрим случай, когда $\mathbf{A}$ содержит только одну h-арную функциональную переменную $\mathbf{f}$, используя в этом случае введенные выше пп-формулы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$. Пусть поэтому $\mathbf{A}$ имеет вид

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M},$$

и пусть полным перечнем различных элементарных частей основы $\mathbf{M}$ пп-формулы $\mathbf{A}$ будет $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_\mu$, где $\mathbf{E}_i$ есть $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{i1}, \mathbf{c}_{i2}, \ldots, \mathbf{c}_{ih})$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$. Так как P-составляющие основы $\mathbf{M}$ совпадают с ее элементарными частями, то, в силу *465, достоверна некоторая эквивалентность $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_1$, где $\mathbf{M}_1$ имеет вид конъюнкции

$$[\mathbf{E}_1^1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{E}_2^1 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{E}_{\mu-1}^1 \supset \sim \mathbf{E}_\mu^1][\mathbf{E}_1^2 \supset_{\blacksquare} \mathbf{E}_2^2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{E}_{\mu-1}^2 \supset \sim \mathbf{E}_\mu^2]\ldots$$
$$[\mathbf{E}_1^\nu \supset_{\blacksquare} \mathbf{E}_2^\nu \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{E}_{\mu-1}^\nu \supset \sim \mathbf{E}_\mu^\nu],$$

в которой каждое $\mathbf{E}_i^j$ есть либо $\mathbf{E}_i$, либо $\sim \mathbf{E}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu$, а $j = 1, 2, \ldots, \nu)$. Поэтому $\mathbf{A}$ общезначима тогда и только тогда, когда общезначима $\mathbf{A}_1$, где $\mathbf{A}_1$ есть

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M}_1.$$

Выберем отличные друг от друга индивидные переменные $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{h+1}$, из которых $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{h+1}$ не входят в $\mathbf{A}_1$ [444], обозначим через $\mathbf{M}_2$ результат замены в $\mathbf{M}_1$ каждой части $\mathbf{E}_i^j$ на

$$\breve{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\mathbf{H}}\,\mathbf{E}_i^j\,\Big|$$

и обозначим через $\mathbf{A}_2$ пп-формулу

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M}_2.$$

Тогда $\mathbf{A}_2$ есть

$$\breve{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\mathbf{H}}\,\mathbf{A}_1\,\Big|,$$

и из *352, **440 и **434 следует, что если $\mathbf{A}_1$ общезначима, то общезначима и $\mathbf{A}_2$.

Пусть $\mathbf{M}_3$ получено из $\mathbf{M}_1$ заменой каждой части $\mathbf{E}_i^j$ на

$$\breve{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+1})\mathbf{G}}\,\mathbf{E}_i^j\,\Big|$$

или на

$$\breve{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\mathbf{H}}\,\mathbf{E}_i^j\,\Big|$$

в соответствии с тем, является ли $\mathbf{E}_i^j$ частью $\mathbf{E}_i$ или же $\sim \mathbf{E}_i$, и пусть $\mathbf{A}_3$ будет

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M}_3.$$

Пусть $\mathbf{A}_4$ будет

$$(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{G} \supset_{\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\ldots\mathbf{c}_h} (\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{H} \supset \mathbf{A}_3.$$

С помощью того же рассуждения, что и выше (используя вновь область натуральных чисел и ту же самую бинарную пропозициональную функцию Ψ), мы можем показать, что если $\mathbf{A}_4$ общезначима, то общезначима и $\mathbf{A}_1$.

Обозначая через $\mathbf{K}$ конъюнкцию всех пп-формул

$$S^{c_1 c_2}_{c_{i1} c_{i2}} \cdot \cdot \cdot {}^{c_h}_{c_{ih}} (\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2) \ldots (\exists \mathbf{d}_{h+1}) \mathbf{G} \supset (\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2) \ldots (\mathbf{d}_{h+1}) \mathbf{H} \,|,$$

мы, в силу P, имеем $\vdash \mathbf{M}_2 \supset_{\blacksquare} \mathbf{K} \supset \mathbf{M}_3$. Следовательно, по *306 и P,

$$\vdash \mathbf{M}_2 \supset_{\blacksquare} (\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2) \ldots (\exists \mathbf{d}_{h+1}) \mathbf{G} \supset_{c_1 c_2 \ldots c_h} (\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2) \ldots (\mathbf{d}_{h+1}) \mathbf{H} \supset \mathbf{M}_3.$$

Следовательно, по *301, *333, *335, *365, *382 и P, $\vdash \mathbf{A}_2 \supset \mathbf{A}_4$. Так как мы знаем, что общезначимые пп-формулы совпадают с теоремами (по **440 и **434), то по *модус поненс* мы получаем, что если $\mathbf{A}_2$ общезначимо, то общезначимо и $\mathbf{A}_4$. Следовательно, если $\mathbf{A}_1$ общезначимо, то общезначимо и $\mathbf{A}_4$.

Итак, предваренная нормальная форма пп-формулы $\mathbf{A}_4$ находится в сколемовской нормальной форме, содержит одну только бинарную функциональную переменную $\mathbf{g}$ и общезначима в том и только в том случае, если общезначима пп-формула $\mathbf{A}$.

Этим завершается доказательство для того случая, когда $\mathbf{A}$ содержит только одну функциональную переменную. Переходя к рассмотрению общего случая, мы предположим, что пп-формула $\mathbf{A}$ находится в сколемовской нормальной форме

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2) \ldots (\mathbf{b}_n) \mathbf{M},$$

где основа $\mathbf{M}$ содержит M различных пропозициональных переменных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M$ и N различных функциональных переменных $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_N$. Пусть $\mathbf{f}_i$ будет h_i-арной функциональной переменной ($i = 1, 2, \ldots, N$), и пусть h — наибольшее среди чисел $h_1, h_2, \ldots, h_N$.

Вместо использованных в первой части доказательства двух пп-формул $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ мы теперь используем $2(M+N)$ пп-формул $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_{M+N}, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_{M+N}$. А именно, обозначая через $\mathbf{g}$ бинарную функциональную переменную, а через $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{h+M+N}$ — отличные друг от друга индивидные переменные, среди которых $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{h+M+N}$ не входят в $\mathbf{A}$ [444], мы берем в качестве $\mathbf{G}_\alpha$ конъюнкцию

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)\mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+M+N-1}, \mathbf{d}_{h+M+N})\mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+M+N}, \mathbf{d}_1)$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{c}_1)\,\mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{c}_2) \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_h, \mathbf{c}_h) \sim \mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1) \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_2)$$
$$\sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_2, \mathbf{d}_3) \ldots \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_h, \mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+\alpha}, \mathbf{c}_1)$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, M+N$) и в качестве $\mathbf{H}_\alpha$ — выражение

$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) \supset_{\blacksquare} \mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+M+N-1}, \mathbf{d}_{h+M+N}) \supset_{\blacksquare} \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+M+N}, \mathbf{d}_1) \supset_{\blacksquare}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{c}_1) \supset_{\blacksquare} \mathbf{g}(\mathbf{d}_2, \mathbf{c}_2) \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{g}(\mathbf{d}_h, \mathbf{c}_h) \supset_{\blacksquare} \sim \mathbf{g}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1) \supset_{\blacksquare} \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_2) \supset_{\blacksquare}$$
$$\sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_2, \mathbf{d}_3) \supset_{\blacksquare} \ldots \sim \mathbf{g}(\mathbf{c}_h, \mathbf{d}_{h+1}) \supset \mathbf{g}(\mathbf{d}_{h+\alpha}, \mathbf{c}_1)$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, M+N).$$

Так же, как и раньше, мы используем натуральные числа в качестве области индивидов. Если теперь задана некоторая система значений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ пропозициональных и функциональных переменных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_M, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_N$, то мы следующим образом определяем пропозициональную функцию Ψ, используемую в качестве значения переменной $\mathbf{g}$. Вводится та же самая нумерация упорядоченных h-ек натуральных чисел. $\Psi(u, u) = \mathrm{t}$, за исключением того случая, когда $u = k(h + M + N) + 1$, (т. е. случая, когда u сравнимо с 1 по модулю $h + M + N$). Если существует натуральное число k, такое, что $u_1 = k(h + M + N) + 1$, $u_2 = k(h + M + N) + 2, \ldots, u_{h+M+N} = (k + 1)(h + M + N)$, то $\Psi(u_1, u_2) = \Psi(u_2, u_3) = \ldots = \Psi(u_{h+M+N-1}, u_{h+M+N}) = \Psi(u_{h+M+N}, u_1) = \mathrm{t}$. Если $\langle v_1, v_2, \ldots, v_h\rangle$ является $(k + 1)$-й h-ой натуральных чисел и $u_l = k(h + M + N) + l$ $(l = 1, 2, \ldots, h + M + N)$, то $\Psi(u_1, v_1) = \Psi(u_2, v_2) = \ldots = \Psi(u_h, v_h) = \mathrm{t}$, а $\Psi(u_{h+j}, v_1) = \tau_j$ $(j = 1, 2, \ldots, M)$ и $\Psi(u_{h+M+i}, v_1) = \Phi_i(v_1, v_2, \ldots, v_h)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Во всех остальных случаях $\Psi(u, v) = \mathrm{f}$.

Вместо использованных в первой части доказательства подстановок

$$\check{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{G}} \quad \text{и} \quad \check{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+1})\,\mathbf{H}}$$

мы теперь используем подстановки

$$\check{S}^{\mathbf{p}_j}_{(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+M+N})\,\mathbf{G}_j}, \qquad \check{S}^{\mathbf{p}_j}_{(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+M+N})\,\mathbf{H}_j},$$

$$\check{S}^{\mathbf{f}_i(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_{h+M+N})\,\mathbf{G}_{M+i}}, \quad \check{S}^{\mathbf{f}_i(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_h)}_{(\mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_2)\ldots(\mathbf{d}_{h+M+N})\,\mathbf{H}_{M+i}},$$

где $j = 1, 2, \ldots, M$ и $i = 1, 2, \ldots, N$.

Мы предоставляем читателю восполнить оставшуюся часть доказательства, пользуясь введенными обозначениями и следуя плану, примененному в первой части доказательства.

Подобными методами, включающими использование счетно-бесконечной области индивидов (такой, как область положительных целых чисел или натуральных чисел), а также некоторой нумерации упорядоченных пар или упорядоченных h-ек индивидов, могут быть получены многие другие сведения проблемы разрешения для общезначимости. Мы кратко укажем доказательство еще одного результата такого рода и затем закончим настоящий параграф тем, что сформулируем без доказательства несколько результатов, которые можно найти в литературе.

**472. Класс пп-формул, находящихся в сколемовской нормальной форме и содержащих ровно три квантора существования и ровно четыре бинарных функциональных переменных (и не содержащих ни других функциональных переменных, ни пропозициональных переменных), является классом сведения.

Доказательство. В силу *471, мы можем предположить, что данная пп-формула **A** находится в сколемовской нормальной форме

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)\,\mathbf{M},$$

где **M** — основа, содержащая одну- единственную бинарную функциональную переменную **g**. Мы можем также предположить, что $m > 3$, так как в противном случае сведение тривиально. Пусть $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ — отличные друг от друга и от **g** бинарные функциональные переменные, пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$, **y**, **z**, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ — отличные друг от друга и не входящие в **A** индивидные переменные, и пусть **B** будет формулой

$$(\mathbf{x}_1)(\mathbf{y})(\mathbf{z})(\exists\mathbf{c}_1)(\exists\mathbf{c}_2)(\exists\mathbf{c}_3)[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{c}_1)\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{c}_2)\mathbf{g}_1(\mathbf{c}_3,\mathbf{y})\mathbf{g}_2(\mathbf{c}_3,\mathbf{z})_{\blacksquare}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{z})\supset$$
$$\mathbf{g}_3(\mathbf{y},\mathbf{z})_{\blacksquare}\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})\ \ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{z})\supset\mathbf{g}_3(\mathbf{y},\mathbf{z})_{\blacksquare}\ \mathbf{g}_3(\mathbf{y},\mathbf{z})\supset_{\blacksquare}\mathbf{g}_1(\mathbf{y},\mathbf{x}_1)\equiv$$
$$\mathbf{g}_1(\mathbf{z},\mathbf{x}_1)_{\blacksquare}\ \mathbf{g}_2(\mathbf{y},\mathbf{x}_1)\equiv\mathbf{g}_2(\mathbf{z},\mathbf{x}_1)_{\blacksquare}\ \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{x}_1)\equiv\mathbf{g}(\mathbf{z},\mathbf{x}_1)_{\blacksquare}\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})\equiv$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1,\mathbf{z})]\supset(\exists\mathbf{x}_1)\,(\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_3)\ldots(\mathbf{x}_{m-1})(\mathbf{a}_1)\,(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_m)\,(\mathbf{b}_1)\,(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)_{\blacksquare}$$
$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{a}_1)\supset_{\blacksquare}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\supset_{\blacksquare}\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_2,\mathbf{a}_2)\supset_{\blacksquare}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)\supset_{\blacksquare}\ldots\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_{m-1},\mathbf{a}_{m-1})\supset_{\blacksquare}$$
$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_{m-1},\mathbf{a}_m)\supset\mathbf{M}.$$

По *381, мы можем преобразовать пп-формулу **B** в эквивалентную пп-формулу **C**, в которой кванторы $(\mathbf{x}_1)$ и $(\exists\mathbf{x}_1)$ отброшены от антецедента и консеквента пп-формулы **B** соответственно и заменены начально расположенным квантором $(\exists\mathbf{x}_1)$. Тогда предваренная нормальная форма пп-формулы **C** удовлетворяет требуемому условию, так как она находится в сколемовской форме, содержит в префиксе точно три квантора существования и содержит ровно четыре бинарные функциональные переменные $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$, **g**.

Мы сразу получаем, что предваренная нормальная форма пп-формулы **C** общезначима тогда и только тогда, когда общезначима пп-формула **B**. Мы предоставляем читателю доказать, что **B** общезначима тогда и только тогда, когда общезначима **A**, используя при этом следующее замечание.

Возьмем натуральные числа в качестве области индивидов и выберем некоторую нумерацию упорядоченных пар натуральных чисел. Если дано произвольное значение Ψ переменной **g**, то система значений Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 переменных $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$, при которой антецедент пп-формулы **B** принимает значение t, может быть определена следующим образом. $\Psi_1(u, v) = \mathrm{t}$ тогда и только тогда, когда v является первым числом в $(u+1)$-й упорядоченной паре; $\Psi_2(u, v) = \mathrm{t}$ тогда и только тогда, когда v является вторым числом в $(u+1)$-й упорядоченной паре; $\Psi_3(u, v) = \mathrm{t}$ тогда и только тогда, когда $u = v$. Ясно, что для этой частной системы значений переменных $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ консеквент пп-формулы **B** имеет значение t в том и только в том случае, если пп-формула **A** имеет значение t. Вообще говоря, для некоторого данного значения переменной $\mathfrak{g}$ могут быть найдены и другие значения переменных $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, при которых антецедент пп-формулы **B** принимает значение t, однако (как это можно усмотреть из самого антецедента пп-формулы **B**) все эти другие системы значений переменных $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ должны иметь определенные общие свойства с системой Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, которые достаточны для того, чтобы консеквент пп-формулы **B** принимал значение t тогда и только тогда, когда пп-формула **A** имеет значение t.

Как будет указано ниже в упражнениях, процесс сведения из **472 легко может быть видоизменен таким образом, чтобы пп-формулы класса сведения содержали только три бинарных функциональных переменных вместо четырех, или таким образом, чтобы пп-формулы класса сведения содержали одну бинарную и одну тернарную функциональную переменную (при неизменных, в обоих случаях, остальных условиях). С помощью более разработанных методов того же рода все это можно даже свести к одной-единственной бинарной функциональной переменной.

В соответствии с известными результатами, включающими только что упомянутый, следующие классы пп-формул являются классами сведения (где в каждом случае, не делая специальных указаний, мы подразумеваем, что пп-формулы не должны содержать ни свободных индивидных переменных, ни каких-либо пропозициональных переменных и что либо сама пп-формула, либо ее антецедент и консеквент должны быть в предваренной нормальной форме):

Пп-формулы с префиксом $(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)(\exists \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\ldots(\mathbf{b}_n)$, содержащие только одну-единственную бинарную функциональную переменную [446].

Пп-формулы с префиксом $(\mathbf{a})(\exists \mathbf{b})(\mathbf{c})(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_n)$, содержащие только одну-единственную бинарную функциональную переменную [447].

Пп-формулы с префиксом $(\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2)(\mathbf{c})(\exists \mathbf{d}_1)(\exists \mathbf{d}_2)\ldots(\exists \mathbf{d}_n)$, содержащие только одну-единственную бинарную функциональную переменную [448].

Пп-формулы с префиксом $(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2)\ldots(\exists \mathbf{a}_n)(\mathbf{b})$, содержащие только одну-единственную бинарную функциональную переменную [449].

Пп-формулы вида $(\mathbf{a})(\mathbf{b})(\mathbf{c})\mathbf{M}_1 \supset (\exists \mathbf{a})(\exists \mathbf{b})(\mathbf{c})\mathbf{M}_2$, где $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ не содержат ни кванторов, ни каких-либо функциональных переменных, помимо бинарных [450].

Затем пп-формулы с префиксом $(\exists \mathbf{a})(\exists \mathbf{b})(\exists \mathbf{c})(\mathbf{d})$, не содержащие функциональных переменных, помимо бинарных [450].

Наконец, пп-формулы с префиксом $(\exists \mathbf{a})(\exists \mathbf{b})(\mathbf{c})(\exists \mathbf{d})$, не содержащие функциональных переменных, помимо бинарных [450].

Упражнения к § 47

47.0. Распространяя результат метатеоремы **470, получите сведение проблемы разрешения для доказуемости, для чего покажите, как получить доказательство пп-формулы **A**, если известно доказательство пп-формулы **B**.

47.1. Восстановите опущенные в тексте детали последней части доказательства метатеоремы **471.

47.2. Восстановив опущенные в доказательстве метатеоремы **472 детали, подробно покажите, что **B** общезначима тогда и только тогда, когда общезначима **A**.

47.3. Покажите, что в **472 число бинарных функциональных переменных может быть уменьшено с четырех до трех за счет введения бинарной функциональной переменной $\mathbf{h}$ и замены повсюду $\mathbf{g}_2(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ на $\mathbf{h}(\mathbf{d}, \mathbf{e}) \sim \mathbf{h}(\mathbf{e}, \mathbf{d})$, а $\mathbf{g}_3(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ на $\mathbf{h}(\mathbf{d}, \mathbf{e})\, \mathbf{h}(\mathbf{e}, \mathbf{d})$.

47.4. Покажите, что в ** 472 процесс сведения можно таким образом изменить посредством замены $\mathbf{g}_1(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ повсюду на $\mathbf{h}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{e})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ — на $\mathbf{h}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{d})$, $\mathbf{g}_3(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ — на $\sim \mathbf{h}(\mathbf{d}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$, чтобы получалась одна бинарная и одна тернарная функциональная переменная.

47.5. Основная идея процесса сведения из **472 заключается в использовании нумерации упорядоченных пар натуральных чисел для замены последовательности кванторов существования $(\exists \mathbf{a}_1)\, (\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_m)$ одним квантором существования $(\exists \mathbf{x}_1)$ за счет увеличения числа кванторов общности. С соответствующими изменениями ту же самую идею можно использовать для замены последовательности кванторов общности на один-единственный квантор общности за счет увеличения числа кванторов существования. Например, ппф $(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\mathbf{M}$ может быть заменена на ппф $(\mathbf{x}_1)\, (\exists \mathbf{b}_1)\, (\exists \mathbf{b}_2)\, .\, \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_1)\, \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{M}$, которая будет иметь те же значения, что и $(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2)\mathbf{M}$, если $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ имеют значения Ψ_1 и Ψ_2, указанные в доказательстве метатеоремы **472. Исследуйте вопрос, какие дополнительные сведения проблемы разрешения (помимо сведений из **470—**472) могут быть получены использованием этого метода совместно с методами и результатами из **420—**421, **470—**472.

48. Функциональное исчисление первого порядка с равенством. *Функциональное исчисление первого порядка с равенством* есть логистическая система, полученная из функционального исчисления первого порядка добавлением бинарной функциональной константы I и определенных аксиом (или постулатов, в зависимости от точки зрения), которые содержат I. Его можно описать и иначе, сказав, что оно получено добавлением дополнительных аксиом к прикладному функциональному исчислению первого порядка, среди исходных символов которого имеется бинарная функциональная константа I. Пп-формулы полученной системы совпадают с пп-формулами первоначального прикладного функционального исчисления первого порядка, но появляются, конечно, дополнительные теоремы, как следствие добавленных аксиом.

Мы будем говорить о *чистом функциональном исчислении первого порядка с равенством*, если в число элементарных символов входят все пропозициональные и функциональные переменные (перечисленные в § 30) и не входят никакие функциональные константы, помимо I; мы будем говорить о *прикладном функциональном исчислении первого порядка с равенством*, если, кроме I, имеются другие функциональные константы; о *простом прикладном функциональном исчислении первого порядка с равенством*, если, кроме I, имеются другие функциональные константы, но нет функциональных переменных. Помимо этого, имеется *простое исчисление равенства*, получаемое добавлением соответствующих аксиом к простому прикладному функциональному исчислению первого порядка, единственной функциональной константой которого является I.

Если функциональное исчисление первого порядка рассматривается в формулировке § 30, то должны быть добавлены следующие аксиомы: аксиома

$$I(x, x)$$

и бесконечный перечень аксиом, заданных аксиомной схемой

$$I(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B},$$

где $\mathbf{a}$ — индивидная переменная или индивидная константа, $\mathbf{b}$ — индивидная переменная или индивидная константа, а $\mathbf{B}$ получено из $\mathbf{A}$ заменой на $\mathbf{b}$ некоторого частного вхождения $\mathbf{a}$, которое не находится ни в области какого-либо квантора $(\mathbf{a})$, ни в области какого-либо квантора $(\mathbf{b})$. Формулировку функционального исчисления первого порядка с равенством, которая получается добавлением функциональной константы I и вышеописанных аксиом к исчислению F^1, мы будем называть F^I. В частности, формулировка F^{Ip} чистого функционального исчисления первого порядка с равенством получается добавлением функциональной константы I и указанных аксиом к исчислению F^{1p}.

Для простого исчисления равенства мы можем начать с формулировки F^1 простого прикладного функционального исчисления первого порядка, единственной функциональной константой которого является I. К нему мы можем добавить аксиому $I(x, x)$ и все те аксиомы, которые задаются указанной выше аксиомной схемой, получая таким образом формулировку Ё простого исчисления равенства. Однако достаточно добавить лишь три следующие аксиомы:

$I(x, x)$. (*Закон рефлексивности равенства.*)

$I(x, y) \supset I(y, x)$. (*Закон коммутативности равенства.*)

$I(x, y) \supset_{\centerdot} I(y, z) \supset I(x, z)$. (*Закон транзитивности равенства.*)

Полученную таким образом формулировку простого исчисления равенства мы называем E.

Мы можем использовать для чистого функционального исчисления первого порядка также формулировку $\mathrm{F}_2^{1\mathrm{p}}$ из § 40. Добавляя к нему функциональную константу I и две аксиомы

$$I(x, x),$$
$$I(x, y) \supset_{\centerdot} F(x) \supset F(y),$$

мы получаем формулировку чистого функционального исчисления первого порядка с равенством, которую будем называть $\mathrm{F}_2^{I\mathrm{p}}$.

Во всех этих исчислениях можно ввести более привычные, чем I, обозначения $=$ и $\neq$ с помощью следующих определений:

D 18. $[\mathbf{a} = \mathbf{b}] \rightarrow I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

D 19. $[\mathbf{a} \neq \mathbf{b}] \rightarrow \sim I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Разумеется, остаются в силе все определения и методы сокращения пп-формул, введенные для функционального исчисления первого порядка в § 30.

Подразумевается, что в главной интерпретации всех этих систем I должно обозначать отношение равенства или тождества между предметами.

Например, в случае чистого функционального исчисления первого порядка после того, как некоторый непустой класс выбран в качестве области индивидов, мы фиксируем главную интерпретацию с помощью тех же семантических правил a — f, что и в § 30, и двух следующих дополнительных правил:

$\mathfrak{g}_1$. Если $\mathbf{a}$ — индивидная переменная, то значением $I(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ для всех значений переменной $\mathbf{a}$ является t.

$\mathfrak{g}_2$. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — различные индивидные переменные, то значением $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ является t, если значение переменной $\mathbf{a}$ совпадает со значением переменной $\mathbf{b}$, и значением $I(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ является f, если значение переменной $\mathbf{a}$ не совпадает со значением переменной $\mathbf{b}$.

Синтаксическое определение общезначимости и выполнимости (§ 43), так же как и метатеорема о том, что всякая теорема общезначима (**434), могут быть очевидным образом распространены на чистое функциональное исчисление с равенством, и мы будем предполагать, в особенности в некоторых следующих дальше упражнениях, что это сделано.

Упражнения к § 48

48.0. В формулировке Е простого исчисления равенства коммутативный и транзитивный законы равенства можно заменить законом Эвклида, который гласит, что „вещи, равные одной и той же вещи, равны между собой", и который следующим образом выражается в обозначениях системы:

$$I(x, z)I(y, z) \supset I(x, y).$$

Таким образом получается формулировка É простого исчисления равенства, в которой вместо трех дополнительных аксиом имеются только две. Покажите, что системы Е и É эквивалентны в том смысле, что их теоремы совпадают.

48.1. Покажите для систем Е и É, что дополнительные аксиомы, содержащие I, независимы.

48.2. Покажите, что две формулировки Ё и Е простого исчисления равенства эквивалентны друг другу в том смысле, что их теоремы совпадают. (В доказательстве можно использовать некоторые соображения из доказательства метатеоремы *340.)

48.3. Покажите, что две формулировки F^{Ip} и F_2^{Ip} чистого функционального исчисления первого порядка с равенством эквивалентны друг другу в том смысле, что их теоремы совпадают. (Можно воспользоваться тем же самым методом, с помощью которого была доказана эквивалентность систем F^{1p} и F_2^{1p}. Однако заметьте, что наличие дополнительных аксиом ставит некоторые новые вопросы в связи с правилом подстановки.)

48.4. Покажите, что для формулировки простого прикладного функционального исчисления первого порядка с равенством, число функциональных констант которого конечно, достаточно конечное число следующих аксиом: законы рефлексивности, коммутативности и транзитивности равенства; для каждой сингулярной константы $\mathfrak{f}$ одна аксиома

$$I(x, y) \supset_{\blacksquare} \mathfrak{f}(x) \supset \mathfrak{f}(y);$$

для каждой бинарной функциональной константы $\mathfrak{f}$ две аксиомы

$$I(x, y) \supset_{\blacksquare} \mathfrak{f}(x, z) \supset \mathfrak{f}(y, z),$$

$$I(x, y) \supset_{\blacksquare} \mathfrak{f}(z, x) \supset \mathfrak{f}(z, y);$$

для каждой тернарной функциональной константы три аналогичных аксиомы; и т. д., пока аксиомы такого рода не будут введены для всех функциональных констант. (Опять исследуйте метод доказательства метатеоремы *340.)

48.5. Используя метод, аналогичный методу предыдущего упражнения, но применяемый не к функциональным константам, а к функциональным переменным, покажите, как для всякой пп-формулы **A** исчисления F^{Ip} найти соответствующую ей пп-формулу **A**′ исчисления F^{1p}, которая общезначима тогда и только тогда, когда общезначима пп-формула **A**, и которая является теоремой исчисления F^{1p} тогда и только тогда, когда **A** является теоремой исчисления F^{Ip}. Тем самым распространите теорему Гёделя о полноте, **440, на чистое функциональное исчисление первого порядка с равенством.

48.6. С помощью того же метода докажите следующее распространение метатеоремы **450 на чистое функциональное исчисление первого порядка с равенством: если пп-формула исчисления F^{Ip} общезначима во всякой непустой области и общезначима в некоторой счетно-бесконечной области, то она общезначима во всякой непустой области.

48.7. Найдите и докажите аналогичные распространения метатеорем **453 и **455 на чистое функциональное исчисление первого порядка с равенством.

48.8. Докажите непротиворечивость исчисления F^{I}, используя, как в § 32, пфпи пп-формул.

48.9. Распространите метатеорему **323 на исчисление F^{I}.

48.10. Распространите метатеорему **325 на исчисление F^{I}.

48.11. Распространите принципы дуальности *372—*374 на исчисление F^{I}. (Пп-формулы исчисления F^{I} следует переписать с помощью D18 и D19 таким образом, чтобы символ I не встречался в них явно. Затем, при дуализации, знаки $=$ и $\neq$ должны взаимно заменяться, так же как и знаки $\supset$ и $\not\subset$, дизъюнкция и конъюнкция, $\equiv$ и $\not\equiv$, $\subset$ и $\not\supset$, $\bar{\vee}$ и $|$, $\forall$ и $\exists$.)

48.12. Используя найденное в упражнении 48.5 сведéние, решите проблему разрешения для случая пп-формул исчисления F^{Ip}, имеющих такую предваренную нормальную форму, в префиксе которой ни один квантор существования не предшествует никакому квантору общности. (Заметьте, что это охватывает, в частности, бескванторные формулы исчисления F^{Ip}.)

48.13. Решите проблему разрешения для бескванторных формул исчисления F^{Ip} непосредственно, используя метод, как можно более сходный с разрешающей процедурой истинностных таблиц, с помощью которой определяется, является ли бескванторная формула исчисления F^{1p} тавтологией. На этой основе дайте новое решение проблемы разрешения для частного случая из 48.12 в форме, как можно более близкой к *460—**463.

48.14. Решите проблему разрешения для сингулярного функционального исчисления первого порядка с равенством, т. е. для класса тех пп-формул исчисления $\mathrm{F}^{I p}$, в которых встречаются только сингулярные функциональные переменные.

Указание. Следуя Бэману, мы можем добавить к шагам сведения (a)—(g) упражнения 39.6 еще следующие шаги. (α) Замена пп-части $(\mathfrak{a})[\mathfrak{a} = \mathfrak{b}]$ на $(\mathfrak{a})(\mathfrak{c})[\mathfrak{a} = \mathfrak{c}]$, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — отличные друг от друга индивидные переменные, а $\mathfrak{c}$ — первая в алфавитном порядке индивидная переменная, отличная от $\mathfrak{a}$ и от $\mathfrak{b}$. (β) Замена пп-части $(\mathfrak{a})[\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}]$ на $(\mathfrak{a})[\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}]$, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — отличные друг от друга индивидные переменные. (γ) Замена пп-части $(\mathfrak{a})\,[\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_1 \supset_\centerdot \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \ldots\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_n \supset \mathfrak{a} = \mathfrak{b}]$ на конъюнкцию $\mathbf{A}_n[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset \mathbf{A}_{n-1}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_3 \supset \mathbf{A}_{n-1}] \ldots [\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \supset \mathbf{A}_{n-1}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_3 \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_4 \supset \mathbf{A}_{n-2}] \ldots [\mathfrak{b}_{n-2} = \mathfrak{b} \supset_\centerdot \mathfrak{b}_{n-1} = \mathfrak{b}_n \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_{n-1} = \mathfrak{b}_n \supset_\centerdot \mathfrak{b}_{n-1} = \mathfrak{b} \supset \mathbf{A}_{n-2}] \ldots [\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_3 \supset_\centerdot \ldots\ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} \supset \mathbf{A}_0]$, если $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}$ — отличные друг от друга индивидные переменные, $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{c}$ — первые в алфавитном порядке $n+1$ индивидных переменных, отличных как друг от друга, так и от переменных $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}$, а $\mathbf{A}_i$ есть

$(\mathfrak{a})(\mathfrak{c}_1)(\mathfrak{c}_2) \ldots (\mathfrak{c}_i)(\mathfrak{c})_\centerdot\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}_1 \supset_\centerdot \mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}_2 \supset_\centerdot \ldots\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}_i \supset_\centerdot \mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c}_2 \supset_\centerdot \mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c}_3 \supset_\centerdot \ldots\ \mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c}_i \supset_\centerdot \mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c} \supset_\centerdot \mathfrak{c}_2 \neq \mathfrak{c}_3 \supset_\centerdot \ldots \ldots\ \mathfrak{c}_i \neq \mathfrak{c} \supset \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$

($i = 0, 1, 2, \ldots, n$). (δ) Замена пп-части $(\mathfrak{a})[\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \supset \mathbf{A}]$ на $(\mathfrak{a})\mathbf{A}$. (ε) Замена пп-части $(\mathfrak{a})[\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \supset \mathbf{A}]$ на

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}\,|,$$

если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — отличные друг от друга индивидные переменные, а $\mathbf{A}$ не содержит кванторов. (ζ) Замена пп-части $(\mathfrak{a})[\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} \supset \mathbf{A}]$ на $(\mathfrak{a})\,[\mathfrak{a} = \mathfrak{a}]$. ($\eta$) Замена пп-части $(\mathfrak{a})\,[\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_1 \supset_\centerdot \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \ldots\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}_n \supset \mathbf{A}]$ на конъюнкцию $\mathbf{A}_n[\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{A}_{n-1}]\,[\mathbf{B}_2 \supset \mathbf{A}_{n-1}] \ldots [\mathbf{B}_n \supset \mathbf{A}_{n-1}]$ $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset \mathbf{A}_{n-1}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_3 \supset \mathbf{A}_{n-1}] \ldots [\mathfrak{b}_{n-1} = \mathfrak{b}_n \supset \mathbf{A}_{n-1}]\,[\mathbf{B}_1 \supset_\centerdot \mathbf{B}_2 \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathbf{B}_1 \supset_\centerdot \mathbf{B}_3 \supset \mathbf{A}_{n-2}] \ldots [\mathbf{B}_{n-1} \supset_\centerdot \mathbf{B}_n \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathbf{B}_3 \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathbf{B}_4 \supset \mathbf{A}_{n-2}] \ldots [\mathfrak{b}_{n-1} = \mathfrak{b}_n \supset_\centerdot \mathbf{B}_{n-2} \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_3 \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 \supset_\centerdot \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_4 \supset \mathbf{A}_{n-2}] \ldots [\mathfrak{b}_{n-3} = \mathfrak{b}_n \supset_\centerdot \mathfrak{b}_{n-2} = \mathfrak{b}_{n-1} \supset \mathbf{A}_{n-2}]\,[\mathfrak{b}_{n-2} = \mathfrak{b}_{n-1} \supset_\centerdot \mathfrak{b}_{n-2} = \mathfrak{b}_n \supset [\mathbf{A}_{n-2}] \ldots [\mathbf{B}_1 \supset_\centerdot \mathbf{B}_2 \supset_\centerdot \ldots\ \mathbf{B}_n \supset \mathbf{A}_0]$, если $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$ — отличные друг от друга индивидные переменные, $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n$ — первые в алфавитном порядке n индивидных переменных, отличных как друг от друга, так и от переменных $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$, если далее **A** не содержит ни кванторов, ни отличных от **a** индивидных переменных, если $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{C}_i$ суть соответственно

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}_i}\mathbf{A}| \quad \text{и} \quad \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}_i}\mathbf{A}|$$

($i = 1, 2, \ldots, n$) и если $\mathbf{A}_i$ есть

$$(\mathbf{a})(\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2)\ldots(\mathbf{c}_i)\,.\,\mathbf{a} \neq \mathbf{c}_1 \supset .\, \mathbf{a} \neq \mathbf{c}_2 \supset . \ldots \mathbf{a} \neq \mathbf{c}_i \supset .\, \mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_2 \supset . \, \mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_3 \supset . \ldots \mathbf{c}_{i-1} \neq \mathbf{c}_i \supset .\, \sim \mathbf{C}_1 \supset .\, \sim \mathbf{C}_2 \supset . \ldots \sim \mathbf{C}_i \supset \mathbf{A}$$

($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) [таким образом, в частности, $\mathbf{A}_0$ есть $(\mathbf{a})\mathbf{A}$].

48.15. Решите проблему разрешения для таких пп-формул **A** исчисления F^{Ip}, у которых в каждой элементарной части, не содержащей I, не более чем одна переменная имеет вхождения, по которым она является связанной переменной пп-формулы **A**.

48.16. (1) Распространяя метод из упражнения 46.8, решите проблему разрешения для пп-формул исчисления F^{Ip}, имеющих предваренную нормальную форму $(\exists\mathbf{b})(\mathbf{c})\,\mathbf{M}$, где **M** — основа, не содержащая никаких индивидных переменных, кроме **b** и **c**. Проиллюстрируйте решение, применив его к следующим частным примерам:

(2) $(\exists x)(y)\,.\,F(x) \supset [F(y) \supset x = y] \supset .\, F(x) \equiv G(y) \supset .\, F(y) \equiv G(x)$

(3) $(\exists x)(y)\,.\,[F(x) \equiv G(x)] \vee [F(y) \equiv G(y) \equiv x = y]$.

48.17. (1) Распространяя метод упражнения 46.11 (2), решите проблему разрешения для пп-формул исчисления F^{Ip}, имеющих предваренную нормальную форму $(\mathbf{a})(\exists\mathbf{b})(\mathbf{c})\,\mathbf{M}$, где **M** — основа, не содержащая никаких индивидных переменных, кроме **a**, **b**, **c**. Проиллюстрируйте решение, применив его к следующим частным примерам:

(2) $(x)(\exists y)(z)\,.\,F(x, x) \supset .\, F(x, z) \supset x = y \vee y = z \supset .$
$F(x, z) \equiv F(x, y) \equiv F(y, y) \supset .\, F(y, y) \equiv F(z, z)$.

(3) $(x)(\exists y)(z)\,.\,F(x)\,. \supset G(x) \supset .\, F(y) \supset [G(y) \supset x = y] \supset .$
$x \neq z \supset .\, G(y) \equiv F(z) \supset .\, F(y) \equiv G(z)$.

(4) $(x)(\exists y)(z)\,.\, x \neq z \vee y \neq z$.

48.18. Примените разрешающую процедуру из упражнения 48.14 к примеру 48.16 (2) и к примеру 48.17 (3).

48.19. (1) Решите проблему разрешения для пп-формул исчисления F^{Ip}, имеющих предваренную нормальную форму $(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)(\exists\mathbf{b})(\mathbf{c})\,\mathbf{M}$, где **M** — основа, не содержащая никаких индивидных переменных, кроме $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, **b**, **c**. Проиллюстрируйте решение, показав с помощью полученной разрешающей процедуры, что следующие пп-формулы являются теоремами исчисления F^{Ip}:

(2) $(x_1)(x_2)(\exists y)(z)\,.\,F(x_1, x_2) \supset .\, F(x_1, z) \equiv F(y, y) \supset .$
$x_1 \neq z \vee x_2 \neq z \supset [F(x_1, z) \supset F(x_1, y)] \supset .$
$F(x_1, y) \vee F(x_1, z) \supset F(x_2, x_2).$

(3) $(x_1)(x_2)(\exists y)(z)\,.\,F(x_1) \supset .\, F(x_2) \supset .\, G(x_1) \supset .\, G(x_2) \supset .$
$x_1 \neq y \supset [F(z) \supset G(z)] \supset .\, H(x_1) \supset H(x_2) \supset [G(y) \supset F(y)] \supset .$
$G(y) \equiv F(z) \supset .\, F(y) \equiv G(z).$

48.20. Примените разрешающую процедуру из упражнения 48.15 к примеру 48.19 (2).

48.21. (1) Сформулируйте и решите частный случай проблемы разрешения исчисления F^{Ip}, аналогичный случаю V′ проблемы разрешения исчисления F^{1p}. (Ср. 46.15.) (2) Проиллюстрируйте решение, применив его к следующему конкретному примеру:

$$(\exists x)(\exists y)(z)\,.\sim F(x, x) \vee F(x, z) \vee F(y, z)$$
$$\vee\, [x = z \equiv .\, F(x, x) \equiv F(z, z)] \vee .\, y = z \equiv .\, F(y, y) \equiv F(z, z).$$

48.22. Докажите следующую метатеорему. Пусть Γ есть (конечный или бесконечный) класс пп-формул исчисления F^{Ip}. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$ — полный перечень свободных индивидных переменных, встречающихся в пп-формулах из Γ. Пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots$ — полный перечень встречающихся пропозициональных переменных, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \ldots$ — полный перечень встречающихся функциональных переменных (разумеется, некоторые или даже все эти перечни могут быть бесконечны), и предположим, что $\mathbf{f}_i$ есть h_i-арная функциональная переменная ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Предположим, далее, что класс Γ совместно выполнен в области положительных целых чисел системой значений $v_1, v_2, v_3, \ldots, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \ldots$. Тогда в области целых чисел (т. е. положительных целых, отрицательных целых и 0) существуют такие пропозициональные функции $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$, что Ψ_i является h_i-арной пропозициональной функцией целых чисел ($i = 1, 2, 3, \ldots$), для произвольных положительных целых чисел $u_1, u_2, \ldots, u_{h_i}$ истинностное значение $\Psi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{h_i})$ совпадает с истинностным значением $\Phi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{h_i})$ и класс Γ совместно выполнен в области целых чисел системой значений $v_1, v_2, v_3, \ldots, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$, переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \ldots$[451].

Указание. Без потери общности мы можем предположить, что переменными $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$, если таковые вообще имеются, являются переменные $z_1, z_2, z_3, \ldots$. Добавим к классу Γ все пп-формулы $x_j \neq x_k$, в которых j и k — отличные друг от друга положительные целые числа, все пп-формулы

$$\mathbf{f}_i(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_{h_i}}),$$

для которых $\Phi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{h_i})$ есть истина, а также все пп-формулы

$$\sim \mathfrak{f}_i(x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots, x_{u_{h_i}}),$$

для которых $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{h_i})$ есть ложь. Обозначим полученный таким способом класс пп-формул через Γ', и пусть класс Γ'' получается из класса Γ' присоединением всех пп-формул $y_j \neq x_k$, где j и k — произвольные положительные целые числа, и всех пп-формул $y_j \neq y_k$, где j и k — отличные друг от друга положительные целые числа. Покажите, что класс Γ' непротиворечив, и отсюда — что непротиворечив каждый конечный подкласс класса Γ''. Затем покажите с помощью результата из упражнения 48.7, что Γ'' совместно выполним в счетно-бесконечной области $\mathfrak{J}$. Индивиды области $\mathfrak{J}$, которые служат значениями для $x_1, x_2, x_3, \ldots$, могут быть отождествлены с положительными целыми числами 1, 2, 3, ... соответственно. Помимо них, область $\mathfrak{J}$ необходимо содержит еще бесконечно много других индивидов, которые могут быть произвольным образом отождествлены с неположительными целыми числами 0, —1, —2, ...

48.23. Докажите следующую метатеорему как следствие предыдущей. Пусть Γ — (конечный или бесконечный) класс пп-формул исчисления F^{1p}, и пусть одной из функциональных переменных, встречающихся в пп-формулах из Γ, является бинарная функциональная переменная $\mathfrak{s}$. Предположим, что класс Γ совместно выполним в области положительных целых чисел таким образом, чтобы значением переменной $\mathfrak{s}$ было *отношение непосредственного следования*, т. е. такое отношение σ, что $\sigma(u, v)$ есть истина тогда и только тогда, когда $u + 1 = v$. Тогда класс Γ таким образом совместно выполним в некоторой счетно-бесконечной области $\mathfrak{J}$, с Φ в качестве значения переменной $\mathfrak{s}$, что не существует взаимно однозначного отображения области $\mathfrak{J}$ в положительные целые числа, при котором отношение Φ переходило бы в отношение σ [452].

48.24. Докажите, что если класс пп-формул исчисления F^{1p} совместно выполним в какой-либо конечной области, но не является совместно выполнимым в некоторой счетно-бесконечной области, то существует наибольшая конечная область, в которой этот класс совместно выполним.

49. Исторический очерк. То основное, что отличает функциональное исчисление первого порядка (а также и более высоких порядков) от пропозиционального исчисления, а именно понятие пропозициональной функции и употребление кванторов, было введено Фреге в его *Begriffsschrift* 1879 г.

Несколько позднее и независимо кванторы были введены Пирсом [453], который приписывает эту идею Митчеллу. Еще позднее кванторы появляются в работах Шрёдера, Пеано, Рассела и других. Термины „квантор" ⟨quantifier⟩ и „квантификация" ⟨quantification⟩ принадлежат Пирсу. Обозначения, используемые нами для кванторов, — это видоизмененные Расселом обозначения Пеано.

Отделение функционального исчисления первого порядка от функциональных исчислений более высоких порядков неявно содержится в теории типов Рассела [451)], а возможно, даже ранее, во введенной Фреге иерархии для „Stufen" или во введенной Шрёдером иерархии для „reine Mannigfaltigkeiten". Рассмотрение Лёвенгеймом [455)] и затем Сколемом [456)] так называемых „Zählausdrücke" и „Zahlgleichungen" в связи с исчислением Шрёдера является по существу изучением функционального исчисления первого порядка с равенством. Сингулярные функциональные исчисления первого и второго порядков, с равенством и без него, рассматривались также Бэманом [457)]. Однако впервые явная формулировка функционального исчисления первого порядка как независимой логистической системы встречается, по-видимому, в первом издании *Grundzüge der Theoretischen Logik* (1928) Гильберта и Аккермана.

Для функционального исчисления первого порядка и функционального исчисления второго порядка (см. главу V) Гильберт и Аккерман использовали в своем первом издании названия „engerer Funktionenkalkül" и „erweiterter Funktionenkalkül" соответственно. В своем втором издании они, следуя отчасти Гильберту и Бернайсу, заменили эти названия на „engerer Prädikatenkalkül" и „Prädikatenkalkül der zweiten Stufe". В основе этой замены лежит появляющееся уже в первом издании книги Гильберта и Аккермана слово „Prädikat" (предикат) [458)], употребления которого мы, однако, хотим избежать. В этой книге мы взяли термин „функциональное исчисление" из первого издания Гильберта и Аккермана, но заимствовали нумерацию порядков из второго издания (где они употребляют „Prädikatenkalkül der ersten Stufe" в качестве синонима для „engerer Pradikatenkalkül").

Аксиомы и правила вывода системы F^1 совпадают в основном с теми, которые даны Расселом в его статье 1908 г. [454)]; они лишь несколько модифицированы, и аксиомы пропозиционального исчисления Рассела заменены аксиомами Лукасевича. Рассел, однако, не уточняет достаточным образом, формулирует ли он отдельные аксиомы или же аксиомные схемы. Эта неясность может быть разрешена в пользу аксиомных схем, как в F^1. Более поздние формулировки Рассела способствуют как будто в общем и целом истолкованию в качестве отдельных аксиом, но тогда его правила вывода должны быть усилены добавлением правил подстановки, как в F^{1p}_2.

Особые затруднения связаны с вопросом о корректной формулировке правила подстановки вместо функциональных переменных.

Неудовлетворительная формулировка этого правила появляется в первом издании книги Гильберта и Аккермана (1928). Более удачные формулировки этого правила имеются в *Logische Syntax der Sprache* Карнапа и в *A System of Logistic* Куйана (1934), но ни одна из них не является вполне корректной. В первом томе *Grundlagen der Mathematik* Гильберта и Бернайса (1934) отмечена ошибка Гильберта и Аккермана [459] и впервые дана корректная формулировка правила подстановки вместо функциональной переменной. Однако это правило не могло быть использовано в настоящей книге в той форме, в которой оно дано у Гильберта и Бернайса, так как его корректность связана у них со специальными свойствами правила построения (соответствующего нашему правилу 30v), согласно которому $(\forall \mathbf{a})\mathbf{B}$ не является правильно построенной формулой, если $\mathbf{B}$ содержит $\mathbf{a}$ в качестве связанной переменной [460]. Наша же формулировка этого правила является, скорее, комбинацией версий Карнапа и Куайна [461].

Изложенное в § 32 доказательство непротиворечивости системы F^1, которое зависит от **320, взято из первого издания Гильберта и Аккермана (1928). Оно дано в такой форме, которая делает несомненным его чисто синтаксический (а не семантический) характер. Однако его можно также излагать в связи с замечанием, что аксиомы общезначимы в области, состоящей из одного-единственного индивида, и что правила вывода сохраняют это свойство. Становится совершенно очевидным, как в такой форме метод может быть распространен для доказательства непротиворечивости функциональных исчислений более высоких порядков, в частности функционального исчисления порядка ω. Это — доказательство Эрбрана непротиворечивости функционального исчисления первого и более высоких порядков [462]; оно остается в силе и в случае добавления аксиом выбора или мультипликативных аксиом ⟨multiplicative axioms⟩ (как замечает Эрбран), и если добавлены также аксиомы объемности, но, разумеется, не в случае добавления каких-нибудь аксиом бесконечности [463].

В первом издании Гильберта и Аккермана отмечается, что функциональное исчисление первого порядка (в формулировке хотя и несколько отличной от F^1 и F^{1p}_2, но, как, легко заметить, эквивалентной им) не является полным в отношении преобразования $\mathbf{A}$ в $\sim\mathbf{A}$, и вопрос о полноте в более слабом смысле метатеоремы **440 поставлен в качестве нерешенной проблемы. Гёделю принадлежит воспроизведенное в § 44 первое доказательство полноты во втором смысле [464]. Другое доказательство полноты функционального исчисления первого порядка, приведенное в § 45, принадлежит Леону Хенкину [465] (см. дальше § 54).

Гёдель [466] первый занимался рассмотрением независимости аксиом чистого функционального исчисления первого порядка в такой формулировке, которая ближе к формулировке Рассела [454], нежели наши F^{1p} и F_2^{1p}. В действительности Гёдель добавляет также аксиомы $x = x$ и $x = y \supset . F(x) \supset F(y)$ и устанавливает независимость аксиом получающейся таким образом формулировки чистого функционального исчисления первого порядка с равенством. Он не доказывает независимости правил вывода, а ограничивается утверждением, что это легко может быть сделано.

Для гильберт-аккермановской формулировки чистого функционального исчисления первого порядка независимость как аксиом, так и правил вывода была рассмотрена Мак-Кинси [467]. Однако Мак-Кинси понимал независимость правила вывода в более слабом, чем у нас, смысле, и его доказательства не во всех случаях достаточны для доказательства независимости правил вывода Гильберта и Аккермана в более сильном смысле [468]. Второе издание Гильберта и Аккермана (1938) содержит такое приписываемое Бернайсу доказательство независимости их аксиом и правил, в котором этот недостаток преодолен.

Результаты § 34 приведены в первом издании Гильберта и Аккермана (1928) в форме, которая отличается от нашей только деталями. См. также обсуждение вопроса об „истинностных функциях" и „формальной эквивалентности" во введении ко второму тому *Principia Mathematica* (1910).

Предваренную нормальную форму впервые использовал Пирс, хотя и в других обозначениях и терминологии [46]. Пирс называет термином „Boolian" ⟨булиан⟩ то, что мы, следуя *Principia Mathematica*, называем „matrix" ⟨основой⟩, а префикс называет „Quantifier" или „quantifiers". Существо разъясненного в § 39 процесса сведения к предваренной нормальной форме содержится в первом томе *Principia Mathematica* [470], хотя он и несколько затемнен там своеобразной доктриной, согласно которой (по сути дела) только формулы в предваренной нормальной форме должны считаться правильно построенными, другие же формулы, которые мы также хотели бы рассматривать как правильно построенные, истолковываются с помощью определений сокращения просто как стоящие вместо своих предваренных нормальных форм. Из этого источника заимствован процесс сведения, появляющийся в уже упомянутой статье Бэмана 1922 г. и позднее в статье Лэнгфорда [471].

Происхождение функционального исчисления первого порядка с равенством установить трудно. В некотором смысле оно подразумевается уже у Пирса и Шрёдера. Особенно хорошо изложен этот вопрос в первом томе книги Гильберта и Бернайса, где имеется также много такого, чего мы здесь не касались. Из этого источника мы взяли, в частности, результаты, указанные в упражнениях 48.0 и 48.4. Идея сведения, указанного в упражнении 48.5, принадлежит Кальмару [472] и Гёделю [473], а результат этого упражнения принадлежит Гёделю [473]. Простое исчисление равенства подробно исследовалось Генрихом Шольцом [474].

Начало исследованиям последних трех-четырех десятилетий, относящимся к вопросам общезначимости и выполнимости, проблемам разрешения и связанным с этими темами, положено, по-видимому, статьей Лёвенгейма 1915 г. [475]. Она содержит следующие результаты, касающиеся функционального исчисления первого порядка с равенством: решение проблемы разрешения для общезначимости в случае, когда встречаются только сингулярные функциональные переменные; сведéние общего случая проблемы разрешения для общезначимости к случаю, когда встречаются только бинарные функциональные переменные; обнаружение существования таких пп-формул, которые общезначимы во всякой конечной области, но не общезначимы в бесконечной области, и доказательство того, что этим свойством не может обладать никакая пп-формула, содержащая только сингулярные функциональные переменные; наконец, доказательство метатеоремы, известной в настоящее время под названием теоремы Лёвенгейма, т. е. **450, и сформулированного в упражнении 48.6 обобщения этой метатеоремы.

За проложившей путь работой Лёвенгейма последовали исследования Сколема, опубликованные в двух его статьях 1919 и 1920 гг. [476]. Первая из этих статей содержит в действительности решение проблемы разрешения для общезначимости в сингулярном функциональном исчислении второго порядка и в то же время дает улучшенное решение для сингулярного функционального исчисления первого порядка с равенством. В статье 1920 г. вводится сколемовская нормальная форма для выполнимости, которая используется для получения более простого доказательства теоремы Лёвенгейма. В этой статье принимается точка зрения выполнимости, а не общезначимости (как у Лёвенгейма), и поэтому теорема Лёвенгейма дается в форме метатеоремы **451 и распространения **451 на F^I. Здесь впервые доказывается также обобщение Сколема теоремы Лёвенгейма, **455.

Статья Бэмана 1922 г. [477] содержит результаты упражнения 39.6 и решения проблемы разрешения для общезначимости в сингулярном функциональном исчислении первого порядка, в сингулярном функциональном исчислении первого порядка с равенством и сингулярном функциональном исчислении второго порядка. Метод Бэмана для сингулярного функционального исчисления первого порядка воспроизведен в § 46 с некоторыми принадлежащими Куайну [478] изменениями, а для сингулярного функционального исчисления с равенством метод Бэмана кратко намечен в упражнении 48.14. Этот последний метод в некоторых существенных своих чертах сходен с методом Сколема, но найден Бэманом, как будто, независимо.

Сведение пп-формулы **A** сингулярного функционального исчисления первого порядка к виду **B**, описанному в упражнении 46.1 (1), принадлежит по существу Эрбрану [479], а получающееся в результате решение проблемы разрешения в сингулярном функциональном исчислении первого порядка, приведенное в 46.1 (2), — Куайну [480].

Первое исследование проблемы разрешения для таких случаев, когда могут встречаться функциональные переменные, отличные от сингулярных, дано в статье П. Бернайса и М. Шейнфинкеля в 1928 г. [481] В этой статье содержится решение случая I проблемы разрешения в функциональном исчислении первого порядка, которое (за исключением лишь того, что рассматривается только проблема разрешения для общезначимости) совпадает по существу с приведенным в § 46. Статья содержит также решение случая VI_0^1 проблемы разрешения для общезначимости, и воспроизведенное в **466 решение случая III (сингулярное функциональное исчисление первого порядка) вместе с его доказательством.

Последующая история исследований проблемы разрешения отчасти уже описана в §§ 46 и 47, включая упражнения и примечания, относящиеся к этим параграфам. Остается только отметить статью Рамсея [482], в которой рассматривается частный случай проблемы разрешения в чистом функциональном исчислении первого порядка с равенством, решение которого указано в упражнениях 48.12, 48.13. (Однако метод, предлагаемый в этих двух упражнениях, значительно проще метода Рамсея.)

В статье 1929 г. [483] Сколем дал новое доказательство своего обобщения теоремы Лёвенгейма, освободив результат от зависимости от аксиомы выбора [484] и избегая в то же время сколемовской нормальной формы.

Метатеорема **453 принадлежит Гёделю [485], так же как и распространение ее на чистое функциональное исчисление первого порядка с равенством (48.7). Доказательство метатеоремы **453, приведенное в § 45, принадлежит Хенкину, так же как и основанное на этом доказательство обобщения Сколема теоремы Лёвен гейма (**455) [486] и замечание из упражнения 45.4.

ГЛАВА V

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Функциональное исчисление второго порядка, или *простое функциональное исчисление второго порядка*, как мы будем его еще называть (чтобы отличать от разветвленных функциональных исчислений второго порядка, описанных ниже в § 58), имеет в дополнение к обозначениям функционального исчисления первого порядка еще кванторы, операторными переменными которых являются пропозициональные или функциональные переменные. Как и в случае функционального исчисления первого порядка, имеется целый ряд различных систем (простых) функциональных исчислений второго порядка, которые мы будем рассматривать одновременно. Частную формулировку, которая будет рассматриваться в настоящей главе, мы будем называть F^2_2, указывая нижним индексом на содержащуюся в ней частную формулировку пропозиционального исчисления). Или, если нужно будет различать между собой различные функциональные исчисления второго порядка, то F^{2p}_2 есть формулировка чистого функционального исчисления второго порядка, рассматриваемая в настоящей главе, $\mathrm{F}^{2,1}_2$ — сингулярное функциональное исчисление второго порядка, $\mathrm{F}^{2,2}_2$ — бинарное функциональное исчисление второго порядка и т. д.

50. Исходный базис исчисления F^2_2. Исходные символы исчисления F^2_2 совпадают с исходными символами исчисления F^1 или F^1_2 (см. § 30). В число исходных символов *чистого функционального исчисления второго порядка* F^{2p}_2 входят все индивидные, пропозициональные и функциональные переменные, но не входят никакие (индивидные или функциональные) константы. *n-арное функциональное исчисление второго порядка* $\mathrm{F}^{2,n}_2$ содержит все индивидные и пропозициональные переменные, все не более чем n-арные функциональные переменные, но не содержит никаких констант. Всякое *прикладное функциональное исчисление второго порядка* содержит по крайней мере одну константу наряду со всеми индивидными переменными и по крайней мере одним родом функциональных переменных.

Для того чтобы система могла вообще считаться функциональным исчислением второго порядка, разумеется, необходимо, чтобы среди ее исходных символов имелись функциональные переменные хотя бы одного рода. Мы ограничимся рассмотрением того случая, когда имеются как пропозициональные, так и (по меньшей мере) сингулярные функциональные переменные, и, в частности, мы используем в аксиомах переменные обоих этих родов. Это, однако, не существенно, и модификации, необходимые для того, чтобы охватить другие случаи, предоставляются читателю.

Правила построения исчисления F^2_2 совпадают с правилами построения исчисления F^1, с тем лишь изменением, что в пятом правиле мы не ограничиваемся индивидными переменными:

50i. Отдельно взятая пропозициональная переменная есть ппф.

50ii. Если $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная или функциональная константа и если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — индивидные переменные, или индивидные константы, или и то и другое (не обязательно все различные), то $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ есть ппф.

50iii. Если $\mathbf{\Gamma}$ есть ппф, то и $\sim \mathbf{\Gamma}$ есть ппф.

50iv. Если $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Delta}$ суть ппф, то и $[\mathbf{\Gamma} \supset \mathbf{\Delta}]$ есть ппф.

50v. Если $\mathbf{\Gamma}$ есть ппф и если $\mathbf{a}$ — произвольная переменная, то и $(\forall \mathbf{a}) \mathbf{\Gamma}$ есть ппф.

Как и в случае F^1, из всего этого следует существование эффективного метода проверки правильности построения, а также единственность представления всякой пп-формулы в одном из видов $\sim \mathbf{A}$, $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$, $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$ и, наконец, аналоги метатеорем **313—**316. С тем же, что и в F^1, содержанием вводятся термины *антецедент*, *консеквент*, *главный знак импликации*, *конверсия*, *элементарная часть*.

Таким же образом, как и в § 30, вводится различие между *связанными переменными* и *свободными переменными*. Но в функциональном исчислении второго порядка связанные вхождения могут иметь не только индивидные, но и пропозициональные и функциональные переменные.

Пп-формула будет называться *n-арной формой*, если она имеет точно n различных свободных переменных; если же свободных переменных она не имеет, то она будет называться *константой* или *замкнутой* пп-формулой. Как и в F^1, все формы суть *пропозициональные формы* и все замкнутые пп-формулы суть *предложения*.

Используются те же самые, что и для F^1, методы сокращения пп-формул, в том числе то же самое соглашение об опускании скобок и определения-схемы D3—17. Схемы D13—17 следует понимать таким образом, что переменные $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ могут быть любого рода — как пропозициональными или функциональными, так и индивидными. Время от времени можно вводить по мере надобности новые определения и определения-схемы. В частности, мы сразу введем два следующих определения:

D 20. $f \rightarrow (s)\, s$.

D 21. $t \rightarrow (\exists s)\, s$.

Правилами вывода, аксиомными схемами и аксиомами исчисления F_2^2 являются следующие:

*500. Из $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$. (*Правило модус поненс.*)

*501. Если $\mathfrak{a}$ есть некоторая переменная, то из $\mathbf{A}$ следует $(\mathfrak{a})\mathbf{A}$. (*Правило обобщения.*)

*502. Если $\mathfrak{a}$ есть индивидная переменная, не являющаяся в $\mathbf{N}$ свободной, а $\mathfrak{b}$ есть индивидная переменная, не входящая в $\mathbf{N}$, и если $\mathbf{B}$ получается из $\mathbf{A}$ подстановкой формулы $\mathrm{S}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}\mathbf{N}|$ вместо некоторого частного вхождения формулы $\mathbf{N}$ в формулу $\mathbf{A}$, то из $\mathbf{A}$ следует $\mathbf{B}$. (*Правило алфавитной замены связанной индивидной переменной.*)

*503. Если $\mathfrak{a}$ есть индивидная переменная, если $\mathfrak{b}$ есть индивидная переменная или индивидная константа и если никакое свободное вхождение переменной $\mathfrak{a}$ в $\mathbf{A}$ не находится в такой пп-части формулы $\mathbf{A}$, которая имеет вид $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$, то из $\mathbf{A}$ следует $\mathrm{S}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}\mathbf{A}|$ [500].
(*Правило подстановки вместо индивидных переменных.*)

†505. $p \supset .\, q \supset p$.

†506. $s \supset [p \supset q] \supset .\, s \supset p \supset .\, s \supset q$.

†507. $\sim p \supset \sim q \supset .\, q \supset p$.

†508. $p \supset_x F(x) \supset .\, p \supset (x)F(x)$.

*508_0. $\mathbf{A} \supset_{\mathfrak{p}} \mathbf{B} \supset .\, \mathbf{A} \supset (\mathfrak{p})\,\mathbf{B}$, где $\mathfrak{p}$ — любая пропозициональная переменная, не являющаяся свободной переменной в $\mathbf{A}$.

*508_n. $\mathbf{A} \supset_{\mathfrak{f}} \mathbf{B} \supset .\, \mathbf{A} \supset (\mathfrak{f})\,\mathbf{B}$, где $\mathfrak{f}$ есть n-арная функциональная переменная, не являющаяся свободной переменной в $\mathbf{A}$.

†509. $(x)\, F(x) \supset F(y)$.

*509_0. $(\mathfrak{p})\mathbf{A} \supset \check{\mathrm{S}}_{\mathbf{B}}^{\mathfrak{p}}\mathbf{A}|$, где $\mathfrak{p}$ есть произвольная пропозициональная переменная [500].

*509_n. $(\mathfrak{f})\mathbf{A} \supset \check{\mathrm{S}}_{\mathbf{B}}^{\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)}\mathbf{A}|$, где $\mathfrak{f}$ есть n-арная функциональная переменная, а $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ — отличные друг от друга индивидные переменные [500].

Как и в случае исчисления F^{1p} (или F_2^{1p}), главная интерпретация исчисления F_2^{2p} зависит от области индивидов, которая не должна быть пустой. После того, как область индивидов выбрана, главная интерпретация задается теми же семантическими правилами a—f, что и в § 30, с той лишь разницей, что теперь в правиле f мы не считаем переменную **a** обязательно индивидной переменной. То есть правило f заменяется следующим правилом:

f^2. Пусть **a** — произвольная переменная, и пусть **A** — некоторая пп-формула. Значением формулы $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$ для данной системы значений ее свободных переменных является t, если (для той же системы значений свободных переменных) t является значением формулы **A** при всяком значении переменной **a**; и значением формулы $(\forall \mathbf{a})\mathbf{A}$ является f, если (для той же системы значений свободных переменных) формула **A** принимает значение f при хотя бы одном значении переменной **a**.

51. Пропозициональное исчисление и законы кванторов. Теорема дедукции. Из *509 (при помощи *501 и *500) правило подстановки вместо пропозициональных и функциональных переменных получается в качестве производного правила исчисления F^2_2:

*510_0. Если **p** есть пропозициональная переменная и если $\vdash \mathbf{A}$, то

$$\vdash \check{S}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{B}} \mathbf{A}\,|.$$

*510_n. Если **f** есть n-арная функциональная переменная, а $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — отличные друг от друга индивидные переменные и если $\vdash \mathbf{A}$, то

$$\vdash \check{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)}_{\mathbf{B}} \mathbf{A}\,|.$$

Теперь мы можем при помощи *502, *503 и *510 получить из †505—†508, †509 все аксиомные схемы (*302—*306) исчисления F^1 в качестве теоремных схем исчисления F^2_2. Так как в *500 и *501 содержатся оба правила вывода исчисления F^1 (т. е. *300 и *301), то из полученного следует, что каждая теорема исчисления F^1 является теоремой исчисления F^2_2; при этом подразумевается, что мы берем такие исчисления F^1 и F^2_2, которые содержат один и тот же список исходных символов. Аналогично употреблению этого термина в § 31, мы будем под *подстановковым частным случаем* пп-формулы **A** из F^1 понимать всякую такую пп-формулу **B** из рассматриваемой логистической системы (в настоящей главе — системы F^2_2), которая получена из **A** с помощью конечной последовательности подстановок согласно *503, *510_0 и *510_n. Тогда получаем:

*511. Всякий подстановковый частный случай теоремы исчисления F^1 является теоремой исчисления F^2_2.

Метатеорема *511 играет в качестве производного правила для F^2_2 роль, аналогичную той, которую играет *311 в качестве производного правила для F^1. Используя *511 таким образом, мы можем, ссылаясь на это правило, говорить „в силу F^1" или „в силу P" (в тех случаях, когда используется одно только пропозициональное исчисление) или же просто ссылаться на номер одной из теоремных схем исчисления F^1, рассматривая ее как теоремную схему исчисления F^2_2.

Можно также доказать в качестве теоремных схем исчисления F^2_2 аналоги теоремных схем из § 33, в которых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ могут быть переменными любого рода, а не только индивидными переменными. (В аналогах метатеорем *330 и *339 $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ должны быть переменными одного и того же рода; это не относится к метатеореме *336.) Доказательства очень близки к тем, которые даны в § 33, и предоставляются читателю.

Следующий аналог метатеоремы *340 также может быть доказан в качестве теоремной схемы исчисления F^2_2 (доказательство очень близко к тому, которое дано в § 34, и использует в случае 3 вместо метатеоремы *334 ее аналог):

*512. Если **B** получается из **A** подстановкой формулы **N** вместо нуля или большего числа вхождений формулы **M** в формулу **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**) и если среди переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ содержатся во всяком случае те свободные переменные формул **M** и **N**, которые в то же время входят в **A** в качестве связанных переменных, то $\vdash \mathbf{M} \equiv_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n} \mathbf{N} \supset . \mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Следовательно, как и в § 34, мы получаем в качестве производного правила правило подстановочности эквивалентности:

* 513. Пусть **B** получается из **A** подстановкой формулы **N** вместо нуля или большего числа вхождений формулы **M** в формулу **A** (не обязательно вместо всех вхождений **M** в **A**); тогда если $\vdash \mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$ и $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B}$.

Следующая теоремная схема также является следствием из * 512:

*514. $\vdash \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{t}\mathbf{A}| \supset . \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{f}\mathbf{A}| \supset (\mathbf{p})\mathbf{A}$, где $\mathbf{p}$ — пропозициональная переменная, не являющаяся связанной в **A**.

Доказательство.

В силу *509_0, $\vdash (s) \sim s \supset \sim . q \supset q$.

Следовательно, в силу P, $\vdash \sim (s) \sim s$.

Т. е. (ср. D21), $\vdash t$.

Далее, в силу *509_0, $\vdash f \supset \mathbf{p}$.

В силу *512, $\vdash \mathbf{p} \equiv t \supset . \mathbf{A} \equiv \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{t}\mathbf{A}|$.

И снова в силу *512, $\vdash \mathbf{p} \equiv f \supset . \mathbf{A} \equiv \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{f}\mathbf{A}|$.

Следовательно (используя четыре последних строки), имеем, в силу P,

$$\vdash \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{t}\mathbf{A} | \supset . \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{f}\mathbf{A} | \supset \mathbf{A}.$$

Следовательно, в силу *501, $\vdash (\mathbf{p}) . \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{t}\mathbf{A} | \supset . \mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{f}\mathbf{A} | \supset \mathbf{A}$.

Теперь используем *508_0 и P.

Теперь правило алфавитной замены связанных пропозициональных и функциональных переменных может быть доказано совершенно аналогично тому, как в § 35 была доказана метатеорема *350, с использованием, однако, аналога метатеоремы *339 и использованием метатеоремы *513 вместо *342:

*515. Пусть **a** есть пропозициональная или функциональная переменная, не являющаяся свободной в формуле **N**, а **b** — переменная того же рода, что и **a**, не входящая в **N**; пусть, далее, **B** получается из **A** подстановкой формулы $S_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}\mathbf{N}|$ вместо некоторого частного вхождения формулы **N** в **A**; тогда если $\vdash \mathbf{A}$, то $\vdash \mathbf{B}$.

Определение *доказательства из гипотез* для исчисления F_2^2 очень близко к тому, которое было дано в § 36 для F^1. Изменения состоят в том, что аксиомы исчисления F^1 заменяются всеми вариантами аксиом исчисления F_2^2, правило *300 заменяется на *500, *301 — на *501, *350 — на *502 и *515, *351 — на *503 и *352 — на *510. После этого, так же как и в § 36, можно доказать теорему дедукции:

*516. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1} \vdash \mathbf{A}_n \supset \mathbf{B}$.

Так же мы можем доказать аналог метатеоремы *362:

*517. Если каждая пп-формула, которая хотя бы один раз встречается среди формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, встречается также хотя бы один раз среди $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ и если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$, то $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r \vdash \mathbf{B}$.

Доказав вначале аналоги теоремных схем *364 и *365, мы можем затем доказать следующее производное правило, облегчающее использование кванторов существования в связи с теоремой дедукции:

*518. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ и **a** является какой-либо переменной, не входящей в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}, \mathbf{B}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}, (\exists \mathbf{a})\,_{\blacksquare}\,\mathbf{A}_{n-r+1}\mathbf{A}_{n-r+2}\ldots \ldots \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

*519. Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}$ и **a** является какой-либо переменной, не входящей в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}$, то $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-r}, (\exists \mathbf{a})\,_{\blacksquare}\,\mathbf{A}_{n-r+1}\mathbf{A}_{n-r+2}\ldots \ldots \mathbf{A}_n \vdash (\exists \mathbf{a})\mathbf{B}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Рассмотрение дуальности проводится для исчисления F_2^2 совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 37, и может быть предоставлено читателю. Определение дуала остается слово в слово тем же, что и раньше [501], так же как и формулировки трех принципов дуальности, которые соответствуют метатеоремам *372—

*374 и которые, как можно показать, остаются в силе и для исчисления F_2^2.

Наконец, можно доказать, аналоги теоремных схем из §§ 37—38, в которых **a** и **b** могут быть переменными произвольного рода, и, следовательно, на исчисление F_2^2 можно распространить также и сведение к предваренной нормальной форме (§ 39).

Следует отметить, что в противоположность сказанному в примечании 341 о *352 все производные правила этого параграфа, в том числе и *510 и *515, были получены таким путем, из которого видно, что они остаются в силе для всякой системы, получающейся из F_2^2 добавлением каких-нибудь дальнейших аксиом.

52. Равенство.

В § 48 мы видели, как функциональное исчисление первого порядка может быть расширено путем добавления функциональной константы *I*, которая должна обозначать отношение равенства или тождественности индивидов, а также подходящих аксиом, содержащих *I*. Мы могли бы, конечно, проделать то же самое с функциональным исчислением второго порядка и получить таким образом функциональное исчисление второго порядка с равенством. Это, однако, излишне, так как имеется возможность ввести отношение равенства в исчислении $F_2^{\frac{1}{2}}$ с помощью определения. Иными словами, в исчислении $F_2^{\frac{1}{2}}$ можно найти такую пп-формулу, единственными свободными переменными которой являются индивидные переменные **a** и **b** и которая (во всякой главной интерпретации исчисления $F_{\bar{2}}$) принимает значение t или f в соответствии с тем, имеют ли переменные **a** и **b** одно и то же значение или нет. Одной из таких пп-формул исчисления F_2^2 является определяющее в схеме D22 ниже, и поэтому обозначение „$=$" может быть введено с помощью определения сокращения D22[502].

В функциональных исчислениях четвертого и более высоких порядков мы сумеем с помощью совершенно аналогичного определения ввести отношение равенства не только между индивидами, но и между другими вещами, допуская в качестве **a** и **b**, например, пропозициональные или функциональные переменные (одного и того же типа).

Мы присоединяем теперь два следующих определения-схемы, в которых **a** есть индивидная переменная или индивидная константа и **b** есть индивидная переменная или индивидная константа, и затем переходим к целому ряду теорем и производных правил, в формулировке которых используются эти определения:

D22. $[\mathbf{a} = \mathbf{b}] \rightarrow F(\mathbf{a}) \supset_F F(\mathbf{b})$.

D23. $[\mathbf{a} \neq \mathbf{b}] \rightarrow (\exists F) \,.\, F(\mathbf{a}) \not\subset F(\mathbf{b})$.

†520. $x = x$. (*Закон рефлексивности равенства.*)

Доказательство. В силу P, $\vdash F(x) \supset F(x)$. Обобщаем по F (*501).

†521. $x = y \supset . \, y = x$. (*Закон коммутативности равенства.*)

Доказательство. В силу *509$_1$, $\vdash x = y \supset \check{S}_{y=x}^{F(y)} F(x) \supset F(y)|$. Следовательно, по *модус поненс* (*500), $x = y \vdash x = x \supset . \, y = x$.

Следовательно, по †520 и *модус понентс*, $x = y \vdash y = x$. Теперь, применяем теорему дедукции.

†522. $x = y \supset_{\blacksquare} y = z \supset_{\blacksquare} x = z$.

(*Закон транзитивности равенства.*)

Доказательство. По †521, $x = y \vdash y = x$.
Следовательно, по $*509_1$, $x = y \vdash \check{S}_{y-z}^{F(y)} F(y) \supset F(x)|$.
Теперь применяем теорему дедукции.

†523. $x = y \equiv_{\blacksquare} y = x$.

(*Полный закон коммутативности равенства.*)

Доказательство. В силу †521, *503 и P.

†524. $x = y \supset_{\blacksquare} F(x) \equiv F(y)$.

Доказательство. В силу $*509_1$, $x = y \vdash F(x) \supset F(y)$.
По †521 и $*509_1$, $x = y \vdash F(y) \supset F(x)$.
Теперь применяем P и теорему дедукции.

†525. $x \neq y \equiv \sim_{\blacksquare} x = y$.

Доказательство. В силу †523 и P, $\vdash \sim (F)[F(y) \supset F(x)] \equiv \sim_{\blacksquare} x = y$.
В силу P, $\vdash F(y) \supset F(x) \equiv \sim_{\blacksquare} F(x) \not\subset F(y)$.
Теперь используем *513.

†526. $F(x) \supset_{\blacksquare} \sim F(y) \supset x \neq y$.

Доказательство. По $*509_1$, $\vdash x = y \supset_{\blacksquare} F(x) \supset F(y)$.
Следовательно, в силу P, $\vdash F(x) \supset_{\blacksquare} \sim F(y) \supset \sim_{\blacksquare} x = y$.
Теперь применяем †525 и P.

†527. Если $\mathbf{a}$ есть индивидная переменная или индивидная константа, если $\mathbf{b}$ есть индивидная переменная или индивидная константа и если $\mathbf{B}$ получается из $\mathbf{A}$ подстановкой $\mathbf{b}$ вместо нуля или большего числа свободных вхождений $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$ (не обязательно вместо всех свободных вхождений $\mathbf{a}$ в $\mathbf{A}$), из которых ни одно не входит в пп-часть формулы $\mathbf{A}$ вида $(\mathbf{b})\mathbf{C}$, то $\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ будет индивидной переменной, не входящей в $\mathbf{A}$. Возьмем все те вхождения переменной $\mathbf{a}$ в формулу $\mathbf{A}$, вместо которых в процессе получения формулы $\mathbf{B}$ подставляется переменная $\mathbf{b}$, и подставим вместо каждого такого вхождения переменной $\mathbf{a}$ переменную $\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{X}$ будет пп-формулой, которая получается из $\mathbf{A}$ такой подстановкой.

В силу $*509_1$,

$$\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \supset_{\blacksquare} \check{S}_{\mathbf{X}}^{F(\mathbf{x})} F(\mathbf{a}) \supset F(\mathbf{b})|.$$

То есть $\vdash \mathbf{a} = \mathbf{b} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

С помощью *модус поненс* мы из этого можем, конечно, получить в качестве следствий:

*528. Если $\mathfrak{a}$ есть индивидная переменная или индивидная константа, если $\mathfrak{b}$ есть индивидная переменная или индивидная константа и если **B** получается из **A** подстановкой $\mathfrak{b}$ вместо нуля или большего числа свободных вхождений $\mathfrak{a}$ в **A** (не обязательно вместо всех свободных вхождений $\mathfrak{a}$ в **A**), из которых ни одно не входит в пп-часть формулы **A** вида $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.

*529. Если $\mathfrak{a}$ есть индивидная переменная или индивидная константа, если $\mathfrak{b}$ есть индивидная переменная или индивидная константа и если **B** получается из **A** подстановкой $\mathfrak{b}$ вместо нуля или большего числа свободных вхождений $\mathfrak{a}$ в **A** (не обязательно вместо всех свободных вхождений $\mathfrak{a}$ в **A**), из которых ни одно не входит в пп-часть формулы **A** вида $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$.

(*Правило подстановочности равенства.*)

Упражнения к § 52

52.0. Докажите следующие теоремы исчисления F^2_2:

(1) $x = z \equiv_z y = z \equiv . x = y$.

(2) $x = y \equiv . F(x) \equiv_F F(y)$.

(3) $F(x) \equiv (\exists y) . F(y) . x = y$.

(4) $F(x) \supset_x x \neq y \equiv \sim F(y)$.

(5) $F(x_1, x_2) \supset_F [F(y_1, y_2) \supset F(z_1, z_2)] \equiv [x_1 = z_1] [x_2 = z_2] \vee [y_1 = z_1] [y_2 = z_2]$.

52.1. Рассмотрите формулировку функционального исчисления второго порядка, исходные символы которой совпадают с исходными символами исчисления F^2_2, за исключением знака $\sim$, который отбрасывается, и пусть в этой формулировке обозначение $\sim \mathbf{A}$ вводится так, как указано в § 28. Выясните, как должны быть изменены аксиомы и правила исчисления F^2_2, и в подходящем смысле установите эквивалентность получающейся системы и F^2_2.

52.2. Рассмотрите формулировку функционального исчисления второго порядка, исходными символами которой являются все исходные символы исчисления F^2_2, за исключением символа $\sim$ и всех пропозициональных переменных, которые опускаются. Выясните, как должно быть определено обозначение $\sim \mathbf{A}$, как должны быть изменены аксиомы и правила исчисления F^2_2, и в подходящем смысле установите эквивалентность получающейся системы и F^2_2.

Затем обобщите этот результат на случай, когда опускаются не только символ $\sim$ и все пропозициональные переменные, но и все менее чем n-арные функциональные переменные, а n-арные функциональные переменные сохраняются.

52.3. Распространите **434 на исчисление F_2^{2p}. Отсюда с помощью результата упражнения 48.5 выведите, что всякая пп-формула исчисления F_2^{1p}, являющаяся теоремой исчисления F_2^{2p}, является также теоремой исчисления F_2^{1p}.

52.4. Решите проблему разрешения для сингулярного функционального исчисления второго порядка $F^{2,1}$, добавляя к шагам сведения (a)—(g) из упражнения 39.6 и шагам сведения (α)—(η) из упражнения 48.14 вначале аналоги шагов (a)—(g), в которых $\mathbf{a}$ является не индивидной переменной, а сингулярной функциональной переменной, а затем и следующие шаги сведения (в которых $\mathbf{p}$ — произвольная пропозициональная переменная, $\mathbf{f}$ — произвольная сингулярная функциональная переменная и в которой $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_i$ — отличные друг от друга индивидные переменные: (A) Замена пп-части $(\mathbf{p})\mathbf{E}$ на конъюнкцию $\mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{f}\mathbf{E}|\,\mathrm{S}^{\mathbf{p}}_{t}\mathbf{E}|$. (B) Замена пп-части $(\mathbf{f})[\mathbf{f}(\mathbf{a}_1) \supset_{\bullet} \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{f}(\mathbf{a}_m) \supset \sim \mathbf{f}(\mathbf{a})]$ на f. (C) Замена пп-части $(\mathbf{f})[\sim \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) \supset_{\bullet} \sim \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) \supset_{\bullet} \ldots \sim \mathbf{f}(\mathbf{a}_m) \supset \mathbf{f}(\mathbf{a})]$ на f. (D) замена пп-части $(\mathbf{f})[\sim \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) \supset_{\bullet} \sim \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) \supset_{\bullet} \ldots \sim \mathbf{f}(\mathbf{a}_m) \supset_{\bullet} \mathbf{f}(\mathbf{b}_1) \supset_{\bullet} \mathbf{f}(\mathbf{b}_2) \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{f}(\mathbf{b}_n) \supset \mathbf{f}(\mathbf{a})]$ на $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{a}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{a}_1 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{b}_n \neq \mathbf{a}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{a}_2 \supset_{\bullet} \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{a}_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{b}_n \neq \mathbf{a}_2 \supset_{\bullet} \ldots \quad \ldots \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{a}_n \supset_{\bullet} \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{a}_m \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{b} \neq \mathbf{a}_m \supset_{\bullet} \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{a} \supset_{\bullet} \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{a} \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{b}_n = \mathbf{a}$. (E) Замена пп-части $(\mathbf{f})[\mathbf{E}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{E}_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{E}_n \supset (\mathbf{a})\mathbf{D}]$ на $(\mathbf{a})(\mathbf{f})[\mathbf{E}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{E}_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{E}_n \supset \mathbf{D}]$, если $\mathbf{a}$ не является свободной переменной формул $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots \mathbf{E}_n$. (F) Замена пп-части $(\mathbf{f})[\mathbf{E}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{E}_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{E}_n \supset \sim (\mathbf{a})\mathbf{D}]$ на $(\mathbf{f})[\mathbf{E}'_1 \supset_{\bullet} \mathbf{E}'_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{E}'_n \supset \sim (\mathbf{a})\mathbf{D}']$, где $\mathbf{E}'_j$ есть

$$\check{\mathrm{S}}^{\mathbf{f}(\mathbf{a})}_{\mathbf{f}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{D}}\, \mathbf{E}_j \,|$$

($j = 1, 2, \ldots, n$), а $\mathbf{D}'$ есть

$$\check{\mathrm{S}}^{\mathbf{f}(\mathbf{a})}_{\mathbf{f}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{D}}\, \mathbf{D} \,|,$$

при условии, что $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots \mathbf{E}_n, \mathbf{D}$ не содержат никаких связанных пропозициональных или функциональных переменных, отличных от связанной функциональной переменной F в пп-частях вида $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ или $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, и $\mathbf{D}$ не содержит никаких связанных индивидных переменных. (G) Замена пп-части $(\mathbf{f})[\mathbf{E}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{E}_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{E}_n \supset \sim (\mathbf{a})(\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2) \ldots (\mathbf{c}_i)_{\bullet}\, \mathbf{a} \neq \mathbf{c}_1 \supset_{\bullet} \mathbf{a} \neq \mathbf{c}_2 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{a} \neq \mathbf{c} \supset_{\bullet} \mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_2 \supset_{\bullet} \mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_3 \supset_{\bullet} \ldots \mathbf{c}_{i-1} \neq \mathbf{c}_i \supset_{\bullet} \sim \mathbf{C}_1 \supset_{\bullet} \sim \mathbf{C}_2 \supset_{\bullet} \ldots \sim \mathbf{C}_i \supset \mathbf{A}]$, где $\mathbf{C}_j$ есть

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{c}_j}\, \mathbf{A} \,|$$

($j = 1, 2, \ldots, i$), на $(\mathbf{c}_1)(\mathbf{c}_2) \ldots (\mathbf{c}_i)(\mathbf{f})[\mathbf{E}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{E}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots \mathbf{E}_n \supset \sim(\mathbf{a})_{\blacksquare}\ \mathbf{a} \neq \mathbf{c}_1 \supset_{\blacksquare} \mathbf{a} \neq \mathbf{c}_2 \supset_{\blacksquare} \ldots\ \mathbf{a} \neq \mathbf{c} \supset \mathbf{A}]$, при условии, что $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$, $\mathbf{A}$ не содержат $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_i$ в качестве свободных переменных и не содержат никаких связанных пропозициональных или функциональных переменных, кроме связанной функциональной переменной F в пп-частях вида $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ или $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, и $\mathbf{A}$ не содержит никаких связанных индивидных переменных. (В частных случаях число m или n может в каждом из этих шагов сведения быть равным 0.)

52.5. С помощью предыдущих результатов исследуйте полноту в различных смыслах (1) сингулярного функционального исчисления второго порядка $F_2^{2,1}$ и (2) логистической системы, полученной из $F_2^{2,1}$ добавлением следующего бесконечного перечня аксиом: $(\exists x_1)(\exists x_2)_{\blacksquare}\ x_1 \neq x_2$, $(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)_{\blacksquare}\ x_1 \neq x_{2\,\blacksquare}\ x_1 \neq x_{3\,\blacksquare}\ x_2 \neq x_3$, $(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)_{\blacksquare}\ x_1 \neq x_{2\,\blacksquare}\ x_1 \neq x_{3\,\blacksquare}\ x_1 \neq x_{4\,\blacksquare}\ x_2 \neq x_{3\,\blacksquare}\ x_2 \neq x_{4\,\blacksquare}\ x_3 \neq x_4, \ldots$.

52.6. *Проблемой элиминирования* для функционального исчисления второго порядка называется проблема нахождения эффективной процедуры, с помощью которой для произвольной пп-формулы **A** функционального исчисления второго порядка получается такая пп-формула **B** функционального исчисления первого порядка с равенством, что $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ является теоремой функционального исчисления второго порядка [503)]. Мы будем здесь также требовать эффективной процедуры нахождения доказательства формулы $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Тогда пп-формула **B** называется *результантом* пп-формулы **A**.

(1) Решите проблему элиминирования для сингулярного функционального исчисления второго порядка $F_2^{2,1}$ при помощи шагов сведения (a)—(g), (α)—(η), (A)—(G) из упражнений 39.6, 48.14 и 52.4 соответственно [504)].

(2) Используйте найденную в (1) процедуру элиминирования для получения результанта следующей пп-формулы **A** [505)]:

$$(\exists F)_{\blacksquare}\ F(x) \supset_x G_1(x)_{\blacksquare}\ G_2(x) \supset F(x)_{\blacksquare}\ (\exists x)[F(x)\, H(x)] \supset_{\blacksquare} H(x) \supset_x F(x).$$

Покажите, что этот результант может быть преобразован к виду

$$G_2(x) \supset_x G_1(x)_{\blacksquare}\ (\exists x)\, [G_2(x)\, H(x)] \supset_{\blacksquare} H(x) \supset_x G_1(x).$$

52.7. (1) Решите проблему элиминирования для частного случая пп-формул исчисления F_2^{2p}, имеющих вид

$$(\exists \mathbf{f})_{\blacksquare}\ \mathbf{C}_{\blacksquare}\ \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \supset_{\mathbf{ab}} \mathbf{D},$$

где $\mathbf{f}$ есть бинарная функциональная переменная, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — отличные друг от друга индивидные переменные, **C** и **D** не содержат никаких связанных пропозициональных или функциональных переменных, $\mathbf{D}$ не содержит $\mathfrak{f}$, а основа $\mathbf{M}$ стандартной предваренной нормальной формы формулы $\mathbf{C}$ такова, что [506]

$$\vdash \mathbf{M} \supset \check{S}_{t}^{\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} \mathbf{M} \Big|.$$

Покажите, что в этом случае результантом является

$$S_{\mathbf{D}'}^{\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} \mathbf{C}' \Big|,$$

где $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{D}'$ могут отличаться от $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ только определенными алфавитными заменами связанных переменных [507]. Отсюда найдите, в частности, результанты следующих пп-формул исчисления F_2^{2p}:

(2) $(\exists F) \centerdot (x)(y)[F(x, y) \supset G(x, y)] (x)(\exists y)[H(x, y) \supset F(x, y)]$.

(3) $(\exists F)(x)(y) \centerdot F(x, y) \supset G(x, y) \centerdot H_1(x, y) \supset$
$F(x, x) \centerdot H_2(x, y) \supset F(x, x) F(y, y)$.

52.8. Аналогично решите проблему элиминирования для частного случая пп-формул исчисления F_2^{2p}, имеющих вид

$$(\exists \mathfrak{f}) \centerdot \mathbf{C} \centerdot \mathbf{D} \supset {}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

где $\mathfrak{f}$ есть бинарная функциональная переменная, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — отличные друг от друга индивидные переменные, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ не содержат никаких связанных пропозициональных или функциональных переменных, $\mathbf{D}$ не содержит $\mathfrak{f}$, а основа $\mathbf{M}$ стандартной предваренной нормальной формы формулы $\mathbf{C}$ такова, что [508]

$$\vdash \mathbf{M} \supset \check{S}_{f}^{\prime(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} \mathbf{M} \Big|.$$

52.9. Результаты упражнений 52.7 (1) и 52.8 обобщите, (1) заменяя $\mathfrak{f}$ на n-арную функциональную переменную, (2) заменяя $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ на $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) \equiv \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ не содержит ни кванторов, ни $\mathfrak{f}$.

52.10. Параллельно предыдущей серии решений проблемы элиминирования для пп-формул, содержащих квантор существования $(\exists \mathfrak{f})$, найдите серию решений проблемы элиминирования для пп-формул, содержащих квантор общности $(\mathfrak{f})$ (путем рассмотрения отрицаний последних пп-формул).

52.11. Вслед за Бэманом покажите, что для решения проблемы разрешения для расширенного пропозиционального исчисления можно вместо метода, описанного в § 28, воспользоваться процессом сведения, сходным с тем, который описан в упражнении 39.6, т. е. обращением процесса сведения к предваренной нормальной форме.

52.12. Примените найденную в предыдущем упражнении разрешающую процедуру к четырем примерам упражнения 28.0.

52.13. Как может быть изменена разрешающая процедура упражнения 52.4 в свете упражнения 52.11?

53. Непротиворечивость исчисления F_2^2. Как уже указывалось в § 49, непротиворечивость исчисления F_2^2 может быть доказана с помощью весьма простого синтаксического рассуждения, близкого к тому, которое в § 32 было использовано для доказательства непротиворечивости исчисления F^1.

Для этого возьмем формулировку расширенного пропозиционального исчисления, исходными связками и оператором которой являются импликация, отрицание и квантор общности, и следующим образом изменим описанную в § 28 разрешающую процедуру. Будем считать t и f не сокращениями пп-формул исчисления F_2^2 или расширенного пропозиционального исчисления, а исходными константами некоторой формулировки пропозиционального исчисления. Если теперь нам дана некоторая пп-формула **A** расширенного пропозиционального исчисления, то заменим ее пп-часть $(\mathfrak{b})\mathbf{B}$ на конъюнкцию

$$S_t^{\mathfrak{b}}\mathbf{B}\,|\,S_f^{\mathfrak{b}}\mathbf{B}\,|$$

и будем повторять эту операцию до тех пор, пока все вхождения квантора общности не окажутся устраненными. Если полученная таким образом бескванторная формула $\mathbf{A}_0$ является тавтологией (соответствующей формулировки пропозиционального исчисления), то мы будем говорить, что **A** *общезначима.*

Таким образом, мы имеем эффективный метод проверки общезначимости пп-формул расширенного пропозиционального исчисления.

Из произвольной пп-формулы исчисления F_2^2 мы следующим образом получаем ее *присоединенную формулу расширенного пропозиционального исчисления* (сокращенно пфрпи). Вначале мы отбрасываем все вхождения квантора общности, в которых операторными переменными являются индивидные переменные. Если теперь $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_m$ — отличные друг от друга функциональные переменные и функциональные константы, встречающиеся в рассматриваемой формуле, то мы выбираем m отличных друг от друга пропозициональных переменных $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$, которые еще не входят в рассматриваемую формулу, заменяем каждую пп-часть $\mathfrak{f}_i(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n_i})$ на $\mathfrak{p}_i$ и заменяем каждый квантор общности $(\forall\mathfrak{f}_i)$ на $(\forall\mathfrak{p}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Для настоящей нашей задачи нам не нужно отличать друг от друга различные пфрпи некоторой данной пп-формулы исчисления F_2^2, так как они отличаются друг от друга только алфавитной заменой связанных и свободных переменных.

Теперь каждая аксиома исчисления F_2^2 имеет общезначимую пфрпи, а правила вывода сохраняют свойство иметь общезначимую пфрпи, детальную проверку чего мы предоставляем читателю. Из этого следует:

**530. Каждая теорема исчисления F^2_2 имеет общезначимую пфрпи.

Так как каждая пфрпи формулы $\sim \mathbf{C}$ является отрицанием некоторой пфрпи формулы $\mathbf{C}$, то $\sim \mathbf{C}$ и $\mathbf{C}$ не могут одновременно иметь общезначимые пфрпи, и поэтому из **530 следует, что $\sim \mathbf{C}$ и $\mathbf{C}$ не могут быть одновременно теоремами исчисления F^2_2. Мы имеем, таким образом:

**531. F^2_2 непротиворечиво относительно преобразования $\mathbf{C}$ в $\sim \mathbf{C}$.

**532. F^2_2 абсолютно непротиворечиво.

**533. F^2_2 непротиворечиво в смысле Поста.

Сходные синтаксические доказательства непротиворечивости возможны также и для функциональных исчислений более высоких порядков, с использованием вместо пфрпи присоединенных формул прототетики или высших прототетик [509].

54. Теорема Хенкина о полноте [510].

Главная интерпретация исчисления F^{2p}_2 задается для данной непустой области $\mathfrak{J}$ индивидов правилами a — e, f^2 из § 50. Теперь мы введем то, что будем называть *интерпретацией исчисления* F^{2p}_2 для некоторой данной области $\mathfrak{J}$ индивидов и данных областей (классов) $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, ... пропозициональных функций от индивидов, где все элементы области $\mathfrak{F}_1$ должны быть сингулярными пропозициональными функциями, область определения которых образуют индивиды, все элементы области $\mathfrak{F}_2$ должны быть бинарными пропозициональными функциями, область определения которых образуют упорядоченные пары индивидов, и т. д. Эти новые интерпретации исчисления F^{2p}_2 задаются теми же правилами, которые задают главную интерпретацию, за исключением лишь того, что правила $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$, ... заменяются следующими правилами:

$\mathfrak{b}\mathfrak{F}_1$. Сингулярные функциональные переменные суть переменные, областью значений которых является $\mathfrak{F}_1$.

$\mathfrak{b}\mathfrak{F}_2$. Бинарные функциональные переменные суть переменные, областью значений которых является $\mathfrak{F}_2$.

$\mathfrak{b}\mathfrak{F}_n$. n-арные функциональные переменные суть переменные, областью значений которых является $\mathfrak{F}_n$.

Ясно, что среди этих интерпретаций исчисления F^{2p}_2 не все правильны. Те же из них, которые являются правильными, но не являются главными интерпретациями, мы называем *вторичными интерпретациями* исчисления F^{2p}_2.

Временно мы должны оставить открытым вопрос о существовании таких вторичных интерпретаций, но из результатов, которые будут получены ниже, будет следовать утвердительный ответ на этот вопрос. Точнее говоря, из них будет следовать существование таких вторичных интерпретаций исчисления F^{2p}_2, в которых все области $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, ... счетно-бесконечны.

Подобно тому, как это было сделано в § 43, напечатанные мелким шрифтом семантические правила можно переформулировать и переинтерпретировать таким образом, чтобы придать им чисто синтаксический характер. А именно, слова „область значений" и „значение" заменяются повсюду выражениями „область значений относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$" и „значение относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$" соответственно. После этого мы смотрим на правила, как на (синтаксические) определения этих выражений.

Мы говорим, что пп-формула исчисления F_2^{2p} *общезначима относительно* системы областей $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$, если она принимает относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ значение t при всех возможных значениях своих свободных переменных [511], и говорим, что эта пп-формула *выполнима относительно* системы областей $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$, если она принимает относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ значение t при хотя бы одной системе возможных значений своих свободных переменных. (Под „возможным" значением переменной мы здесь подразумеваем такое значение, которое относится к области значений переменной относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$.)

Система областей $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ называется *нормальной*, если относительно нее общезначимы все аксиомы исчисления F_2^{2p}, а каждое правило вывода исчисления F_2^{2p} обладает свойством сохранять общезначимость относительно нее (т. е. обладает таким свойством, что если посылки правила общезначимы относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$, то и заключение общезначимо относительно $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$). Очевидно, что в нормальной системе областей никакая область не пуста.

Мы говорим, что некоторая пп-формула исчисления F_2^{2p} *общезначима* в непустой области $\mathfrak{J}$ индивидов, если она общезначима относительно системы областей $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$, где $\mathfrak{F}_1$ есть класс всех пропозициональных функций, имеющих областью определения все индивиды (т. е. все элементы из $\mathfrak{J}$), $\mathfrak{F}_2$ есть класс всех пропозициональных функций, имеющих областью своего определения все упорядоченные пары индивидов, и т. д. [512], и пп-формула называется *выполнимой* в непустой области $\mathfrak{J}$ индивидов, если она выполнима относительно той же самой системы областей.

Пп-формула *общезначима*, если она общезначима во всякой непустой области $\mathfrak{J}$ индивидов, и *выполнима*, если она выполнима в некоторой непустой области $\mathfrak{J}$ индивидов. Пп-формула *вторично общезначима*, если она общезначима относительно всякой нормальной системы областей, и *вторично выполнима*, если она выполнима относительно некоторой нормальной системы областей. Можно показать, что всякая вторично общезначимая пп-формула общезначима, а всякая выполнимая пп-формула вторично выполнима (ср. доказательство метатеоремы **434).

Замыканием всеобщности пп-формулы **B**, свободные функциональные переменные которой не более чем n-арны, является пп-формула

$$(\mathbf{c}^n_{u_n})(\mathbf{c}^n_{u_n-1})\ldots(\mathbf{c}^n_1)(\mathbf{c}^{n-1}_{u_{n-1}})(\mathbf{c}^{n-1}_{u_{n-1}-1})\ldots(\mathbf{c}^{n-1}_1)\ldots$$
$$\ldots(\mathbf{c}^1_{u_1})(\mathbf{c}^1_{u_1-1})\ldots(\mathbf{c}^1_1)(\mathbf{c}^0_{u_0})(\mathbf{c}^0_{u_0-1})\ldots(\mathbf{c}^0_1)(\mathbf{c}_u)(\mathbf{c}_{u-1})\ldots(\mathbf{c}_1)\mathbf{B},$$

где $\mathbf{c}^k_1, \mathbf{c}^k_2, \ldots, \mathbf{c}^k_{u_k}$ — свободные k-арные функциональные переменные из **B** в алфативном порядке ($k = 1, 2, \ldots, n$), $\mathbf{c}^0_1, \mathbf{c}^0_2, \ldots, \mathbf{c}^0_{u_0}$ — свободные пропозициональные переменные из **B** в алфавитном порядке и $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_u$ — свободные индивидные переменные из **B** в алфавитном порядке. Аналогично определяется *замыкание существования* пп-формулы **B** с заменой всех кванторов общности на кванторы существования.

Следующие метатеоремы, относящиеся к исчислению F^{2p}_2, доказываются так же, как их аналоги в § 43:

540. Пп-формула **A общезначима относительно данной системы областей тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не выполнима относительно этой системы областей; общезначима в данной непустой области индивидов тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не выполнима в этой области; общезначима тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не выполнима; вторично общезначима тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не является вторично выполнимой.

541. Пп-формула **A выполнима относительно данной нормальной системы областей тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не общезначима относительно этой системы областей; выполнима в данной непустой области индивидов тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не общезначима в этой области; выполнима тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не общезначима; вторично выполнима тогда и только тогда, когда $\sim$ **A** не является вторично общезначимой.

**542. Пп-формула общезначима относительно данной нормальной системы областей тогда и только тогда, когда ее замыкание всеобщности общезначимо относительно этой системы областей; общезначима в данной непустой области индивидов тогда и только тогда, когда ее замыкание всеобщности общезначимо в этой области; общезначима тогда и только тогда, когда ее замыкание всеобщности общезначимо; вторично общезначима тогда и только тогда, когда ее замыкание всеобщности вторично общезначимо.

**543. Пп-формула выполнима относительно данной нормальной системы областей тогда и только тогда, когда ее замыкание существования выполнимо (или, что то же самое, общезначимо) относительно этой системы областей; выполнима в данной непустой области индивидов тогда и только тогда, когда ее замыкание всеобщности выполнимо в этой области; вторично выполнима тогда и только тогда, когда ее замыкание всеобщности вторично выполнимо.

**544. Всякая теорема исчисления F_2^{2p} вторично выполнима и поэтому выполнима.

Если Γ есть класс пп-формул какого-либо функционального исчисления второго порядка, то мы говорим, что $\Gamma \vdash \mathbf{B}$, когда существует конечное число пп-формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ из класса Γ, таких, что $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m \vdash \mathbf{B}$. Если $\Gamma \vdash f$, то класс Γ *противоречив*, в противном же случае Γ *непротиворечив*. **C** *противоречит* классу Γ (*несовместима* с классом Γ) или *не противоречит* (*совместима* с ним) в соответствии с тем, противоречив ли или нет класс, элементами которого являются **C** и элементы класса Γ. Класс Γ есть *максимальный непротиворечивый класс замкнутых правильно построенных формул*, если ему противоречит всякая замкнутая пп-формула **C**, не являющаяся его элементом.

Класс Γ пп-формул исчисления F_2^{2p} называется *одновременно*, или *совместно, выполнимым относительно* некоторой системы областей, если относительно этой системы областей все пп-формулы из Γ одновременно принимают значение t для по меньшей мере одной системы возможных значений всех их свободных переменных, взятых в совокупности. И класс Γ называется *одновременно*, или *совместно, выполнимым* в непустой области индивидов $\mathfrak{J}$, если он одновременно выполним относительно системы областей $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, ..., где $\mathfrak{F}_1$ есть класс всех пропозициональных функций, имеющих класс индивидов $\mathfrak{J}$ областью определения, $\mathfrak{F}_2$ есть класс всех пропозициональных функций, имеющих класс упорядоченных пар индивидов областью определения, и т. д. Наконец, класс Γ называется *одновременно*, или *совместно, выполнимым*, если он одновременно выполним в некоторой непустой области $\mathfrak{J}$.

Мы рассматриваем прикладное функциональное исчисление второго порядка S, исходными символами которого являются все исходные символы исчисления F_2^{2p}, исходные константы w_0, w_1, w_2, ... и для каждого k также k-арные функциональные константы w_0^k, w_1^k, w_2^k .... Приспосабливая к нашим целям метод примечания 416, мы фиксируем некоторую частную нумерацию замкнутых пп-формул из S, и имея в виду эту их нумерацию, мы говорим о „первой замкнутой пп-формуле из S", „второй замкнутой пп-формуле из S" и т. д. Более того, используя эту нумерацию, мы можем произвольный непротиворечивый класс Γ замкнутых пп-формул из S расширить до максимального непротиворечивого класса $\overline{\Gamma}$ замкнутых пп-формул из S с помощью того же самого метода, который был использован в § 45 (ср. **452 и ее доказательство).

Пусть теперь **H** будет замкнутой пп-формулой исчисления F_2^{2p}, которая не является теоремой.

Тогда класс Γ_0, единственным элементом которого является $\sim$ **H**, является непротиворечивым классом пп-формул из F_2^{2p}, а поэтому и из S. Мы определяем классы Γ_n с помощью следующего рекурсивного правила [513]. Если $(n+1)$-я замкнутая пп-формула из S имеет вид $(\mathbf{a})\,\mathbf{A}$, где **a** — индивидная переменная, то Γ_{n+1} есть класс, элементами которого являются все элементы класса Γ_n и

$$\underset{\cdot}{\mathrm{S}}^{\mathbf{a}}_{w_m}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A},$$

где w_m — первая в перечне $w_0, w_1, w_2, \ldots$ константа, которая не входит ни в **A**, ни в какую-либо из пп-формул класса Γ_n; если $(n+1)$-я замкнутая пп-формула из S имеет вид $(\mathbf{a})\,\mathbf{A}$, где **a** есть k-арная функциональная переменная ($k = 1, 2, 3, \ldots$), то Γ_{n+1} есть класс, элементами которого являются все элементы класса Γ_n и

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{w_m}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A},$$

где w^k_m — первая в перечне $w^k_0, w^k_1, w^k_2, \ldots$ константа, которая не входит ни в **A**, ни в какую-либо из пп-формул класса Γ_n; в противном случае Γ_{n+1} совпадает с Γ_n.

Тогда (для $n = 0, 1, 2, \ldots$) Γ_n является конечным классом замкнутых пп-формул из S. Методом математической индукции мы покажем, что каждый класс Γ_n непротиворечив.

Допустим, что для некоторого n класс Γ_n непротиворечив, а класс Γ_{n+1} противоречив. В этом случае Γ_{n+1} не может совпадать с классом Γ_n и содержит дополнительный элемент

$$\underset{\cdot}{\mathrm{S}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{w}}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A},$$

где **w** — константа, выбранная подходящим образом (как описано выше). Так как класс Γ_{n+1} противоречив, то по теореме дедукции (*516)

$$\Gamma_n \vdash \underset{\cdot}{\mathrm{S}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{w}}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A}\supset f.$$

Заменим в этом доказательстве из гипотез константу **w** повсюду на новую переменную **x**, которая относится к тому же типу, что и **a**, и которая до этого в доказательстве не встречалась. Так как **w** не входит ни в **A**, ни в какую-либо из пп-формул класса Γ_n, то мы имеем

$$\Gamma_n \vdash \underset{\cdot}{\mathrm{S}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A}\supset f.$$

Следовательно, обобщая по **x** и применяя затем теоремные схемы *380 и *383 (или их аналоги), мы получаем, что

$$\Gamma_n \vdash (\mathbf{x})\,\underset{\cdot}{\mathrm{S}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A}\supset f.$$

Алфавитной заменой связанной переменной [514] получаем

$$\Gamma_n \vdash (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset f.$$

Но так как $(\mathbf{a})\mathbf{A} \supset (\mathbf{a})\mathbf{A}$ является теоремой (по P), то мы имеем $\Gamma_n \vdash f$, что противоречит предположенной непротиворечивости класса Γ_n.

Так как класс Γ_0 непротиворечив и так как непротиворечивость класса Γ_{n+1} следует из непротиворечивости класса Γ_n (как мы только что показали), то всякий класс Γ_n непротиворечив.

Пусть Γ — объединение классов $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, и пусть $\overline{\Gamma}$ — расширение класса Γ до максимального непротиворечивого класса замкнутых пп-формул из S.

Нам потребуются следующие свойства класса $\overline{\Gamma}$ (где **A** и **B** в d1 — e3 суть замкнутые пп-формулы из S):

d1. Если **A** является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то $\sim \mathbf{A}$ не является элементом класса $\overline{\Gamma}$. (Так как в противном случае класс $\overline{\Gamma}$ был бы, в силу P, противоречив.)

d2. Если **A** не является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то $\sim \mathbf{A}$ — элемент класса $\overline{\Gamma}$. (Так как если **A** не является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то **A** должно противоречить классу $\overline{\Gamma}$; поэтому, в силу теоремы дедукции и P, $\overline{\Gamma} \vdash \sim \mathbf{A}$; поэтому $\sim \mathbf{A}$ не противоречит классу $\overline{\Gamma}$; поэтому $\sim \mathbf{A}$ является элементом класса $\overline{\Gamma}$.)

e1. Если **B** — элемент класса $\overline{\Gamma}$, то и $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ также является элементом класса $\overline{\Gamma}$. (Так как, в силу P, $\overline{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$; таким образом, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ не противоречит классу $\overline{\Gamma}$ и поэтому является его элементом.)

e2. Если **A** не является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ — элемент класса $\overline{\Gamma}$. (Так как, в силу d2, $\sim \mathbf{A}$ является элементом класса $\overline{\Gamma}$ и поэтому, в силу P, $\overline{\Gamma} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$.)

e3. Если **A** является, а **B** не является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ — не элемент класса $\overline{\Gamma}$. (Так как, в силу d2, $\sim \mathbf{B}$ является элементом класса $\overline{\Gamma}$; следовательно, если бы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ было элементом класса $\overline{\Gamma}$, то класс $\overline{\Gamma}$ был бы противоречив.)

f1. Если **a** является индивидной или функциональной переменной и если для всякой константы **w** того же самого типа, что и переменная **a**,

$$\mathrm{\dot{S}}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{w}}\mathbf{A}|$$

является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то и $(\mathbf{a})\mathbf{A}$ — элемент класса $\overline{\Gamma}$. (Так как вследствие того, как были определены классы Γ_n, существует некоторая константа **w** того же типа, что и переменная **a**, такая, что

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{w}}\mathbf{A}\,|\supset(\mathbf{a})\,\mathbf{A}$$

является элементом класса Γ, а следовательно, и класса $\overline{\Gamma}$.)

f1′. Если **a** есть пропозициональная переменная и если как $\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{t}\mathbf{A}|$, так и $\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{f}\mathbf{A}|$ являются элементами класса $\overline{\Gamma}$, то и $(\mathbf{a})\mathbf{A}$ является элементом класса $\overline{\Gamma}$. (В силу *514, *515.)

f2. Если **a** является индивидной или функциональной переменной и если для хотя бы одной константы **w** того же типа, что и переменная **a**,

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{w}}\mathbf{A}\,|$$

не является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то и $(\mathbf{a})\mathbf{A}$ не является элементом класса $\overline{\Gamma}$. (В силу †509, *509_n.)

f2′. Если **a** есть пропозициональная переменная и если

$$\mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{t}\mathbf{A}\,|\quad\text{или}\quad \mathrm{S}^{\mathbf{a}}_{f}\mathbf{A}\,|$$

не является элементом класса $\overline{\Gamma}$, то и $(\mathbf{a})\mathbf{A}$ не является элементом класса $\overline{\Gamma}$. (В силу *509_0.)

Теперь мы ставим в соответствие каждой индивидной константе w_n натуральное число n в качестве *присоединенного натурального числа* (т. е. 0 будет присоединенным натуральным числом константы w_0, 1 будет присоединенным натуральным числом константы w_1 и т. д.). А каждой k-арной функциональной константе w^k_n мы ставим в соответствие в качестве *присоединенной пропозициональной функции* k-арную пропозициональную функцию Φ^k_n от натуральных чисел, определенную в соответствии с таким правилом: $\Phi^k_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ есть t или f в соответствии с тем, является ли $w^k_n(w_{u_1}, w_{u_2}, \ldots, w_{u_k})$ элементом класса $\overline{\Gamma}$ или нет.

Мы будем также говорить, что натуральное число n *присоединено* к константе w_n и что функция Φ^k_n *присоединена к* константе w^k_n.

Пусть область $\mathfrak{F}$ состоит из натуральных чисел, пусть область $\mathfrak{F}_1$ состоит из присоединенных пропозициональных функций всех сингулярных функциональных констант w^1_n, пусть $\mathfrak{F}_2$ состоит из присоединенных пропозициональных функций всех бинарных функциональных констант w^2_n, и т. д. Тогда каждая из областей $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ является конечной или счетно-бесконечной [515)].

Значением относительно системы областей $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ пп-формулы **X** исчисления F^{2p}_2 для некоторой данной системы значений ее свободных переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ является t или f в соответствии с тем, является ли

$$\mathrm{S}^{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_m}_{\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\ldots\mathbf{w}_m}\mathbf{X}\,|$$

элементом класса $\overline{\Gamma}$ или нет, где $\mathbf{w}_i$ — константа или одна из констант, к которым присоединено значение переменной $\mathbf{x}_i$ ($i =$

$= 1, 2, \ldots, m$), а в том случае, когда $\mathbf{x}_i$ есть пропозициональная переменная, $\mathbf{w}_i$ есть t или f в соответствии с тем, являются ли значением переменной $\mathbf{x}_i$ t или f. Это действительно следует из определения общезначимости относительно системы областей и из свойств d1, d2, e1, e2, e3, f1, f1′, f2, f2′, перечисленных выше.

Беря в качестве **X** частную пп-формулу $\sim$ **H**, которая не имеет свободных переменных и является, конечно, элементом класса $\overline{\Gamma}$, мы получаем, таким образом, что $\sim$ **H** общезначима относительно системы областей $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$.

Беря в качестве **X** произвольную аксиому исчисления F_2^{2p}, мы получаем, что

$$\check{S}^{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_m}_{\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \ldots \mathbf{w}_m} \mathbf{X} \Big|$$

всегда является теоремой в S и поэтому элементом класса $\overline{\Gamma}$. Поэтому **X** опять общезначима относительно системы областей $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$.

Для того чтобы доказать, что $\mathfrak{J}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ является нормальной системой областей, мы должны, далее, показать, что каждое из четырех правил вывода исчисления F_2^{2p} сохраняет общезначимость относительно этой системы областей. В каждом случае это может быть сделано рассмотрением замыканий всеобщности посылки, или посылок, правила и замыкания всеобщности его заключения, так как, очевидно, всегда является производным правилом вывода предложение, утверждающее, что замыкание всеобщности заключения может быть выведено из замыканий всеобщности посылок. Если посылки общезначимы относительно рассматриваемой системы областей, то по **542 их замыкания всеобщности также общезначимы относительно этой системы областей и являются поэтому элементами класса $\overline{\Gamma}$; поэтому элементом класса $\overline{\Gamma}$ является и замыкание всеобщности заключения; поэтому замыкание всеобщности заключения общезначимо относительно рассматриваемой системы областей; поэтому, наконец, в силу **542, само заключение общезначимо относительно этой системы областей.

Мы доказали, таким образом, метатеорему

545. Если замкнутая пп-формула **H исчисления F_2^{2p} не является теоремой, то существует нормальная система конечных или счетно-бесконечных областей, относительно которой $\sim$**H** общезначима.

Рассмотрим теперь вторично общезначимую пп-формулу **A** исчисления F_2^{2p}, и пусть **H** будет замыканием всеобщности формулы **A**. В силу **542, **H** также является вторично общезначимой. Поэтому нет нормальной системы областей, относительно которой $\sim$ **H** была бы общезначима. Поэтому, в силу **545, **H** является теоремой исчисления F_2^{2p}. Поэтому и пп-формула **A** является теоремой исчисления F_2^{2p}.

Таким образом, мы имеем в качестве следствия из **545 следующую метатеорему (теорему Хенкина о полноте чистого функционального исчисления второго порядка):

**546. Всякая вторично общезначимая пп-формула исчисления F_2^{2p} является теоремой.

С одной стороны, теорема Хенкина о полноте функционального исчисления второго порядка весьма сходна с теоремой Гёделя о полноте функционального исчисления первого порядка, так как в обоих случаях семантическое содержание состоит в том, что теоремами являются те пп-формулы, которые при каждой интерпретации из некоторого класса интерпретаций исчисления принимают значение t для каждой системы значений своих свободных переменных. Здесь имеется, однако, то существенное различие, что в случае чистого функционального исчисления первого порядка этими интерпретациями являются главные интерпретации, в то время как в случае чистого функционального исчисления второго порядка они включают и вторичные интерпретации. Предметом обсуждения становится вопрос, ради чего, собственно, формулировалось исчисление, и, попросту говоря, теорема Хенкина имеет значение теоремы о полноте только в том случае, если, формулируя чистое функциональное исчисление второго порядка, мы намеревались наряду с главными интерпретациями рассматривать и вторичные. В действительности невозможно так расширить чистое функциональное исчисление второго порядка с помощью дополнительных аксиом и правил, чтобы теоремы совпадали с пп-формулами, которые принимают значение t для всех значений своих свободных переменных при всех главных интерпретациях. (Это последнее утверждение будет следовать из знаменитой теоремы Гёделя о неполноте, которая будет рассмотрена в одной из следующих глав.)

Имеется еще одно соображение, с точки зрения которого теорема Хенкина о полноте слабее сравнительно с теоремой Гёделя, относящейся к функциональному исчислению первого порядка. Действительно, в связи с последней из упомянутых теорем мы имеем одну частную интерпретацию (главную интерпретацию с натуральными числами в качестве индивидов), при которой теоремы совпадают с теми пп-формулами, которые принимают значение t для всех систем значений своих свободных переменных. В то же время в случае чистого функционального исчисления второго порядка не получается никакой одной интерпретации, относительно которой мы имели бы полноту; и если, в частности, мы примем главную интерпретацию с натуральными числами в качестве индивидов, то мы можем оказаться принужденными ввести различные независимые аксиомы (не содержащие никаких новых исходных символов), из которых ближайшие даны в §§ 56, 57.

В качестве дальнейших следствий мы имеем:

**547. Всякая пп-формула исчисления F_2^{2p}, которая общезначима относительно всякой нормальной системы конечных и счетно-бесконечных областей, является вторично общезначимой, и, следовательно, общезначимой.

**548. Всякая пп-формула исчисления F_2^{2p}, отрицание которой не является теоремой, выполнима относительно некоторой нормальной системы конечных и счетно-бесконечных областей.

Упражнения к § 54

54.0. Пп-формулы расширенного пропозиционального исчисления (в той его формулировке, которая была использована в § 53) входят в число пп-формул исчисления F_2^{2p}. Следовательно, данное в § 54 определение общезначимости пп-формул исчисления F_2^{2p} относится, в частности, и к пп-формулам расширенного пропозиционального исчисления. (1) Докажите, что это определение общезначимости пп-формул расширенного пропозиционального исчисления эквивалентно тому, которое было дано в § 53, в том смысле, что класс общезначимых пп-формул в обоих случаях один и тот же. (2) Докажите, что пп-формула расширенного пропозиционального исчисления является теоремой исчисления F_2^{2} тогда и только тогда, когда она общезначима.

54.1. Учитывая решение в 52.6(1) проблемы элиминирования для сингулярного функционального исчисления второго порядка, а также полученные в упражнениях к § 48 результаты, относящиеся к F^{1p}, докажите, что если пп-формула сингулярного функционального исчисления второго порядка $F_2^{2,1}$ общезначима во всякой непустой конечной области, то она общезначима и является теоремой.

54.2. Установите, какие из следующих утверждений верны для всякой нормальной системы областей $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ..., и для каждого случая дайте доказательство или опровержение. (1) $\mathfrak{J}_1$ содержит нулевой класс и универсальный класс индивидов[516]. (2) Если $\mathfrak{J}_1$ содержит какие-либо два класса индивидов, то она всегда содержит и класс, являющийся объединением этих двух классов. (3) $\mathfrak{J}_2$ содержит отношение тождественности или равенства индивидов, а также отношение нетождественности или различия индивидов[516]. (4) Если $\mathfrak{J}_2$ содержит какое-либо отношение между индивидами, то $\mathfrak{J}_1$ всегда содержит как область, так и конверсную область этого отношения[517]. (5) Если $\mathfrak{J}_2$ содержит какие-либо два отношения между индивидами, то она всегда содержит и их относительное произведение[518].

54.3. Пусть $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ... — система областей такого типа, который описан в первом абзаце § 54. Покажите, что эта система является нормальной системой областей тогда и только тогда, когда $\mathfrak{J}$ не пусто и для произвольной пп-формулы **A** исчисления F_2^{2p}, для всякого перечня $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ отличных друг от друга индивидных переменных ($n \geqslant 1$) и для всякой системы $\mathfrak{S}$ значений (относительно $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ...) отличных от $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ свободных переменных пп-формулы **A** в области $\mathfrak{J}_n$ существует такая пропозициональная функция Φ, что $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ всегда совпадает со значением формулы **A** относительно $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, ..

для значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и системы $\mathfrak{S}$ значений остальных свободных переменных формулы **A**. (Заметьте, что эта характеристика нормальной системы областей, в отличие от той, которая была дана в тексте, не зависит от аксиом и правил вывода исчисления $\mathrm{F}^{2\mathrm{p}}_2$.)

54.4. Докажите (как это предполагалось в тексте), что всякий непротиворечивый класс пп-формул исчисления $\mathrm{F}^{2\mathrm{p}}_2$ является также непротиворечивым классом пп-формул прикладного функционального исчисления S.

54.5. С помощью методов § 54 докажите, что всякий непротиворечивый класс пп-формул исчисления $\mathrm{F}^{2\mathrm{p}}_2$ совместно выполним относительно некоторой нормальной системы конечных и счетно-бесконечных областей.

54.6. Дайте такое доказательство теоремы Гёделя о полноте функционального исчисления первого порядка, которое было бы как можно ближе к доказательству метатеорем **545 и **546 в § 54.

55. Теория постулатов ⟨postulate theory⟩[519]. С той точки зрения, которая была разъяснена в § 07, всякий раз, когда некоторая система постулатов используется в качестве базиса для формального рассмотрения какой-либо математической теории или отрасли математики (например, арифметики или геометрии Эвклида на плоскости), следует считать, что система постулатов присоединена к некоторой лежащей в основе логике. В самом деле, для точного определения конкретной отрасли математики необходимо сформулировать не только специфически математические постулаты, но и некоторую формализацию лежащей в основе логики, так как класс теорем, относящихся к рассматриваемой отрасли математики, определяется как постулатами, так и лежащей в основе логикой и мог бы быть изменен изменением как одного, так и другого [520].

Настоящий параграф посвящен дальнейшему рассмотрению этого вопроса и изложению ряда примеров. Нам представляется уместным заняться этим рассмотрением именно сейчас, так как во многих случаях в качестве лежащей в основе логики можно брать некоторое функциональное исчисление первого или второго порядка.

В качестве первого примера мы возьмем следующую систему постулатов для арифметики, которую будем называть (A_0) и для которой лежащей в основе логикой должно быть (синтаксически) некоторое простое прикладное функциональное исчисление первого порядка. Имеются два неопределяемых термина — тернарные функциональные константы Σ и Π; кроме того, знаки Z_0, Z_1 и $\equiv$

вводятся следующими определениями-схемами [521], в которых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ — произвольные переменные, $\mathbf{b}$ является следующей в алфавитном порядке за $\mathbf{a}$ индивидной переменной, а $\mathbf{d}$ и $\mathbf{e}$ — первые в алфавитном порядке индивидные переменные, отличные как друг от друга, так и от $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$:

$$Z_0(\mathbf{a}) \rightarrow (\mathbf{b})\,\Sigma(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{b});$$
$$Z_1(\mathbf{a}) \rightarrow (\mathbf{b})\,\Pi(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{b});$$
$$[\mathbf{a} = \mathbf{c}] \rightarrow (\mathbf{d})\,(\mathbf{e})\,{}_{\blacksquare}\,\Sigma(\mathbf{a},\ \mathbf{d},\ \mathbf{e}) \supset \Sigma(\mathbf{c},\ \mathbf{d},\ \mathbf{e}).$$

К числу постулатов относятся прежде всего следующие двенадцать:

$$(\exists z)\,\Sigma(x,\ y,\ z);$$
$$\Sigma(x_1,\ x_2,\ y_1) \supset_{\blacksquare} \Sigma(x_2,\ x_3,\ y_2) \supset_{\blacksquare} \Sigma(y_1,\ x_3,\ z) \supset \Sigma(x_1,\ y_2,\ z);$$
$$\Sigma(x,\ y,\ z) \supset \Sigma\,(y,\ x,\ z);$$
$$\Sigma(x_1,\ y,\ z) \supset_{\blacksquare} \Sigma(x_2,\ y,\ z) \supset_{\blacksquare} x_1 = x_2;$$
$$(\exists x)\,\Sigma(x,\ y,\ y);$$
$$(\exists z)\,\Pi(x,\ y,\ z);$$
$$\Pi(x_1,\ x_2,\ y_1) \supset_{\blacksquare} \Pi(x_2,\ x_3,\ y_2) \supset_{\blacksquare} \Pi(y_1,\ x_3,\ z) \supset \Pi(x_1,\ y_2,\ z);$$
$$\Pi(x,\ y,\ z) \supset \Pi(y,\ x,\ z);$$
$$\Pi(x_1,\ y,\ z) \supset_{\blacksquare} \Pi(x_2,\ y,\ z) \supset Z_0(y) \vee x_1 = x_2;$$
$$(\exists x)\,\Pi(x,\ y,\ y);$$
$$\Pi(x_1,\ x_2,\ y_2) \supset_{\blacksquare} \Pi(x_1,\ x_3,\ y_3) \supset_{\blacksquare} \Sigma(x_2,\ x_3,\ y_1) \supset_{\blacksquare} \Sigma(y_2,\ y_3,\ z) \supset \Pi(x_1,\ y_1,\ z);$$
$$Z_1(y) \supset_{\blacksquare} \Sigma(x,\ y,\ z) \supset \sim Z_0(z).$$

Далее, в дополнение к этим двенадцати постулатам имеется бесконечный перечень *постулатов математической индукции*, задаваемых следующей постулатной схемой, в которой $\mathbf{A}$ — произвольная пп-формула, не содержащая переменной z, а $\mathbf{B}$ есть $\mathrm{S}^{x}_{z}\mathbf{A}|$:

$$Z_0(x) \supset_{\blacksquare} Z_1(y) \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset_x (\exists z)\,[\Sigma(x,\ y,\ z)\,\mathbf{B}] \supset (x)\,\mathbf{A}.$$

Эта система постулатов (A_0) присоединяется как к лежащей в основе логике к простому прикладному функциональному исчислению первого порядка F^{1h} (см. § 30). Получающаяся в результате система является формулировкой того, что мы называем *элементарной арифметикой* [522].

Главная интерпретация логистической системы A^0, получаемой добавлением постулатов (A_0) к исчислению F^{1h}, совпадает с главной интерпретацией самого исчисления F^{1h} и задается семантическими правилами α — ζ § 30. Разбиение семантических правил на две категории, о которых говорилось в § 07, производится тем, что мы приписываем правила α_0, β_0, γ, δ, ε, ζ лежащей в основе логике и тем самым относим их к первой категории, а правила α_1, β_1, β_2 относим ко второй категории.

Тогда для значения a переменной **a** формула $Z_0(\mathbf{a})$ обозначает t или f в соответствии с тем, является ли a нулем или нет, а формула $Z_1(\mathbf{a})$ обозначает t или f в соответствии с тем, является ли a единицей или нет. Поэтому мы можем считать, что эти обозначения означают соответственно, что a есть 0 и что a есть 1. Анагогично, мы можем считать, что знак $\equiv$ означает равенство натуральных чисел. Ибо, хотя мы получаем таким образом для „$\equiv$", или „равняется", смысл, отличный от того, который был дан в D 22, нет никаких причин, по которым мы не должны были бы изменить смысл для „равняется" в связи с A^0, так как пропозициональная функция не меняется в объемном отношении и так как при этом математическая теория не меняется формально и не перестает служить своим целям.

Первые пять постулатов из (A_0) выражают последовательно существование суммы двух натуральных чисел, закон ассоциативности сложения, закон коммутативности сложения, закон зачеркивания (сокращения) для сложения и (в слабом смысле) существование единичного элемента для сложения. Следующие пять постулатов выражают пять соответствующих свойств для умножения натуральных чисел. Одиннадцатый постулат выражает закон дистрибутивности. Наконец, двенадцатый постулат выражает, что результат прибавления единицы к натуральному числу никогда не есть нуль.

Каждый из заданных постулатной схемой постулатов математической индукции либо, если **A** не содержит помимо x никаких свободных переменных, выражает определенный частный случай принципа математической индукции, либо же, если **A** содержит другие свободные переменные, выражает принцип, который (несмотря на известную общность) также должен считаться полученным из общего принципа математической индукции с помощью специализации.

Ввиду отсутствия функциональных переменных, в A^0 невозможно выразить принцип математической индукции в виде общего закона. Однако ниже такое выражение общего принципа математической индукции появится как заключительный постулат системы постулатов (A_1).

Несмотря на ограничения, связанные с отсутствием функциональных переменных, по существу все положения элементарной теории чисел, как ее обычно понимают, могут быть сформулированы и доказаны в A^0, за исключением только тех из них, которые прямо требуют функциональных переменных (таких, например, как принцип математической индукции или принцип, который сформулирован в упражнении 55.12). Мы здесь не будем заниматься фактическим осуществлением (хотя бы и частичным) всего этого и ограничимся тем, что отошлем читателя к *Grundlagen der Mathematik* Гильберта и Бернайса, где исследуется эквивалентная система. Решающим является принадлежащий Гёделю[523] метод введения с помощью определений таких числовых функций, которые отличаются как от сложения, так и от умножения, — например, возведение в степень, факториал, частное и остаток от деления, n-е простое число как функция от n и вообще все рекурсивные функции.

Другим примером является следующая система постулатов (A_1). Неопределяемыми терминами являются Σ и Π; определения-схемы для знаков Z_0, Z_1, $\equiv$ остаются такими же, как и в случае (A_0). Имеется тринадцать постулатов, из которых первые двенадцать совпадают с первыми двенадцатью постулатами системы (A_0), а тринадцатым является *постулат математической индукции*

$$Z_0(x_1) \supset_{\blacksquare} Z_1(y) \supset_{\blacksquare} F(x_1) \supset_{\blacksquare} F(x) \supset_x (\exists z)\,[\Sigma(x, y, z)F(z)] \supset (x)F(x).$$

Лежащая в основании логика есть (или формализована как) функциональное исчисление F^{1a}_2, т. е. функциональное исчисление первого порядка, содержащее тернарные функциональные константы Σ и Π и, кроме того, все пропозициональные и функциональные переменные — те же самые, которые содержит исчисление F^{1a} из упражнения 30.4, с той только разницей, что теперь аксиомы и правила § 40 используются вместо аксиом и правил § 30. Логистическую систему, получаемую добавлением постулатов (A_1) к этой лежащей в основе логике, мы будем считать формулировкой *элементарной теории чисел*, или (как мы будем еще говорить) *арифметики первого порядка* [524].

Постулаты (A_1) можно было бы, разумеется, присоединить как к лежащей в основе логике к функциональному исчислению второго или более высокого порядка и получить таким образом более сильную систему, но мы предпочитаем вместо этого использовать следующую отличную от (A_1) систему постулатов (A_2), которая, однако, эквивалентна при таком использовании системе (A_1).

Постулаты (A_2) являются по существу модифицированной для использования в настоящем контексте формой постулатов Пеано для натуральных чисел [525]. Имеется единственный неопределяемый термин — бинарная функциональная константа S. Знаки $=$ и $\neq$ являются теми, которые были введены в D22 и D23. А знаки Z_0 и Z_1 вводятся с помощью следующих определений-схем, в которых $\mathbf{a}$ — произвольная индивидная переменная, а $\mathbf{b}$ — следующая за $\mathbf{a}$ в алфавитном порядке индивидная переменная:

$$Z_0(\mathbf{a}) \to (\mathbf{b}) \sim S(\mathbf{b}, \mathbf{a});$$

$$Z_1(\mathbf{a}) \to (\exists \mathbf{b})_{\blacksquare} Z_0(\mathbf{b}) S(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Постулатами являются пять следующих:

$$(\exists y) S(x, y);$$

$$S(x, y) \supset_{\blacksquare} S(x, z) \supset_{\blacksquare} y = z;$$

$$S(y, x) \supset_{\blacksquare} S(z, x) \supset_{\blacksquare} y = z;$$

$$(\exists x) Z_0(x);$$

$$Z_0(x) \supset_{\blacksquare} F(x) \supset_{\blacksquare} F(y) \supset_y [S(y, z) \supset_z F(z)] \supset (y) F(y).$$

В интерпретации индивидами вновь являются натуральные числа, а S обозначает отношение *иметь в качестве последующего*, так что если a и b — значения переменных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначает t или f в соответствии с тем, равно ли b или нет $a + 1$. Детальная формулировка семантических правил для случая функционального исчисления второго порядка, взятого в качестве лежащей в основе логики, может быть проведена по аналогии и предоставляется читателю.

И в этом случае можно считать, что выражения $Z_0(\mathbf{a})$ и $Z_1(\mathbf{a})$ соответственно утверждают для значения a переменной $\mathbf{a}$, что a есть 0 и что a есть 1. В действительности при этом меняется смысл по сравнению с обозначениями Z_0 и Z_1, использованными в связи с (A_0) или с (A_1), но тот факт, что соответствующие пропозициональные функции остаются в экстенциональном, т. е. объемном, отношении теми же самыми, достаточен для целей математической теории.

Сходное замечание относится и к обозначениям Σ и Π, которые вводятся ниже с помощью определений вместо обозначений Σ и Π, появившихся в постулатах (A_0) и (A_1) в качестве неопределяемых терминов.

Логистическую систему, получаемую добавлением постулатов (A_0) к исчислению F^{1h}, мы называем A^0. Логистическую систему, получаемую добавлением постулатов (A_1) к исчислению F^{1a}_2, мы называем A^1. Те, которые получаются добавлением постулатов (A_2) к некоторому функциональному исчислению n-го порядка ($n = 2, 3, 4, \ldots$), содержащему все пропозициональные и функциональные переменные, соответствующие его порядку, и, кроме того, содержащему бинарную функциональную константу S, мы называем A^2, A^3, A^4, ... И мы называем A^n ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) формулировкой *арифметики n-го порядка.*

Детальное построение системы A^2 будет темой одной из дальнейших глав. Сейчас мы не будем больше заниматься этим вопросом и лишь сформулируем следующие определения-схемы, которыми вводятся обозначения Σ и Π вместо исходных обозначений Σ и Π из A^0 и A^1 [526]:

$$\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \to [Z_0(\mathfrak{b}_0) \supset_{\mathfrak{b}_0} . \mathfrak{a} = \mathfrak{c}_0 \supset_{\mathfrak{c}_0} F(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)][F(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0) \supset_{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} .$$
$$S(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1) \supset_{\mathfrak{b}_1} . S(\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \supset_{\mathfrak{c}_1} F(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)] \supset_F F(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$$
$$\Pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \to [Z_0(\mathfrak{b}_0) \supset_{\mathfrak{b}_0} . Z_0(\mathfrak{c}_0) \supset_{\mathfrak{c}_0} F(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0)][F(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0) \supset_{\mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_0} .$$
$$S(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1) \supset_{\mathfrak{b}_1} . \Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1) \supset_{\mathfrak{c}_1} F(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1)] \supset_F F(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}),$$

где в обоих случаях $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ — произвольные индивидные переменные, а $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{c}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ — первые четыре индивидные переменные, в алфавитном порядке следующие за последней в алфавитном порядке из переменных $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Нужно заметить, что эти определения не вводят обозначения Σ и Π в качестве функциональных констант или в качестве имен тех пропозициональных функций, которые в системах A^0 и A^1 обозначались через Σ и Π. В действительности система A^2 не содержит имен этих пропозициональных функций, и определения не указывают никаких формул из A^2, сокращениями которых были бы эти отдельно взятые буквы Σ и Π. Лишь обозначения $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ и $\Pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ в целом служат сокращениями формул из A^2.

Тем не менее для всякой теоремы из A^0 или A^1 существует соответствующая теорема из A^2, в которой обозначения $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ и $\Pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ из A^0 или A^1 заменены отличными от них обозначениями $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ и $\Pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ из A^2 [527]. Именно в этом смысле мы говорим, что A^2 достаточно для элементарной теории чисел и не нуждается в функциональных константах Σ и Π в качестве дополнительных неопределяемых терминов.

В тех случаях, когда вводимое по определению составное обозначение вызывает ложное впечатление, будто некоторая часть этого обозначения должна считаться обозначающей нечто (или же имеющей самостоятельное содержание) принято говорить о *контекстуальных определениях*. Например, двумя только что данными определениями-схемами буквы Σ и Π определены контекстуально: они становятся осмысленными только в частных контекстах $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\Pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, но не сами по себе и не в других контекстах. Точно так же определения-схемы, введенные ранее в настоящем параграфе, будь то в связи с A^0 и A^1 или в связи с A^2, контекстуально определяют буквы Z_0 и Z_1.

С другой стороны, D6 (например) не стоило бы, как правило, называть контекстуальным определением знака $\equiv$, и D22 не следовало бы называть контекстуальным определением знака $\equiv$. Различие здесь в том, что в обозначениях, вводимых посредством D6 и D22, нет ничего такого, что наводило бы на мысль, будто знаки $\equiv$ и $\equiv$, взятые отдельно, осмыслены каким-либо образом (например, в качестве сокращений некоторых пп-формул логистической системы).

Таким образом, контекстуальность определений Σ и Π является следствием того обстоятельства, что в приведенных выше определениях-схемах мы ввели для использования после букв Σ и Π те же самые скобки и запятые, которые мы используем также после функциональных переменных и функциональных констант. Контекстуальный характер определений мог бы быть устранен заменой обозначений $\Sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ и $\Pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ на, скажем, $\Sigma_{\mathfrak{abc}}$ и $\Pi_{\mathfrak{abc}}$. Однако удобство использования обычных скобок и запятых перевешивает опасность возможных ошибок[528], а настоящее разъяснение должно служить предотвращению недоразумений.

Мы теперь переходим к рассмотрению другой, отличной от прежней, точки зрения на постулаты математической теории. Эта точка зрения представляется возможной в определенной связи и также нуждается в разъяснениях. Для того чтобы различать эти две точки зрения, мы будем, стоя на той из них, которая была принята до сих пор, говорить о *постулатах как дополнительных аксиомах логистической системы*, стоя же на новой точке зрения, мы будем говорить о *постулатах как пропозициональных функциях*[529].

Вначале необходимо ввести понятие *представляющей формы* постулата, принадлежащего к некоторой данной системе постулатов[530].

Если дана некоторая система постулатов, то мы прежде всего выбираем для каждого неопределяемого термина соответствующую переменную того же самого типа (т. е. индивидной константе ставим в соответствие индивидную переменную, n-арной функциональной константе ставим в соответствие n-арную функциональную переменную), причем делаем это таким образом, чтобы эти переменные были отличны друг от друга и занимали только нечетные места в алфавитном порядке (первое, третье, пятое и т. д.). Для того чтобы сделать эту процедуру определенной, мы должны в каждом случае выбирать первые в алфавитном порядке подходящие переменные; в тех же случаях, когда имеется несколько неопределяемых терминов одного типа, они должны рассматриваться в их собственном алфавитном порядке (в том порядке, в котором они были первоначально перечислены) и соответствующие им переменные должны вводиться в этом порядке. После этого мы заменяем каждый постулат его замыканием всеобщности, где „замыкание всеобщности" понимается таким образом, что все свободные переменные постулата связаны начально расположенными кванторами общности, и где поэтому в некоторых случаях получаемое выражение может быть пп-формулой не той логики, которая лежит в основе постулатов, а лишь функционального исчисления следующего более высокого порядка. После этого мы производим в этих замыканиях постулатов алфавитные замены всех переменных, заменяя переменную, занимающую m-е место в алфавитном порядке переменных ее типа, на переменную того же типа, занимающую $2m$-е место в алфавитном порядке. Наконец, в каждом постулате мы подставляем всюду вместо встречающихся там неопределяемых терминов (констант) соответствующие им переменные. Результат этих подстановок есть *представляющая форма* постулата.

Например, в системе постулатов (A_1) представляющей формой постулата математической индукции является следующая пп-формула чистого функционального исчисления второго порядка:

$$(G)\,(x_1)\,(y_2)\,.\,(x_3)F(y_2,\ x_3,\ x_3) \supset .\,(z_1)\,H(x_1,\ z_1,\ z_1) \supset .\,G(y_2) \supset .$$
$$G(y) \supset_y (\exists z_1)\,[F(y,\ x_1,\ z_1)\,G(z_1)] \supset (y)\,G\,(y).$$

Получив таким образом представляющие формы постулатов, мы можем точно так же ввести представляющие формы и любого предложения или пропозициональной формы [531] **B** той логистической системы, которая состоит из лежащей в основе логики и постулатов. А именно, мы применяем к **B** ту же самую процедуру, которую применяли к постулатам.

Для того чтобы ввести понятие модели системы постулатов, предположим, что Γ есть класс представляющих форм постулатов, а F — чистое функциональное исчисление наименьшего порядка, в котором все формулы класса Γ являются пп-формулами [532]. Тогда *моделью* постулатов является непустая область индивидов $\mathfrak{J}$ вместе с такой системой значений свободных переменных представляющих форм постулатов, которая совместно выполняет Γ в $\mathfrak{J}$ (или, иными словами, при которой все представляющие формы постулатов одновременно принимают значение t в соответствии с понятием „значение", определенным в теоретическом синтаксисе исчисления F).

Заметим, что различные определения „значения", введенные для различных чистых функциональных исчислений, согласованы между собой в том смысле, что пп-формула **A** некоторого чистого функционального исчисления F получает для данной системы значений ее свободных переменных одно и то же значение независимо от того, берется ли **A** в качестве пп-формулы исчисления F или в качестве пп-формулы одного из чистых функциональных исчислений более высокого, чем F, порядка. По отношению к чистым функциональным исчислениям первого и второго порядков это ясно из тех определений, которые уже даны, и это будет оставаться верным и для чистого функционального исчисления третьего и более высоких порядков (которые будут рассмотрены в главе VI). Следовательно, в связи с некоторой моделью системы постулатов мы можем говорить о *значении для* этой модели представляющей формы всякой пп-формулы из лежащей в основе логики, даже если эта представляющая форма является пп-формулой лишь в функциональном исчислении более высокого порядка, чем требуется для представляющих форм рассматриваемых постулатов.

Если нам теперь дана некоторая система постулатов, то вместо того, чтобы рассматривать теоремы логистической системы, мы можем рассматривать следствия из постулатов в следующем отличном от прежнего (и не эффективном) смысле. Предложение или пропозициональная форма **A** логистической системы, состоящей из лежащей в основе логики и постулатов, называется *следствием* постулатов, если представляющая форма формулы **A** имеет значение t для всякой модели постулатов [533].

С точки зрения разъясняемого нами теперь взгляда на теорию постулатов, каждый постулат рассматривается как такая пропозициональная функция, система аргументов которой должна состоять из непустой области индивидов $\mathfrak{I}$ вместе со значением каждой из свободных переменных представляющей формы этого постулата и значение которой для этих аргументов совпадает со значением представляющей формы постулата, определяемым этими аргументами. Аналогично, полной системе постулатов соответствует некоторая пропозициональная функция, система аргументов которой должна состоять из непустой области индивидов $\mathfrak{I}$ вместе с некоторым значением каждой из различных свободных переменных, встречающихся в представляющих формах постулатов, и значением которой является t или f в соответствии с тем, образуют ли эти аргументы модель постулатов или нет[534]. Следствия постулатов — в описанном выше неэффективном смысле „следования" — тоже соответствуют таким же образом пропозициональным функциям. Синтаксически математическая теория, порождаемая постулатами, состоит из всех вместе взятых пп-формул, являющихся следствиями[535]. Можно, однако, ожидать, что эта математическая теория будет иметь много интерпретаций. Действительно, поскольку мы предполагаем главную интерпретацию лежащей в основе логики, каждая из различных моделей системы постулатов дает одну интерпретацию для математической теории[536]. Таким образом, содержание математической теории не фиксировано, а само должно рассматриваться как значение некоторой функции[537].

Понятия непротиворечивости, независимости и полноты можно ввести в связи с какой-либо системой постулатов двумя различными путями, которые мы можем связать с двумя различными точками зрения на теорию постулатов. Мы будем различать „непротиворечивость относительно доказуемости" и „непротиворечивость относительно следствий" — и аналогично в случае независимости и полноты.

Понятие непротиворечивости, независимости и полноты относительно доказуемости будут в такой же степени существенно зависеть от выбора лежащей в основе логики, как и от самих постулатов. В случае же соответствующих понятий относительно следствий эта зависимость, как мы увидим в дальнейшем, может быть полностью или частично устранена.

Система постулатов будет называться *непротиворечивой относительно доказуемости*, если логистическая система, состоящая из постулатов и лежащей в основе логики, непротиворечива в одном из наших прежних смыслов (§ 17), скажем в том смысле, что не существует такой пп-формулы **A**, что как **A**, так и $\sim$ **A** являются теоремами [538].

Система постулатов будет называться *непротиворечивой относительно следствий*, если не существует пп-формулы **A**, такой, что как **A**, так и $\sim$ **A** являются следствиями постулатов. Здесь **A** есть некоторая пп-формула логистической системы, состоящей из постулатов вместе с лежащей в основе логикой. Однако зависимость от лежащей в основе логики сразу же устраняется следующей метатеоремой (которую мы в настоящий момент должны ограничить случаем, когда лежащая в основе логика является функциональным исчислением не более чем второго порядка, но которая в дальнейшем может быть обобщена на функциональные исчисления высших порядков):

**550. Система постулатов непротиворечива относительно следствий тогда и только тогда, когда она имеет модель.

Мы предоставляем читателю доказать как эту, так и следующую метатеорему:

**551. Если система постулатов непротиворечива относительно следствий, то она непротиворечива относительно доказуемости.

В системе постулатов постулат **A** будет называться *независимым относительно доказуемости*, если он не является теоремой логистической системы, состоящей из отличных от него постулатов вместе с лежащей в основе логикой. Постулат **A** будет называться *независимым относительно следствий*, если он не является следствием остальных постулатов.

Мы вновь предоставляем читателю доказательство следующих метатеорем:

552. В системе постулатов постулат **A является независимым относительно следствий тогда и только тогда, когда отличные от него постулаты имеют такую модель, для которой значением представляющей формы постулата **A** является f.

553. Если в некоторой системе постулатов постулат **A независим относительно следствий, то он независим относительно доказуемости.

Метатеорема **552 является основой обычного метода доказательства независимости некоторого постулата **A** из данной системы постулатов путем указания такой модели остальных постулатов, которая придает представляющей форме постулата **A** значение f. Такая модель называется *независимостным примером* для **A**[539].

Сходный метод доказательства непротиворечивости системы постулатов, а именно путем указания модели, также хорошо известен[540]. Однако в некоторых важных случаях оказывается, что хотя такое доказательство непротиворечивости и возможно, но значение его сомнительно, так как при доказательстве существования модели приходится пользоваться метаязыком, в котором уже имеются эквиваленты (в некотором подходящем смысле) постулатов и лежащей в основе логики. Например, непротиворечивость постулатов (A_0), (A_1) или (A_2) может быть доказана с использованием натуральных чисел для обычного построения модели. Это, однако, был бы способ рассуждений, который не имел бы, конечно, вовсе никакого веса в глазах того, кто действительно стал бы сомневаться в непротиворечивости обычной арифметики, и который, даже если задача сводится только к проверке корректности формализации некоторой неформально уже принятой теории, дает, как будто бы, сравнительно мало.

Система постулатов будет называться *полной относительно доказуемости*, если логистическая система, состоящая из постулатов вместе с лежащей в основе логикой, полна относительно преобразования **A** в $\sim$**A** (в смысле § 18). Однако такая полнота во многих важных случаях недостижима, как это показано в теореме Гёделя о неполноте, уже упомянутой в рассуждениях, следующих за **546.

Система постулатов будет называться *полной относительно следствий*, если представляющая форма всякой пп-формулы **A** из логистической системы, состоящей из постулатов вместе с лежащей в основе логикой, либо принимает для всех моделей постулатов значение t, либо принимает для всех моделей постулатов значение f.

Определенное таким образом понятие полноты относительно следствий не свободно от зависимости от выбора лежащей в основе логики. Однако такой независимостью от лежащей в основе логики обладает другое понятие полноты системы постулатов, а именно понятие категоричности, принадлежащее Хантингтону и Веблену [541], к определению которого мы приступаем.

Мы рассматриваем только тот случай, когда неопределяемые термины относятся к обозначениям функционального исчисления первого или второго порядка или функционального исчисления первого порядка с равенством, т. е. когда неопределяемые термины являются индивидными константами или функциональными константами в смысле этих исчислений. Однако распространение на высшие случаи получается непосредственно (ср. примечание 530).

Мы говорим, что две модели некоторой системы постулатов *изоморфны* друг другу, если существует такое одно-однозначное соответствие между областями индивидов, используемыми в этих моделях[542], что два значения, придаваемые в этих моделях некоторой встречающейся в представляющих формах постулатов свободной переменной, всегда соответствуют друг другу в силу этого одно-однозначного соответствия. То есть если в первой модели индивидной переменной $\mathfrak{a}$ дается значение a, а во второй модели переменной $\mathfrak{a}$ дается значение a', то a должно соответствовать a' в одно-однозначном соответствии между областями индивидов; и если в первой модели n-арной функциональной переменной $\mathfrak{f}$ дается значение Φ, а во второй модели переменной $\mathfrak{f}$ дается значение Φ', то пропозициональные функции Φ и Φ' должны быть так между собой связаны, чтобы каждый раз, когда индивиды $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ из первой области соответствуют в указанном порядке индивидам $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ второй области, значение $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ совпадало бы со значением $\Phi'(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$.

Далее, система постулатов называется *категорической*, если все ее модели изоморфны.

Мы предоставляем читателю доказательство следующих метатеорем, формулирующих некоторые очевидные зависимости между этими тремя понятиями полноты системы постулатов:

**554. Всякая система постулатов, которая полна относительно доказуемости, полна также относительно следствий.

**555. Всякая категорическая система постулатов полна относительно следствий.

**556. Пусть категорическая система постулатов имеет модель $\mathfrak{M}$; тогда всякая система постулатов с теми же самыми неопределяемыми терминами и с той же самой лежащей в основе логикой, если она полна относительно следствий и имеет модель $\mathfrak{M}$, должна быть категорической.

Наконец, прежде чем закончить этот параграф, мы рассмотрим еще один часто применяемый способ использования постулатов. А именно, вместо того чтобы служить базисом некоторой специальной отрасли математики, система постулатов может быть использована в ходе развития более общей математической теории в качестве определения какой-нибудь структуры частного вида, которая должна быть рассмотрена в контексте более общей теории.

В качестве примера мы можем взять постулаты для *области целостности с единицей*.

Одна из систем постулатов для области целостности с единицей может быть получена из постулатов (A_1), если отбросить постулат математической индукции, заменить пятый постулат на $(\exists x)\Sigma(x, y, z)$, заменить двенадцатый постулат на $(\exists x)(\exists y) \sim . x = y$ и добавить постулат $x_1 = x_2 \supset . F(x_1) \supset F(x_2)$. Тогда четвертый постулат перестает быть независимым и может быть отброшен. Таким образом, сохраняя те же определения-схемы, которые были использованы в связи с (A_0), мы имеем следующую систему двенадцати постулатов, которую будем называть (ID):

$$(\exists z)\Sigma(x, y, z);$$
$$\Sigma(x_1, x_2, y_1) \supset . \Sigma(x_2, x_3, y_2) \supset . \Sigma(y_1, x_3, z) \supset \Sigma(x_1, y_2, z);$$
$$\Sigma(x, y, z) \supset \Sigma(y, x, z);$$
$$(\exists x)\Sigma(x, y, z);$$
$$(\exists z)\Pi(x, y, z);$$
$$\Pi(x_1, x_2, y_1) \supset . \Pi(x_2, x_3, y_2) \supset . \Pi(y_1, x_3, z) \supset \Pi(x_1, y_2, z);$$
$$\Pi(x, y, z) \supset \Pi(y, x, z);$$
$$\Pi(x_1, y, z) \supset . \Pi(x_2, y, z) \supset Z_0(y) \vee x_1 = x_2;$$
$$(\exists x)\Pi(x, y, y);$$
$$\Pi(x_1, x_2, y_2) \supset . \Pi(x_1, x_3, y_3) \supset . \Sigma(x_2, x_3, y_1) \supset . \Sigma(y_2, y_3, z) \supset \Pi(x_1, y_1, z);$$
$$(\exists x)(\exists y) \sim . x = y;$$
$$x_1 = x_2 \supset . F(x_1) \supset F(x_2).$$

Если эти постулаты используются не в качестве базиса особой отрасли математики, а для введения в контексте более общей теории термина „область целостности с единицей" или какого-либо другого понятия с тем же значением, то они должны быть переписаны в виде определения-схемы. Обычно нужно иметь возможность говорить не только о том, что индивиды образуют область целостности с единицей относительно некоторой пары операций (в роли сложения и умножения), но и о том, что класс индивидов образует область целостности с единицей. Таким образом, определение-схема должна вводить некоторое обозначение, скажем id (**f**, **g**, **h**), в котором **f** и **g** — тернарные функциональные переменные, а **h** — сингулярная функциональная переменная.

Кроме того, должна иметься возможность понимать id (**f**, **g**, **h**) для значений Φ, Ψ и Θ переменных **f**, **g** и **h** как выражение того, что Θ является областью целостности с единицей относительно Φ и Ψ, понимая эти слова так, как это принято в неформальных рассмотрениях алгебры.

Выведенное из частной системы постулатов (ID), это определение-схема для id (**f**, **g**, **h**) имеет вид[543]:

D24. $\mathrm{id}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{h}(x) \supset_x . \mathbf{h}(y) \supset_y . \mathbf{h}(z) \supset_z . \mathbf{h}(x_1) \supset_{x_1} . \mathbf{h}(y_1) \supset_{y_1} .$
$\mathbf{h}(x_2) \supset_{x_2} . \mathbf{h}(y_2) \supset_{y_2} . \mathbf{h}(x_3) \supset_{x_3} . \mathbf{h}(y_3) \supset_{y_3} . (\exists z)[\mathbf{h}(z)\ \mathbf{f}(x, y, z)]$

$$\begin{gathered}
[\mathbf{f}(x_1, x_2, y_1) \supset_{\centerdot} \mathbf{f}(x_2, x_3, y_2) \supset_{\centerdot} \mathbf{f}(y_1, x_3, z) \supset \mathbf{f}(x_1, y_2, z)] \\
[\mathbf{f}(x, y, z) \supset \mathbf{f}(y, x, z)]\ (\exists x)\ [\mathbf{h}(x)\, \mathbf{f}(x, y, z)]\ (\exists z)[\mathbf{h}(z)\ \mathbf{g}(x, y, z)] \\
[\mathbf{g}(x_1, x_2, y_1) \supset_{\centerdot} \mathbf{g}(x_2, x_3, y_2) \supset_{\centerdot} \mathbf{g}(y_1, x_3, z) \supset \mathbf{g}(x_1, y_2, z)]\ [\mathbf{g}(x, y, z) \\
\supset \mathbf{g}(y, x, z)]\,[\mathbf{g}(x_1, y, z) \supset_{\centerdot} \mathbf{g}(x_2, y, z) \supset_{\centerdot} [\mathbf{h}(z) \supset_z \mathbf{f}(y, z, z)] \vee_{\centerdot} \mathbf{h}(x) \\
\supset_{x\centerdot} \mathbf{h}(y) \supset_{y\centerdot} \mathbf{f}(x_1, x, y) \supset \mathbf{f}(x_2, x, y)]\ (\exists x)\ [\mathbf{h}(x)\ \mathbf{g}(x, y, y)]\,[\mathbf{g}(x_1, \\
x_2, y_2) \supset_{\centerdot} \mathbf{g}(x_1, x_3, y_3) \supset_{\centerdot} \mathbf{f}(x_2, x_3, y_1) \supset_{\centerdot} \mathbf{f}(y_2, y_3, z) \supset \\
\mathbf{g}(x_1, y_1, z)]\ (\exists x)\, (\exists y)\, (\exists z)\, (\exists x_1)\, [\mathbf{h}(x)\, \mathbf{h}(y)\, \mathbf{h}(z)\, \mathbf{h}(x_1)\, \mathbf{f}(x, z, x_1) \sim \\
\mathbf{f}(y, z, x_1)]_{\centerdot}\ [\mathbf{h}(x) \supset_{x\centerdot} \mathbf{h}(y) \supset_{y\centerdot} \mathbf{f}(x_1, x, y) \supset \mathbf{f}(x_2, x, y) \supset_{\centerdot} \\
F(x_1) \supset_F F(x_2).
\end{gathered}$$

В литературе во многих неформальных исследованиях по абстрактной алгебре системы постулатов для группы, кольца, области целостности с единицей, поля и т. д. вводятся имено таким путем, т. е. в виде не аксиом, а определений, которые в соответствующем формальном исследовании появились бы в виде определений-схем, аналогичных D24. Формализация такого исследования абстрактной алгебры была бы тогда некоторым построением в пределах какого-либо чистого функционального исчисления второго порядка, скажем F_2^{1p}, к которому, возможно, были бы присоединены в качестве дополнительных аксиом аксиома вполне-упорядоченности индивидов и аксиома бесконечности (см. §§ 56, 57), одна или обе. Для некоторых частей построения может также оказаться необходимым использовать функциональные исчисления более высокого порядка, нежели второй, — это будет зависеть от того, что именно понимается под содержанием абстрактной алгебры. Во всяком случае, абстрактная алгебра оказывается, таким образом, формализованной в пределах одного из чистых функциональных исчислений, и в этом смысле мы можем при желании сказать, что она сведена к отрасли чистой логики.

Многие другие отрасли математики рассматривались обычно сходным образом, так что при формализации они оказываются полностью в пределах одного из чистых функциональных исчислений. И хотя в одних случаях это более естественно или более привычно, чем в других, но кажется очевидным, что при желании мы могли бы рассматривать таким же образом и всякую другую отрасль математики. Например, вместо того, чтобы строить элементарную теорию чисел на основе постулатов (A_1), добавленных в качестве дополнительных аксиом к некоторой лежащей в основе логике, мы могли бы преобразовать эти постулаты в определение термина „арифметика" ⟨„an arithmetic"⟩ (при формализованном рассмотрении — в определение-схему) и затем переформулировать и передоказать все обычные теоремы элементарной теории чисел в качестве общих теорем относительно „арифметики"[544].

Таким образом, можно сказать, что вся математика сводима к чистой логике и что логика и математика должны характеризоваться не как различные предметы, а как элементарная и более сложная части одного и того же предмета[545].

Упражнения к § 55

55.0. Распространите принципы дуальности *372—*374 на логистическую систему, полученную добавлением произвольных постулатов к некоторому прикладному функциональному исчислению второго порядка в качестве лежащей в основе логики. Проведите доказательство таким образом, чтобы охватить как частный случай доказательство принципа дуальности для чистого функционального исчисления второго порядка.

55.1. Следующие теоремы логистической системы A^0 докажите без использования постулатов (A_0) (т. е. как теоремы исчисления F^{1h}):

(1) $$x = x;$$

(2) $$x = y \supset_{\blacksquare} y = z \supset_{\blacksquare} x = z;$$

(3) $$x = y \supset_{\blacksquare} Z_0(x) \supset Z_0(y).$$

55.2. Докажите следующие теоремы логистической системы A^0, используя при этом только первые четыре постулата из (A_0):

(1) $$Z_0(x) \supset_{\blacksquare} Z_0(y) \supset_{\blacksquare} x = y;$$

(2) $$\Sigma(x, y, z_1) \supset_{\blacksquare} \Sigma(x, y, z_2) \supset_{\blacksquare} z_1 = z_2;$$

(3) $$x = y \supset_{\blacksquare} y = x.$$

55.3. Докажите (в указанном порядке) следующие теоремы логистической системы A^0, используя только первые пять постулатов из (A_0):

(1) $$(\exists x) Z_0(x);$$

(2) $$z_1 = z_2 \supset_{\blacksquare} \Sigma(x, y, z_2) \supset \Sigma(x, y, z_1).$$

55.4. С помощью (если нужно) результатов предыдущих упражнений докажите следующую теорему из A^0, используя только первые девять постулатов из (A_0):

$$\Pi(x, y, z_1) \supset_{\blacksquare} \Pi(x, y, z_2) \supset_{\blacksquare} z_1 = z_2.$$

55.5. С помощью результатов предыдущих упражнений докажите следующие теоремы логистической системы A^0, используя при этом только первые одиннадцать постулатов из (A_0):

(1) $$Z_0(y) \supset \Pi(x, y, y);$$

(2) $$z_1 = z_2 \supset_{\blacksquare} \Pi(x, y, z_2) \supset \Pi(x, y, z_1);$$

(3) $$y_1 = y_2 \supset_{\blacksquare} \Pi(x, y_2, z) \supset \Pi(x, y_1, z);$$

(4) $$Z_0(z) \supset_{\blacksquare} \Pi(x, y, z) \supset Z_0(x) \vee Z_0(y);$$

(5) $$(\exists x) Z_1(x).$$

55.6. Докажите следующие теоремы логистической системы, получаемой добавлением первых одиннадцати постулатов из (ID) к исчислению F^{1h} в качестве лежащей в основе логики:

(1) $$\Sigma(x, y, z_1) \supset_{\blacksquare} \Sigma(x, y, z_2) \supset_{\blacksquare} z_1 = z_2;$$

(2) $$\Sigma(x_1, y, z) \supset_{\bullet} \Sigma(x_2, y, z) \supset_{\bullet} x_1 = x_2;$$

(3) $$Z_0(x) \supset_{\bullet} Z_1(y) \supset \sim_{\bullet} x = y.$$

55.7. Докажите, что всякая не содержащая функциональных переменных теорема системы A^1 является также теоремой системы A^0.

55.8. В системе постулатов (A_1) докажите независимость седьмого постулата (закон ассоциативности умножения) с помощью следующего независимостного примера. Индивидами являются четыре натуральных числа 0, 1, 2, 3, а сложение и умножение задаются следующими таблицами:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	3	2
2	0	3	2	1
3	0	2	1	3

(То есть, говоря точнее, в представляющих формах постулатов знакам Σ и Π соответствуют функциональные переменные F^3 и H^3 соответственно; в модели, являющейся независимостным примером, значением переменной F^3 является пропозициональная функция Φ, такая, что $\Phi(a, b, c)$ есть t тогда и только тогда, когда $a + b = c$ согласно первой из приведенных таблиц, и значением переменной H^3 является пропозициональная переменная Ψ, такая, что $\Psi(a, b, c)$ есть t тогда и только тогда, когда $a \times b = c$ согласно второй из приведенных таблиц.)

55.9. В системе постулатов (A_1) докажите независимость восьмого постулата (закон коммутативности умножения) с помощью следующего независимостного примера. Индивидами являются 0 и все те комплексные числа $\alpha + \beta i$, в которых α и β — положительные рациональные числа. Сумма определяется как обычно. Произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю; в противном случае $(\alpha + \beta i) \times (\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + \beta\gamma i$ (где произведения $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ берутся обычным образом).

55.10. С помощью независимостных примеров докажите независимость остальных постулатов из (A_1).

55.11. С помощью независимостных примеров докажите независимость постулатов из (ID).

55.12. Выразите с помощью пп-формулы из A^1, что единственным тернарным отношением между натуральными числами a, b, c, которое удовлетворяет второй паре рекурсивных равенств из примечания 526 и дополнительно требованию, чтобы c определялось единственным образом при заданных a и b, является тернарное отношение Φ, такое, что $\Phi(a, b, c)$ имеет место в том и только в том случае, если $a \times b = c$ (в том смысле, что всякое тернарное отношение между натуральными числами, которое удовлетворяет двум рекурсивным равенствам и этому дополнительному требованию, формально эквивалентно Φ).

55.13. Докажите как теорему системы A^1 пп-формулу из предыдущего упражнения. (Используйте постулат математической индукции.)

55.14. Предположим, что знаки 0 и 1 введены в A^1 контекстуальным определением в соответствии с приводимым ниже определением-схемой. Пусть среди знаков $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ хотя бы один есть знак 0 или 1; пусть, далее, некоторые (возможно) являются знаками 0, некоторые другие (возможно) являются знаками 1, и пусть остальные являются индивидными переменными (не обязательно отличными друг от друга); пусть $\mathbf{f}$ будет n-арной функциональной переменной или функциональной константой, пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будут двумя первыми в алфавитном порядке отличными друг от друга индивидными переменными, которые не встречаются среди $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$, и пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ получены из $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ заменой всех вхождений знака 0 на $\mathbf{x}$ и всех вхождений знака 1 на $\mathbf{y}$; тогда

$$\mathbf{f}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n) \rightarrow (\exists \mathbf{x})(\exists \mathbf{y})\,[Z_0(\mathbf{x})\, Z_1(\mathbf{y})\, \mathbf{f}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)].$$

Для выражений, являющихся в соответствии с этим определением-схемой сокращениями пп-формул системы A^1, выведите в качестве производного правила вывода такое правило подстановки вместо индивидных переменных, которое позволяло бы подставлять вместо индивидной переменной не только другую индивидную переменную, но также и один из знаков 0 и 1 [546)].

55.15. Докажите, что система постулатов (A_1) категорична. [*Указание.* Пусть в одной модели Φ и Ψ будут значениями тех функциональных переменных, которые соответствуют Σ и Π соответственно, и пусть в другой модели Φ' и Ψ' будут значениями тех функциональных переменных, которые соответствуют Σ и Π соответственно. В первой области индивидов должны быть два однозначно определяемых индивида 0 и 1, отличных друг от друга и таких, что $\Phi(0, b, b)$ и $\Psi(1, b, b)$ имеют место для всех индивидов b из этой области. Во второй области должно быть два однозначно определяемых индивида $0'$ и $1'$, отличных друг от друга и таких, что $\Phi'(0', b, b)$ и $\Psi'(1', b, b)$ имеют место для всех индивидов b из этой области. Требуемое одно-однозначное соответствие между областями получаем, сопоставляя 0 и $0'$, 1 и $1'$, и каждый раз, когда a сопоставлено с a', а $\Phi(a, 1, c)$ и $\Phi'(a', 1', c')$ имеют место в соответствующих областях, c сопоставлено с c'. Доказательство проводится в метаязыке методом математической индукции.]

55.16. Выведите отсюда полноту относительно следствий системы постулатов (A_0) с исчислением F^{1h} в качестве лежащей в основе логики.

55.17. Покажите, что система постулатов (A_0) не категорична, так как, помимо обычной модели с натуральными числами в качестве индивидов, имеется еще и следующая модель. Индивидами служат положительные и отрицательные целые числа и нуль. Значением функциональной переменной, которая соответствует Σ, является тернарное отношение, имеющее место для a, b, c тогда и только тогда, когда $|a| + |b| = |c|$. А значением функциональной переменной, которая соответствует Π, является тернарное отношение, имеющее место для a, b и c тогда и только тогда, когда $|ab| = |c|$.

55.18. Доказанную в предыдущем упражнении некатегоричность системы постулатов (A_0) можно считать довольно тривиальной, так как существует такое одно-многозначное соответствие между областями индивидов двух указанных моделей, при котором значения функциональных переменных, соответствующих в этих моделях Σ и Π, соответствуют друг другу. Кроме того, вторая модель может быть исключена, если взять в качестве лежащей в основе логики подходящее простое прикладное функциональное исчисление первого порядка с равенством и заменить в четвертом и девятом постулатах „$x_1 = x_2$" на „$I(x_1, x_2)$". Пусть полученная таким образом из (A_0) система постулатов называется (A_I), и пусть логистическая система, полученная добавлением этой системы постулатов к подходящему простому прикладному функциональному исчислению первого порядка с равенством, называется A^I.

(1) Покажите, что система постулатов (A_I) полна относительно следствий.

(2) С помощью метатеорем из упражнения 48.22 докажите некатегоричность системы (A_I) и, следовательно, также некатегоричность системы (A_0) в менее тривиальном смысле [547].

55.19. Пусть V — бинарная функциональная константа. Рассмотрим систему постулатов, состоящую из одного постулата $(x)(y)\mathrm{V}(x, y)$ и присоединенную в качестве лежащей в основе логики к простому прикладному функциональному исчислению первого порядка, единственной функциональной константой которого является V. Покажите, что эта система постулатов полна относительно следствий, но не категорична.

55.20. Покажите, что области индивидов всех моделей следующей системы постулатов конечны, но что существуют модели с произвольно большими конечными областями индивидов. Имеется один неопределяемый термин — бинарная функциональная константа S.

Лежащей в основе логикой является прикладное функциональное исчисление первого порядка с равенством, среди исходных символов которого имеются все пропозициональные и функциональные переменные и единственной функциональной константой которого является S. Постулатами служат

$$S(x, y) \supset . S(x, z) \supset . y = z$$

и

$$F(x) \supset . F(y) \supset_y [S(y, z) \supset_z F(z)] \supset (y) F(y).$$

55.21. Пусть к постулатам предыдущего упражнения добавлен следующий бесконечный перечень постулатов:

$(\exists y) S(x, y)$;

$S(x_1, x_2) \supset . x_1 \neq x_2$;

$S(x_1, x_2) \supset . S(x_2, x_3) \supset . x_1 \neq x_3$;

$S(x_1, x_2) \supset . S(x_2, x_3) \supset . S(x_3, x_4) \supset . x_1 \neq x_4$;

$S(x_1, x_2) \supset . S(x_2, x_3) \supset . S(x_3, x_4) \supset . S(x_4, x_5) \supset . x_1 \neq x_5$;

. . . .

Покажите, что получающаяся в результате система постулатов непротиворечива относительно доказуемости, но противоречива относительно следствий [548].

55.22. Следующие предложения являются неформально сформулированными постулатами для *частичного порядка*, с отношением *предшествует* в качестве единственного неопределяемого термина[549]:

Никакой индивид не предшествует самому себе.

Если a предшествует b и b предшествует c, то a предшествует c.

Из нее мы получаем системы постулатов для *простого порядка*, добавляя следующий третий постулат[550]:

Если a и b — произвольные различные индивиды, то либо a предшествует b, либо b предшествует a.

В свою очередь из этой системы мы получаем систему постулатов для *вполне-упорядоченности* добавлением четвертой аксиомы[551]:

Во всяком непустом классе индивидов имеется первый индивид, т. е. индивид, предшествующий всем остальным индивидам класса.

(1) Обозначая отношение предшествования бинарной функциональной константой R, переформулируйте эти постулаты в терминах подходящего функционального исчисления первого порядка. (2) С помощью метода, использованного в тексте для преобразования постулатов (ID) в определение-схему D24 для $\mathrm{id}(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ найдите выражение в обозначениях чистого функционального исчисления второго порядка для каждого из следующих предложений: *класс Ψ* (индивидов) *частично упорядочен отношением Φ*; *класс Ψ просто упорядочен отношением Φ*; *класс Ψ вполне упорядочен отношением Φ*.

55.23. Для каждой из следующих имеющихся в литературе систем постулатов переформулируйте постулаты в обозначениях подходящего функционального исчисления (не более чем второго порядка), используя указываемые ниже функциональные константы в качестве неопределяемых терминов:

(1) Постулаты плоской эвклидовой геометрии. Веблен и Юнг, *Projective Geometry*, том 2, § 66, стр. 144—146. O, обозначающую тернарное отношение между A, B и C, которое имеет место тогда и только тогда, когда A, B и C расположены в порядке $\{ABC\}$; C, обозначающую кватернарное отношение между A, B, C, D, которое имеет место тогда и только тогда, когда AB конгруэнтно CD. (Опустите постулат непрерывности XVII. При формулировке постулата XVI следует воспользоваться постулатами (A_2) в том виде, как они сформулированы выше, изменяя их, однако, соответствующим образом, в частности заменяя функциональную константу S на бинарную функциональную переменную.)

(2) Та же самая система постулатов с добавлением следующего постулата непрерывности. Если K — некоторый непустой класс точек на прямой a и если B и C — такие точки прямой a, что всякая точка X класса K расположена в порядке $\{XBC\}$, то существует такая точка A прямой a, что всякая отличная от A точка X класса K расположена в порядке $\{XAC\}$ и никакая точка Z прямой a, расположенная в порядке $\{ZAC\}$, не обладает тем свойством, что всякая точка X класса K расположена в порядке $\{XZC\}$.

(3) Постулаты (действительной) плоской проективной геометрии. Коксетер, *The Real Projective Plane*, 2.21—2.25 (стр. 12), 3.11—3.16 (стр. 22) и 10.11 (стр. 138). P, обозначающую класс точек; L, обозначающую класс прямых; I, обозначающую отношение инцидентности; S, обозначающую кватернарное отношение разделения ⟨separation⟩[552].

(4) Постулаты трехмерной эквлидовой геометрии. Давид Гильберт, *Grundlagen der Geometrie*, седьмое издание (1930), §§ 1—8. O, C, P, L и I — как в частях (1) и (3); π, обозначающую класс плоскостей; ι, обозначающую отношение инцидентности между точками и плоскостями; K, обозначающую сенарное отношение между A, B, C, A', B', C', которое имеет место тогда и только тогда, когда угол ABC конгруэнтен углу $A'B'C'$. Особое внимание следует обратить на постулат линейной полноты („Axiom der linearen Vollständigkeit"), выражение которого средствами функционального исчисления не выше второго порядка представляет некоторую трудность и который может потребовать некоторой переформулировки или модификации для того, чтобы сделать такое выражение возможным.

(5) Постулаты (действительной) трехмерной проективной геометрии. Пири, *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, ser. 2, том 48, 1899, стр. 1—56. J, обозначающую тернарное отношение между a, b, c, которое имеет место тогда и только тогда, когда c расположено на прямой, проходящей через a и b.

(6) Постулаты Хантингтона для „теории действительных величин", *Transactions of the American Mathematical Society*, том 4, 1903, стр. 358—370.

(7) Постулаты Чёрча для „второго порядкового класса" или второго числового класса Кантора, *Transactions of the American Mathematical Society*, том 29, 1927, стр. 179.

(8) Постулаты А. Линденбаума для метрического пространства[553], *Fundamenta Mathematicae*, том 8, 1926, стр. 211; приводятся также Куратовским, *Topologie I*, первое издание (1933), стр. 82—83, или второе издание (1948), стр. 99. [Для введения понятия действительного числа используйте постулаты части (6) настоящего упражнения или какую-либо другую систему постулатов, служащую тем же целям.]

(9) Постулаты для полного пространства[553], получаемые добавлением к предыдущим постулатам постулата, приводимого Куратовским, *Topologie I*, первое издание, стр. 196, или второе издание, стр. 312.

55.24. В *многосортном функциональном исчислении*[554] (первого или более высокого порядка) имеются индивидные переменные более чем одного сорта, причем различные сорта отличаются друг от друга верхними индексами и имеется бесконечный перечень переменных каждого сорта. Скажем, в n-сортном функциональном исчислении индивидными переменными первого сорта являются x^1, y^1, z^1, x_1^1, ... ; индивидными переменными второго сорта являются x^2, y^2, z^2, x_1^2, ...; и т.д. до x^n, y^n, z^n, x_1^n, ..., которые являются индивидными переменными n-го сорта. Тогда имеются (или могут иметься) n сортов сингулярных функциональных переменных, которые вновь различаются верхними индексами и в каждом из которых имеется бесконечный перечень функциональных переменных; таким образом, F^1, G^1, H^1, F_1^1, ... являются сингулярными функциональными переменными первого сорта, F^2, G^2, H^2, F_1^2, ... являются сингулярными функциональными переменными второго сорта и т. д. И если $\mathfrak{a}$ есть индивидная переменная, а $\mathfrak{f}$ — сингулярная функциональная переменная, то $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ является пп-формулой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{a}$ принадлежат одному и тому же сорту. Имеются (или могут иметься) n^2 сортов бинарных функциональных переменных, которые различаются верхними индексами следующим образом: $F^{1,1}$, $G^{1,1}$, $H^{1,1}$, $F_1^{1,1}$, ...; $F^{1,2}$, $G^{1,2}$, $H^{1,2}$, $F_1^{1,2}$, и т. д., так что, например, $F^{2,1}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ правильно построена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}_1$ есть индивидная переменная второго сорта, а $\mathfrak{a}_2$ — индивидная переменная первого сорта. Точно так же имеются (или могут иметься) n^3 сортов тернарных функциональных переменных и т. д.

Для главной интерпретации некоторого n-сортного функционального исчисления должна иметься непустая область индивидов первого сорта, являющаяся областью значений индивидных переменных первого сорта; непустая область индивидов второго сорта, являющаяся областью значений индивидных переменных второго сорта; и т. д. (всего n областей индивидов). Тогда по аналогии с уже данными (в главах III и V) главными интерпретациями односортных функциональных исчислений первого и второго порядка ясно, каким образом различные функциональные переменные получают области значений, состоящие из пропозициональных функций.

В прикладном n-сортном функциональном исчислении (в отличие от чистого) могут также иметься индивидные и функциональные константы, каждая из которых должна принадлежать к какому-либо частному сорту, так же как и индивидные и функциональные переменные.

Беря в качестве остающихся исходных символов восемь перечисленных в начале § 30 несобственных символов, мы можем использовать для n-сортного функционального исчисления первого порядка те правила построения, которые даны в § 30, за исключением лишь правила 30 ii, которое должно быть изменено так, как это указано в первом абзаце настоящего упражнения; тогда правила вывода и аксиомные схемы могут быть теми же самыми, что и в § 30, только к схеме *306 добавляется требование, чтобы $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$ принадлежали к одному и тому же сорту. Что касается n-сортного функционального исчисления второго порядка, то его можно формулировать сходным образом, с добавлением соответствующих средств для квантификации функциональных переменных.

(1) Полностью сформулируйте исходный базис для n-сортного функционального исчисления второго порядка, который был бы как можно ближе к исходному базису исчисления $\mathrm{F}_?^2$, данному в § 50. Для произвольного фиксированного k покажите, что те теоремы системы, которые содержат индивидные переменные только k-го сорта, совпадают (если отвлечься от тривиальных различий в обозначениях) с теоремами исчисления F_2^2.

(2) Взяв двухсортное функциональное исчисление второго порядка в качестве лежащей в основе логики, считая индивиды первого сорта точками, а индивиды второго сорта прямыми, беря в качестве неопределяемых

терминов бинарную функциональную константу I, обозначающую отношение инцидентности, и кватернарную функциональную константу S, обозначающую отношение разделения, сформулируйте в этих обозначениях постулаты Коксетера для двумерной проективной геометрии [см. упражнение 55.23 (3)].

(3) Аналогичным образом сформулируйте постулаты Гильберта для двумерной геометрии Эвклида, взяв в качестве положенной в основу логики трехсортное функциональное исчисление второго порядка, считая точки, прямые и плоскости тремя сортами индивидов.

(4) Аналогичным образом сформулируйте постулаты для метрического пространства [упражнение 55.23 (8)], взяв в качестве положенной в основу логики двухсортное функциональное исчисление второго порядка и считая точки пространства и действительные числа двумя сортами индивидов.

(5) Логистическая система из части (2) настоящего упражнения (т. е. логистическая система, полученная прибавлением указанных постулатов к лежащей в основе логике) в некотором смысле эквивалентна логистической системе из 55.23 (3). В сходном смысле логистическая система из части (3) эквивалентна логистической системе из упражнения 55.23 (4), а логистическая система из части (4) эквивалентна логистической системе из упражнения 55.23 (8). Объясните, в каком смысле имеет место эта эквивалентность, и сформулируйте и докажите общую метатеорему, устанавливающую соответствующую эквивалентность во всех таких случаях. (Ср. статьи, цитированные в примечании 554.)

56. Вполне-упорядоченность индивидов. Возвращаясь к рассмотрению чистого функционального исчисления второго порядка F^{2p}_2, мы займемся вопросом об аксиомах, выразимых в обозначениях одного только чистого функционального исчисления второго порядка, которые для каких-либо целей или в какой-либо связи может оказаться желательным присоединить к F^{2p}_2 в качестве дополнительных аксиом.

Одной из таких аксиом, возможность присоединения которой к F^{2p}_2 мы хотим рассмотреть, является аксиома, позволяющая вполне упорядочить предметы.

Для того чтобы выразить это, мы можем воспользоваться определением вполне-упорядоченности, которое было дано в упражнении 55.22, и, записав в виде конъюнкции замыкания всеобщности четырех постулатов из 55.22, заменить повсюду неопределяемый термин „предшествует" на функциональную переменную F^2, а затем приписать к конъюнкции квантор существования $(\exists F^2)$. Однако получающееся выражение может быть упрощено опусканием третьего постулата, относительно которого можно показать, что он не является независимым. Таким образом мы получаем выписанную ниже аксиому (w). *Аксиома выбора* будет рассмотрена в связи с функциональными исчислениями более высоких порядков, хотя известные специальные случаи некоторой аксиомы выбора могут быть сформулированы уже в обозначениях функционального исчисления второго порядка и суммированы в аксиомной схеме[555]. Забегая вперед, мы отметим здесь, что из аксиом выбора будет следовать возможность вполне упорядочить не только индивиды, но и различные более высокие области, в частности возможность вполне упорядочить сингулярные пропозициональные функции (классы) индивидов, бинарные пропозициональные функции индивидов и т. д.; и обратно, аксиомы выбора будут следовать из таких предположений о вполне-упорядочиваемости.

Во всяком случае рассматриваемая нами теперь аксиома (w) не должна считаться частным случаем или слабой формой некоторой аксиомы выбора.

Ибо результатом присоединения ее в качестве аксиомы к F_2^{2p} является просто ограничение интерпретаций такими областями индивидов, которые могут быть вполне упорядочены, — процедура, которая должна быть приемлема даже для тех, кто не доверяет аксиомам выбора или предпочитает не принимать никакой аксиомы выбора.

Таким образом, следующая аксиома *вполне-упорядочиваемости индивидов* — или аксиома (w), как мы ее будем также называть, — должна рассматриваться в качестве возможной дополнительной аксиомы:

$$(\exists F) \centerdot (x) \sim F(x, x) \centerdot F(x, y) \supset_{xy} [F(y, z) \supset_z F(x, z)] \centerdot$$
$$G(x) \supset_{Gx} (\exists y) \centerdot G(y) \centerdot G(z) \supset_z F(y, z) \vee y = z.$$

Следуя методу наименования, который мы будем систематически использовать, мы называем $F_2^{2p(w)}$ логистическую систему, получающуюся в результате добавления аксиомы (w) к F_2^{2p}.

Упражнения к § 56

56.0. Переформулируйте (w) в виде эквивалентной аксиомы в предваренной нормальной форме, содержащей только четыре различных индивидных переменных, одну сингулярную функциональную переменную и одну бинарную функциональную переменную.

56.1. Докажите сделанное в тексте утверждение о том, что третий из четырех постулатов вполне-упорядочиваемости (255.22) не является независимым.

56.2. Сформулируйте и докажите в качестве теоремы логистической системы $F_2^{2p(w)}$ утверждение, что индивиды могут быть просто упорядочены. (Используйте определение простого порядка, данное в 55.22.)

56.3. Из аксиомы (w) следует, что для всякого отношения между индивидами существует некоторое много-однозначное подотношение с той же областью[556]. В обозначениях функционального исчисления второго порядка это есть[557]

$$(\exists G) \centerdot G(x, z) \supset_{xz} F(x, z) \centerdot F(x, z) \supset_{xz} (\exists z_1) \centerdot G(x, z) \equiv_z z = z_1.$$

Докажите это в $F_2^{2p(w)}$ в качестве теоремы.

56.4. Докажите ту же самую теорему в логистической системе, которая получается добавлением аксиомной схемы из примечания 555 к логистической системе F_2^{2p}.

57. Аксиома бесконечности. Пп-формула одного из функциональных исчислений может считаться *аксиомой бесконечности*, если она общезначима по меньшей мере в одной бесконечной области индивидов, но не общезначима ни в какой конечной области.

В чистом функциональном исчислении первого порядка с равенством и, следовательно, также в чистом функциональном исчислении первого порядка в действительности нет такой пп-формулы, которая могла бы в этом смысле считаться аксиомой бесконечности [558]. Поэтому различные аксиомы бесконечности, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются пп-формулами только функционального исчисления второго порядка [559].

Результатом добавления некоторой аксиомы бесконечности к исчислению F^{2p} в качестве дополнительной аксиомы является, конечно, ограничение интерпретаций такими областями индивидов, которые бесконечны. Мы предпочитаем взять такую аксиому бесконечности, которая, исключая конечные области индивидов, не накладывала бы на интерпретацию значительных дополнительных ограничений [560].

Для примера рассмотрим пп-формулу, которая получается, если записать замыкания всеобщности постулатов из (A_2), § 55, в виде конъюнкции, заменить повсюду функциональную константу S на функциональную переменную G^2 и затем приписать к этой конъюнкции квантор существования $(\exists G^2)$. Добавленная к исчислению F_2^{2p} в качестве дополнительной аксиомы, эта пп-формула ограничила бы области индивидов не просто бесконечными, но счетно-бесконечными областями. Это слишком суровое ограничение для того, что мы считаем целью аксиомы бесконечности. Однако, рассматривая аналогичным образом четыре (или три) из пяти постулатов (A_2), мы получаем более приемлемые аксиомы бесконечности (∞ 3) [или (∞ 4)], приведенные ниже.

Из различных аксиом бесконечности, добавление которых к F_2^{2p} можно рассматривать, мы перечислим здесь следующие пять, (∞ 1) — (∞ 5):

(∞ 1) $(\exists F)(x_1)(x_2)(x_3)(\exists y)\,.\,F(x_1, x_2) \supset [F(x_2, x_3) \supset F(x_1, x_3)]\,.\sim F(x_1, x_1)\,F(x_1, y)$.

(∞ 2) $(\exists F)(x)(\exists y)(z)\,.\,F(z, x) \supset F(z, y)\,.\sim F(x, x)\,F(x, y)$.

(∞ 3) $(\exists F)\,.\,(x)(\exists y)\,F(x, y)\,.\,F(x, y) \supset_{xy} [F(x, z) \supset_z y = z]\,.\, F(y, x) \supset_{xy} [F(z, x) \supset_z y = z]\,.\,(\exists x)(y) \sim F(y, x)$.

(∞ 4) $(\exists F)\,.\,(x)(\exists y)\,F(x, y)\,.\,F(y, x) \supset_{xy} [F(z, x) \supset_z y = z]\,.\, (\exists x)(y) \sim F(y, x)$.

(∞ 5) $\sim (\exists G)(F)\,.\,G(x, y) \supset_{xy} [G(x, z) \supset_z y = z]\,.\,F(x) \supset_x .\, F(y) \supset_y [G(y, z) \supset_z F(z)] \supset (y)F(y)$.

Аксиома (∞ 1) имеет очевидное отношение к примеру Бернайса и Шейнфинкеля пп-формулы чистого функционального исчисления первого порядка, которая выполнима в бесконечной области индивидов, но не выполнима ни в какой конечной области [561], аксиома (∞ 2) — к примеру Шютте такой пп-формулы чистого функционального исчисления первого порядка [562]; (∞ 3) и (∞ 4) — к постулатам (A_2) Пеано; наконец, аксиома (∞ 5) — к постулатам из упражнения 55.20 [563].

Аксиома (∞ 3) выражает утверждение о существовании одно-однозначного соответствия между индивидами и собственным подклассом индивидов[564]. Поэтому эту аксиому можно считать производной от определения Пирса—Дедекинда бесконечного класса как такого класса, который можно поставить в одно-однозначное соответствие с собственным подклассом[565].

Аксиома (∞ 4) выражает утверждение о существовании одно-многозначного соответствия между индивидами и собственным подклассом индивидов, представляя, таким образом, модифицированную форму определения Пирса—Дедекинда бесконечного класса.

Не следует ожидать, что как эти, так и другие аксиомы бесконечности, которые мы могли бы ввести в рассмотрение, окажутся эквивалентны друг другу в том смысле, что будет доказуема как теорема в исчислении F^{2p}_2 (материальная) эквивалентность любых двух из них.

Действительно, будем говорить, что пп-формула **B** *слабее, чем* пп-формула **A**, если $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ является теоремой исчисления F^{2p}_2, но $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ не является теоремой исчисления F^{2p}_2. Тогда, согласно одному результату А. Мостовского[566] и Б. А. Трахтенброта[567], не существует самой слабой аксиомы бесконечности, или, точнее говоря, для всякой аксиомы бесконечности существует более слабая аксиома бесконечности[568].

Что касается конкретных аксиом бесконечности (∞ 1)—(∞ 5), то некоторые из импликаций и эквивалентностей, имеющих место между ними, указаны в следующих упражнениях вместе со сходными рассмотрениями, относящимися к нескольким дополнительным аксиомам бесконечности, введенным в упражнениях. Они каждый раз сформулированы в виде утверждений, что некоторая частная аксиома бесконечности является теоремой в логистической системе, получаемой из F^{2p}_2 добавлением одной из других аксиом бесконечности, совместно с аксиомой вполне-упорядочиваемости предметов или без нее. Однако, ввиду теоремы дедукции, их (без существенных отличий) можно было бы также высказать в виде утверждений, что определенные импликации и эквивалентности являются теоремами исчисления F^{2p}_2.

Упражнения к § 57

57.0. Переформулируйте аксиому (∞ 5) в виде эквивалентной аксиомы в предваренной нормальной форме, без свободных переменных и с таким наиболее коротким префиксом, который можно будет получить использованием пропозиционального исчисления и элементарных законов кванторов в процессе сведения, проводимом без искусственных приемов.

57.1. В соответствии с только что сформулированным в тексте (без доказательства) результатом, если **A** есть некоторая аксиома бесконечности, то существует такая аксиома бесконечности **B**, что $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ является теоремой исчисления F^{2p}_2, а $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ — нет.

Опираясь на этот результат, покажите, что если **A** есть некоторая аксиома бесконечности, то существует такая аксиома бесконечности **B**, что $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ является теоремой в $F_2^{2p(w)}$, а $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ — нет.

57.2. Сформулируйте в обозначениях исчисления F_2^{2p} (как можно более точно) следующие неформально заданные аксиомы бесконечности:

(∞ 6) Существует подкласс индивидов, изоморфный натуральным числам, задаваемым постулатами Пеано.

(∞ 7) Если индивиды могут быть просто упорядочены, то они могут быть приведены в простой порядок, в котором нет последнего индивида[569].

(∞ 8) Существует такое одно-многозначное отображение некоторого класса индивидов на самого себя, которое не является одно-однозначным отображением этого класса на самого себя.

(∞ 9) Индивиды нельзя просто упорядочить таким образом, чтобы в каждом непустом классе индивидов имелся как первый, так и последний индивид[570].

(∞ 10) Существуют по крайней мере два различных индивида, и существует одно-многозначное соответствие между упорядоченными парами индивидов и индивидами[571]. (*Указание.* Соответствие между упорядоченными парами индивидов и индивидами можно считать тернарной пропозициональной функцией и, следовательно, выразить тернарной функциональной переменной.)

57.3. Докажите следующие аксиомы бесконечности как теоремы в $F_2^{2p(\infty 3)}$: (∞ 6); (∞ 1); (∞ 2); (∞ 5).

57.4. Докажите (∞ 3) как теорему в $F_2^{2p(w)(\infty 4)}$.

57.5. (1) Докажите (∞ 9) как теорему в $F_2^{2p(\infty 5)}$. (2) Докажите (∞ 5) как теорему в $F_2^{2p(\infty 9)}$.

57.6. Докажите (∞ 3) как теорему в $F_2^{2p(w)(\infty 5)}$ [572].

57.7. Докажите (∞ 5) как теорему в $F_2^{2p(\infty 4)}$.

57.8. Докажите (∞ 5) как теорему в $F_2^{2p(\infty 2)}$.

58. Предикативное и разветвленные функциональные исчисления второго порядка.

В примечании 535 уже были кратко рассмотрены возражения против абсолютного понятия *все* — как оно, например, включено в понятие *всех* классов индивидов, без каких-либо ограничений. Математики придерживаются самых различных мнений относительно значения этих возражений. Некоторые считают эти возражения бесцельными, другие же считают, что они ставят под серьезное сомнение методы и результаты обширных частей классической математики. В настоящем параграфе мы не ставим себе задачи обсуждать значение этих возражений; мы лишь хотим предложить некоторое уточнение этих возражений — или одной их формы — путем формулирования в виде логистической системы того ослабленного функционального исчисления второго порядка, к которому они ведут.

В той форме, в которой мы хотим принять их здесь, эти возражения впервые появляются, можно считать, у Анри Пуанкаре, в его высказываниях против того, что он называл, *непредикативными определениями*, т. е. définitions par ... une relation entre l'objet à définir et tous les individus d'un genre dont l'objet à définir est supposé faire lui-même partie (ou bien dont sont supposés faire partie des êtres qui ne peuvent être eux mêmes définis que par l'objet à définir" [573]*). Это возражение впоследствии нашло свое воплощение в *принципе порочного круга* ⟨vicious-circle principle⟩ Рассела[574], согласно которому „никакое множество не может содержать элементов, определенных в терминах самого этого множества", или „ничто, что содержит кажущуюся переменную, не должно быть возможным значением этой переменной"[575]. Подобно этому и Вейль возражал против того, что он считал порочным кругом в классическом анализе[576].

По представлениям Рассела (и в особенности Уайтхеда и Расселла в *Principia Mathematica*) принцип порочного круга является ограничением, накладываемым на возможные области значений пропозициональных и функциональных переменных, и, следовательно, ограничением, накладываемым на возможность подстановок вместо таких переменных. Применение этого принципа к функциональному исчислению второго порядка затрагивает в первую очередь аксиомную схему *509 и приводит вначале к *предикативному функциональному исчислению второго порядка* и затем к *разветвленным функциональным исчислениям второго порядка*, сформулированным ниже[577].

Следует иметь в виду, что функциональное исчисление первого порядка не затрагивается принципом порочного круга.

Предикативное функциональное исчисление второго порядка в формулировке $F_2^{2!}$ имеет те же самые исходные символы и пп-формулы, что и простое функциональное исчисление второго порядка F_2^2. Так же как и в случае простого функционального исчисления второго порядка, различаются чистые и прикладные, сингулярные, бинарные и т. д. предикативные функциональные исчисления второго порядка; однако в тех случаях, когда мы будем употреблять термин „предикативное функциональное исчисление второго порядка" без каких-либо дополнительных ограничений, мы будем всегда считать, что в число исходных символов входят пропозициональные переменные и функциональные переменные всех родов — сингулярные, бинарные, тернарные и т. д., причем индивидные и функциональные константы могут входить или не входить.

Четыре правила вывода *500—*503 остаются в $F_2^{2!}$ теми же, что и в F_2^2.

Аксиомы исчисления $F_2^{2!}$ задаются следующими семью аксиомными схемами (связь которых с аксиомами и аксиомными схемами исчисления F_2^2 очевидна):

$$\mathbf{A} \supset_{\centerdot} \mathbf{B} \supset \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{A} \supset [\mathbf{B} \supset \mathbf{C}] \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{A} \supset \mathbf{C}.$$

$$\sim \mathbf{A} \supset \sim \mathbf{B} \supset_{\centerdot} \mathbf{B} \supset \mathbf{A}.$$

---

*) „Определениями посредством... соотношения между определяемым объектом и *всеми* индивидами некоторого рода, к которому определяемый объект сам предполагается принадлежащим (или предполагаются принадлежащими сущности, которые сами могут быть определены только при помощи определяемого объекта)." — *Прим. перев.*

$\mathbf{A} \supset_{\mathfrak{a}} \mathbf{B} \supset . \mathbf{A} \supset (\mathfrak{a})\mathbf{B}$, где $\mathfrak{a}$ есть переменная любого рода, не являющаяся свободной в $\mathbf{A}$.

$(\mathfrak{a})\mathbf{A} \supset \mathrm{S}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathbf{A}|$, где $\mathfrak{a}$ есть индивидная переменная, $\mathfrak{b}$ есть индивидная переменная или индивидная константа и где никакое свободное вхождение переменной $\mathfrak{a}$ в формулу $\mathbf{A}$ не находится в такой пп-части формулы $\mathbf{A}$, которая имеет вид $(\mathfrak{b})\mathbf{C}$.

$(\mathfrak{p})\mathbf{A} \supset \check{\mathrm{S}}^{\mathfrak{p}}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$, где $\mathfrak{p}$ есть пропозициональная переменная, а $\mathbf{B}$ не содержит связанных пропозициональных или функциональных переменных.

$(\mathfrak{f})\mathbf{A} \supset \check{\mathrm{S}}^{\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$, где $\mathfrak{f}$ есть n-арная функциональная переменная, $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ — отличные друг от друга индивидные переменные, а $\mathbf{B}$ не содержит связанных пропозициональных или функциональных переменных.

Характерным является здесь ограничение, наложенное на подстановку вместо пропозициональных и функциональных переменных, которое содержится в двух последних схемах, а именно ограничение, согласно которому $\mathbf{B}$ не должно содержать связанных пропозициональных или функциональных переменных. В самом деле, если бы это ограничение было снято, то мы получили бы просто другую систему аксиом и правил для простого функционального исчисления второго порядка.

Предикативное функциональное исчисление второго порядка — это то же самое (отвлекаясь от незначительных различий в обозначениях), что и разветвленное функциональное исчисление второго порядка и *первого уровня*, и о его пропозициональных и функциональных переменных мы говорим, что они *предикативны* или *первого уровня* [578]. В разветвленных функциональных исчислениях второго порядка и более высоких уровней вводятся дополнительные пропозициональные и функциональные переменные последовательно более высоких уровней. При этом основной идеей является та, что при подстановке вместо пропозициональной или функциональной переменной данного уровня подставляемая пп-формула $\mathbf{B}$ может содержать связанные пропозициональные и функциональные переменные только более низких уровней. Так, разветвленное функциональное исчисление второго порядка и второго уровня $\mathrm{F}^{2/2}_2$ (в нашей теперешней его формулировке) содержит пропозициональные и функциональные переменные первого и второго уровней. Точно так же $\mathrm{F}^{2/3}_2$ содержит пропозициональные и функциональные переменные трех различных уровней и т. д. Разветвленное функциональное исчисление второго порядка и уровня ω, $\mathrm{F}^{2/\omega}_2$, содержит все пропозициональные и функциональные переменные всех (конечных) уровней.

Исходный базис этих (и других) разветвленных функциональных исчислений может быть одновременно задан следующим образом [579)].

Исходными символами являются, во-первых, восемь следующих:

$$[\supset] \sim (,) \forall .$$

Затем имеется бесконечный перечень индивидных переменных, тех же, что и в F^2_2:

$$x \quad y \quad z \quad x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \ldots$$

Далее, имеются, или могут иметься, пропозициональные переменные различных уровней, а именно, либо нет никаких пропозициональных переменных, либо же имеются все пропозициональные переменные не выше некоторого максимального уровня или все пропозициональные переменные всех уровней. Символами, принятыми в качестве пропозициональных переменных, являются следующие, где верхние индексы указывают уровень и где для всякого частного используемого уровня перечень переменных бесконечен:

$$\begin{array}{l} p^1 \; q^1 \; r^1 \; s^1 \; p^1_1 \; q^1_1 \ldots \\ p^2 \; q^2 \; r^2 \; s^2 \; p^2_1 \; q^2_1 \ldots \\ p^3 \; q^3 \; r^3 \; s^3 \; p^3_1 \; q^3_1 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Затем для каждого n имеются, или могут иметься, n-арные функциональные переменные различных уровней ($n = 1, 2, 3, \ldots$), а именно, либо нет никаких n-арных функциональных переменных, либо же имеются все n-арные функциональные переменные не выше некоторого максимального уровня или все n-арные функциональные переменные всех уровней. Символами, принятыми в качестве функциональных переменных, являются следующие, где первое число в верхнем индексе указывает на то, является ли функциональная переменная сингулярной, или бинарной, или тернарной и т. д., а второе число верхнего индекса указывает уровень:

$$\begin{array}{l} F^{1/1} \; G^{1/1} \; H^{1/1} \; F^{1/1}_1 \; G^{1/1}_1 \ldots \\ F^{1/2} \; G^{1/2} \; H^{1/2} \; F^{1/2}_1 \; G^{1/2}_1 \ldots \\ F^{1/3} \; G^{1/3} \; H^{1/3} \; F^{1/3}_1 \; G^{1/3}_1 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{2/1} \; G^{2/1} \; H^{2/1} \; F^{2/1}_1 \; G^{2/1}_1 \ldots \\ F^{2/2} \; G^{2/2} \; H^{2/2} \; F^{2/2}_1 \; G^{2/2}_1 \ldots \\ F^{2/3} \; G^{2/3} \; H^{2/3} \; F^{2/3}_1 \; G^{2/3}_1 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{3/1} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Наконец, могут иметься индивидные константы, или функциональные константы, или и то и другое вместе, причем для всякой функциональной константы должен быть указан ее уровень, а также является ли она сингулярной, бинарной, тернарной и т. д.

Правила построения остаются теми же, что и для простого функционального исчисления второго порядка F_2^2; при этом подразумевается, что уровень функциональных переменных и функциональных констант не принимается во внимание. Если, например, $\mathfrak{f}$ является n-арной функциональной переменной или функциональной константой, а $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — индивидные переменные или индивидные константы (или и те и другие), то $\mathfrak{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ правильно построена независимо от уровня $\mathfrak{f}$.

Применяются те же самые сокращения пп-формул и, в частности, те же определения, что и в F_2^2. Но в D20 и в D21 пропозициональная переменная s заменяется на пропозициональную переменную s^1 первого уровня, а в D22 и D23 функциональная переменная F^1 заменяется на функциональную переменную $F^{1/1}$ первого уровня [580].

В качестве дальнейшего сокращения записи пп-формул мы можем обычно опускать верхние индексы пропозициональных и функциональных переменных. Для того чтобы сделать это возможным, можно словами указывать уровень, который должен быть придан некоторой конкретной переменной. Или же, следуя *Principia Mathematica*, мы можем ставить после буквы знак восклицания для указания того, что представляемая ею переменная является предикативной, т. е. первого уровня.

Правила вывода — те же, что и в F_2^2, т. е. *500—*503.

Аксиомы задаются семью аксиомными схемами, очень близкими к тем, которые были выше даны для предикативного функционального исчисления второго порядка. Первые пять аксиомных схем точно такие же, как и в $F_2^{2!}$, — за исключением, конечно, того, что **A**, **B**, **C** являются теперь пп-формулами того конкретного разветвленного функционального исчисления второго порядка, аксиомы которого задаются, а в четвертой схеме $\mathbf{a}$ является переменной любого рода, относящейся к рассматриваемому разветвленному функциональному исчислению второго порядка (подчиненная условию, что $\mathbf{a}$ не свободна в **A**). Шестая и седьмая аксиомные схемы изменены следующим образом:

($\mathbf{p}$) $\mathbf{A} \supset \check{S}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{p}} \mathbf{A}|$, где $\mathbf{p}$ является пропозициональной переменной, связанные пропозициональные и функциональные переменные формулы **B** принадлежат уровню, более низкому, чем уровень переменной $\mathbf{p}$, а свободные пропозициональные и функциональные переменные формулы **B** принадлежат уровню, не более высокому, чем уровень переменной $\mathbf{p}$.

($\mathfrak{f}$) $\mathbf{A} \supset \check{S}_{\mathbf{B}}^{\mathfrak{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)} \mathbf{A}$, где $\mathfrak{f}$ есть n-арная функциональная переменная, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — отличные друг от друга индивидные переменные, все связанные пропозициональные и функциональные переменные формулы **B** принадлежат уровню, более низкому, чем уровень переменной $\mathfrak{f}$, а функциональные константы и свободные пропозициональные и функциональные переменные формулы **B** принадлежат уровню, не более высокому, чем уровень $\mathfrak{f}$.

Разветвленные функциональные исчисления второго порядка и различных уровней следующим образом точно определяются с помощью максимального уровня пропозициональных и функциональных переменных и функциональных констант. $\mathrm{F}_2^{2/1}$ содержит все переменные первого уровня и может содержать константы первого уровня, но не содержит никаких переменных или констант более высоких уровней (оно, таким образом, лишь несущественно отличается от $\mathrm{F}_2^{2!}$). $\mathrm{F}_2^{2/2}$ содержит все пропозициональные и функциональные переменные первого и второго порядков и может содержать функциональные константы этих уровней, но не содержит никаких переменных или констант более высоких уровней; и т. д. $\mathrm{F}_2^{2/\omega}$ содержит все пропозициональные и функциональные переменные всех уровней и может содержать функциональные константы любого уровня.

Особый интерес представляет чистое разветвленное функциональное исчисление второго порядка уровня ω, $\mathrm{F}_2^{2/\omega p}$, среди исходных символов которого имеются все возможные перечисленные выше виды переменных и нет никаких констант. Интересны также логистические системы, получаемые из $\mathrm{F}_2^{2/\omega p}$ прибавлением одной из аксиом бесконечности (∞ 1)—(∞ 4), где F считается переменной первого уровня, или добавлением бесконечного перечня аксиом, получаемых из аксиомы (w), если F считать переменной первого уровня, а G — всех возможных уровней (последовательно), или же добавлением и того и другого [581]. Кроме того, интересны логистические системы, получаемые прибавлением к $\mathrm{F}_2^{2/\omega p}$ функциональных констант и содержащих их постулатов.

К последнему виду систем относится *разветвленная арифметика второго порядка* $\mathrm{A}^{2/\omega}$, которую мы сейчас кратко сформулируем, прежде чем закончить этот параграф [582].

Система $\mathrm{A}^{2/\omega}$ в той ее интерпретации, которую мы имеем в виду, была бы, вероятно, неприемлема для авторов *Principia Mathematica*, так как они требуют, чтобы натуральные числа были определены и чтобы свойства их были доказаны, а не постулированы. С другой стороны, можно считать, что эта система согласуется с программой Вейля, высказанной в *Das Kontinuum*[583], или с идеями Пуанкаре, которые оба согласны с элементарными методами арифметики, включая и доказательство по математической индукции, представляющими собой (цитируем Вейля) „*ein letztes Fundament des mathematischen Denkens**).

*) Последнюю основу математического мышления. — *Прим. перев.*

Как сказано, $A^{2/\omega}$ получается из $F_2^{2/\omega p}$ добавлением функциональных констант в качестве неопределяемых терминов и добавлением постулатов. Функциональными константами являются Σ и Π — тернарные функциональные константы первого уровня, те же самые, что функциональные константы Σ и Π систем A^0 и A^1. Постулатами являются первые двенадцать постулатов из A^1 без каких-либо изменений и бесконечный перечень постулатов, получаемый из тринадцатого постулата системы A^1 (постулата математической индукции), если последовательно считать F^1 переменной всех возможных уровней [584].

Более подробно, $A^{2/\omega}$ можно называть формулировкой *разветвленной арифметики второго порядка уровня* ω, а разветвленные арифметики второго порядка более низких уровней можно получать, фиксируя максимальный уровень пропозициональных и функциональных переменных. Например, пп-формулами в $A^{2/2}$ являются те пп-формулы из $A^{2/\omega}$, которые не содержат пропозициональных или функциональных переменных выше второго уровня, а постулатами в $A^{2/2}$ являются те четырнадцать постулатов из $A^{2/\omega}$, которые не содержат пропозициональных или функциональных переменных выше второго уровня.

Система *предикативной арифметики второго порядка* $A^{2!}$ получается из *чистого предикативного функционального исчисления второго порядка* $F_2^{2!p}$ добавлением неопределяемых терминов и постулатов из A^1. Она, таким образом, лишь несущественно отличается от $A^{2/1}$.

Для $A^{2!}$ и для различных определенных здесь разветвленных арифметик второго порядка, включая и $A^{2/\omega}$, используются те же самые определения, что и для соответствующих функциональных исчислений второго порядка $F_2^{2!}$, $F_2^{2/\omega}$ и т. д., за исключением лишь того, что отбрасываются определения D22 и D23, а обозначение $[\mathbf{a} = \mathbf{b}]$ вводится так же, как это было сделано в § 55 для A^0 и A^1. Обозначения $Z_0(\mathbf{a})$ и $Z_1(\mathbf{a})$ тоже вводятся таким же образом, как для A^0 и A^1.

Упражнения к § 58

58.0. Докажите как теорему в $F_2^{2!}$:

$$x = y \supset_{\centerdot} y = x.$$

58.1. Считая F сингулярной функциональной переменной произвольного уровня [585], докажите как теорему в $A^{2/\omega}$:

$$x = y \equiv_{\centerdot} F(x) \supset_F F(y),$$

т. е. — в более подробной записи — $\Sigma(x, z, x_1) \supset_{zx_1} \Sigma(y, z, x_1) \equiv_{\centerdot} F(x) \supset_F F(y)$. (Используйте постулаты математической индукции.)

58.2. Считая F и G сингулярными функциональными переменными различных уровней, покажите, что следующая формула является теоремой в $A^{2/\omega}$, но не является теоремой в $F_2^{2/\omega}$:

$$F(x) \supset_F F(y) \equiv_{\blacksquare} G(x) \supset_G G(y).$$

(*Указание.* Рассмотрим для $F_2^{2/\omega}$ такую интерпретацию, в которой индивидами являются натуральные числа; значениями пропозициональных переменных являются t и f — одни и те же для всех уровней; пропозициональными функциями первого порядка, т. е. значениями функциональных переменных первого порядка, являются те, которые не различают между собой различные индивиды, т. е. только нулевой класс и универсальный класс, нулевое отношение и универсальное отношение и т. д.; пропозициональными функциями второго уровня являются те дополнительные пропозициональные функции, которые не делают между индивидами никаких различий, за исключением только различения четного и нечетного; пропозициональными функциями третьего уровня являются те дополнительные пропозициональные функции, которые различают индивиды только по их сравнимости с 0, 1, 2 или 3 по модулю 4 и т. д.[586] Читателю теперь уже будет ясно, как это семантическое рассуждение превратить в синтаксическое доказательство независимости.)

59. Аксиомы сводимости.

Рассел в 1908 г.[587] и впоследствии Уайтхед и Рассел в *Principia Mathematica* были вынуждены дополнить разветвленные функциональные исчисления не только аксиомой бесконечности и мультипликативными аксиомами ⟨*multiplicative axioms*⟩ (см. разъяснения в примечании 581), но также знаменитыми аксиомами сводимости. Это было вызвано тем, что иначе они не были в состоянии развить классическую математику в пределах своей системы таким образом, как они того хотели. Аксиомы сводимости утверждают, что для пропозициональной функции любого уровня существует формально эквивалентная ей пропозициональная функция первого уровня (причем подразумеваемая интерпретация такова, что сама по себе формальная эквивалентность пропозициональных функций недостаточна для того, чтобы они были идентичны). Это было объектом сильной критики[588], которая основывалась, в частности, на том, что результатом такого дополнения является в значительной степени восстановление непредикативных определений, ради исключения которых было введено различение уровней. Многие высказывали мысль[589] о том, что правильный выбор лежит, как будто, между простыми функциональными исчислениями и разветвленными функциональными исчислениями без аксиом сводимости. Трудно представить себе точку зрения, с которой позиция, представленная разветвленными функциональными исчислениями с аксиомами сводимости, казалась бы правильной. и во введении ко второму изданию *Principia Mathematica* (1925) Рассел действительно советует отказаться от аксиом сводимости[590]. Тем не менее, ввиду их исторической важности, представляется желательным привести здесь эти аксиомы (в той мере, в какой они относятся к функциональным исчислениям второго порядка).

Аксиомы сводимости, которые должны быть добавлены в качестве дополнительных аксиом к $F_2^{2/\omega}$, синтаксически представлены следующим двояко бесконечным перечнем, в котором G всегда есть функциональная переменная первого уровня, а F —

функциональная переменная произвольного более высокого уровня:

$$(\exists G)_{\blacksquare} F(x) \equiv_x G(x);$$
$$(\exists G)_{\blacksquare} F(x, y) \equiv_{xy} (G(x, y);$$
$$(\exists G)_{\blacksquare} F(x, y, z) \equiv_{xyz} G(x, y, z)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(Имеются также аналогичного вида аксиомы, предназначенные для добавления к функциональным исчислениям более высоких порядков.)

Эти аксиомы не являются независимыми, так как те из них, которые содержат сингулярные функциональные переменные, могут быть доказаны с использованием тех, которые содержат бинарные функциональные переменные, и т. д. по всему перечню. Кроме того, очевидно, что для всякого функционального n те аксиомы, содержащие n-арные функциональные переменные, в которых F принадлежит к более низкому уровню, можно доказать с использованием тех, в которых F принадлежит к более высокому уровню.

Упражнения к § 59

59.0. В логистической системе $\mathrm{F}_2^{2/\omega(\mathrm{r})}$, полученной добавлением к $\mathrm{F}_2^{2/\omega}$ аксиом сводимости, докажите

$$F(x) \supset_F F(y) \equiv_{\blacksquare} G(x) \supset_G G(y),$$

где F и G — сингулярные функциональные переменные различных уровней.

59.1. В $\mathrm{F}_2^{2/\omega}$ (следовательно, без использования аксиом сводимости) докажите

$$(\exists q)_{\blacksquare}\, p \equiv q,$$

где p и q — пропозициональные переменные различных уровней.

59.2. В логистической системе, полученной добавлением к $\mathrm{F}_2^{2/\omega}$ аксиом сводимости, содержащих бинарные функциональные переменные, докажите в качестве теорем аксиомы сводимости, содержащие сингулярные функциональные переменные.

59.3. Покажите, что аксиомы сводимости являются теоремами в логистической системе, получаемой добавлением к $\mathrm{F}_2^{2/\omega}$ аксиомной схемы из примечания 555, в которой $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ понимаются как предикативные функциональные переменные. Исследуйте вопрос о таком задании в этой аксиомной схеме уровней для $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$, чтобы из нее нельзя было вывести никакой теоремы $(\exists G)_{\blacksquare} F(x) \equiv_x G(x)$, в которой уровень G ниже уровня F.

ПРИМЕЧАНИЯ

Примечания к введению

[1] См. § 04. ⟨К стр. 15.⟩

[2] В свете как современных исследований, так и некоторых аспектов традиционной логики мы должны были бы назвать здесь, помимо доказательств, еще и другие отношения между предложениями или суждениями, которые также можно рассматривать со стороны формы, отвлекаясь от содержания. Сюда относятся, например, опровержения, совместимость, а также частичное подтверждение, которое играет большую роль в связи с индуктивными рассуждениями (ср. статью Хемпела в *The Journal of Symbolic Logic*, том 8, 1943, стр. 122—143).

Однако эти отношения несомненно могут и должны быть сведены к отношению доказательства путем, если нужно, соответствующих добавлений к языку-объекту (§ 07). Если, например, за язык-объект взят какой-либо подходящий формализованный язык, то по отношению к нему опровержение некоторого суждения можно отождествить с доказательством его отрицания. Соответствующее сведéние понятий совместимости и подтверждения к понятию доказательства требует, по-видимому, модальной логики, которая, хотя она и относится к формальной логике, выходит за рамки данной книги. ⟨К стр. 15.⟩

[3] Следуя Пирсу и другим авторам, мы для нашего логического термина принимаем написание *premiss*, для того чтобы отличить его от *premise* в других значениях, и особенно для того, чтобы отличить множественное число от юридического термина *premises*. ⟨К стр. 15.⟩

[4] Мы употребляем термин *proper name* ⟨*собственное имя*⟩ в таком расширенном смысле, потому что с терминами *singular name* ⟨*единичное имя*⟩ или *singular term* ⟨*единичный термин*⟩ по традиции связаны определенные ассоциации, которых мы хотели бы избежать. Слово *name* ⟨*имя*⟩ вполне подходит для наших целей, за исключением необходимости выделять *common names* (или *general names)* ⟨*общие имена*⟩, встречающиеся в обычных языках, поэтому мы в дальнейшем будем часто говорить просто *name* ⟨*имя*⟩.

Слово *term* ⟨*термин*⟩ используется нами в обычном смысле элемента терминологии и не имеет никакого отношения к традиционному учению о „categorical propositions" ⟨„категорических суждениях"⟩ и т. п. ⟨К стр. 17.⟩

[5] См. его статью „Über Sinn und Bedeutung" в *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, том 100, 1892, стр. 25—50. (Имеются итальянский перевод Л. Геймона в *Gottlob Frege, Aritmetica e Logica*, 1948, стр. 215—252 и английские переводы Макса Блэка в *The Philosophical Review*, том 57, 1948, стр. 207—230 и Герберта Фейгля в *Readings in Philosophical Analysis*, 1949, стр. 85—102. См. рецензии на них в *The Journal of Symbolic Logic*, том 13, 1948, стр. 152—153 и том 14, 1949, стр. 184—185.)

Сходная, но содержащая несколько существенных отличий теория предложена Карнапом в его новой книге *Meaning and Necessity* (1947).

Принципиально иная теория принадлежит Расселу. Она изложена в его статье в *Mind*, том 14, 1905, стр. 479—493; во введении к первому тому *Principia Mathematica* и в некоторых более поздних публикациях, в том числе в его книге *An Inquiry into Meaning & Truth* (1940). В своей теории Рассел доходит чуть ли не до отказа от собственных имен, которые он объявляет неправильностями обычных языков и которые, по его мнению, подлежат устранению при построении формализованного языка. Это ему, однако, не удается, так как он вынужден допустить узкий класс имен, которые являются именами качеств, известных непосредственно из ощущений, и которые, по терминологии Фреге, имеют *Bedeutung*, но не имеют *Sinn*. ⟨К стр. 17.⟩

[6] По терминологии Милля и других, следующих ему, не только единичное имя ⟨singular name⟩ (по нашей терминологии — собственное имя) обозначает, но и общее имя ⟨common or general name⟩; но, в отличие от первого, оно обозначает не отдельный предмет, а целое множество предметов. Так, например, общее имя „человек" обозначает и Рембрандта, и Скотта, и Фреге, и т. д.

В формализованных языках, которые мы будем изучать, ближайшими аналогами общего имени будут *переменная* и *форма* (см. § 02). Чтобы сохранить различие между собственным именем (или константой), с одной стороны, и, с другой стороны, такой формой, которая равносильна константе (в смысле § 02), а также такой переменной, область значений которой содержит лишь один предмет, — мы предпочтем использовать для переменных и форм термин, отличный от термина „обозначать". Поэтому в дальнейшем мы будем говорить об обозначении лишь по отношению к *собственным именам*.

С другой точки зрения, можно считать, что общие имена представлены в формализованных языках не переменными или формами, а собственными именами классов (классовые константы ⟨class constants⟩). Поэтому стала употребляться терминология, в которой собственное имя класса считается обозначающим различные элементы класса. Мы не будем следовать этому и будем считать, что собственное имя класса обозначает только этот класс. (Это совпадает с терминологией Милля, который отличает единичное собирательное имя ⟨singular collective name⟩, или собственное имя класса, от общего имени, называя последнее „именем класса" лишь в том распределительном смысле, что оно есть имя каждого члена класса.) ⟨К стр. 17.⟩

7) Таким образом, термин Фреге *bedeuten* переводится нами как *обозначать* ⟨*denote*⟩ или *называть* ⟨*name*⟩. ⟨К стр. 18.⟩

8) Собственно говоря, отношение называния — это тернарное отношение между некоторым языком, словом или предложением этого языка и обозначаемой вещью. Если в конкретном контексте фиксировать язык, то это отношение можно считать бинарным. Аналогично можно говорить о денотате имени *относительно данного языка*, опуская эту оговорку лишь тогда, когда язык фиксирован или когда недоразумение невозможно в силу других соображений. ⟨К стр. 18.⟩

9) Слово *вещь* употреблено здесь в самом широком смысле, как нечто, что может быть названо. ⟨К стр. 18.⟩

10) Применение термина *собственное имя* часто ограничивается именами этого рода, т. е. именами, в содержание которых входит, что денотат зовется этим именем или имеет право зваться этим именем. Как уже пояснялось, мы такого ограничения вводить не будем.

Интересно заметить, хотя это, собственно говоря, и не относится к нашему исследованию, что „автор *Вэверлея*" было псевдонимом Вальтера Скотта до тех пор, пока держалось в секрете, что этим автором является он. ⟨К стр. 18.⟩

11) А именно в тех случаях, когда подстановка одного имени вместо другого происходит в контекстах, содержащих *косвенные* (см. ниже) вхождения имен. ⟨К стр. 18.⟩

12) Данный пример принадлежит Расселу, а мысль, которую он иллюстрирует, — Фреге. ⟨К стр. 18.⟩

Этот ныне знаменитый вопрос был поставлен самому Скотту на обеде, на котором он присутствовал, в косвенной форме тоста: „За автора *Вэверлея*!". Скотт ответил категорическим отрицанием: „Сир, я не автор *Вэверлея*!". Поэтому, развивая наш пример, мы можем заметить, что Скотт, хотя он и отклонился от истины, все же не хотел, разумеется, зайти так далеко, чтобы отрицать свое тождество с самим собой (т. е. сказать, что „я — это не я"), и слушатели, конечно его и не поняли так, хотя некоторые среди них, наверное, были достаточно проницательны и догадались, что он солгал, говоря о своем авторстве.

13) Мы считаем это наиболее подходящим переводом термина Фреге *Sinn*, особенно потому, что при этом понимание слова *смысл* ⟨*sense*⟩ очень близко к обычному пониманию смысла некоторого выражения. (Рассел и некоторые следующие ему авторы переводят термин Фреге *Sinn* словом „*meaning*".) ⟨К стр. 18.⟩

14) Сходное различение было проведено Миллем между *точным значением* ⟨*denotation*⟩ и *сопутствующим значением* ⟨*connotation*⟩ имени. В действительности термин *connotation* может служить переводом термина *Sinn* в той же мере, как и термин *sense*, хотя Фреге, по-видимому, не имел в виду различения, проведенного Миллем, когда проводил свое собственное. В противоположность Миллю мы не будем допускать существования имен, имеющих точное значение ⟨denotation⟩, но не имеющих сопутствующего значения ⟨connotation⟩, и будем считать, что имя всегда должно указывать свое точное значение *каким-то образом*, т. е. посредством своего смысла или сопутствующего значения. Это не исключает того, что в некоторых специальных случаях смысл имени может сводиться к тому, что денотат зовется так-то и так-то (например, в случае личных имен ⟨personal names⟩), или к тому, что денотат есть то, что находится в данном месте в данное время (как в некоторых случаях указательного „этот"). Как из-за этого и некоторых иных отличий, так и потому, что содержание работы Фреге более существенно, мы примкнем с нашим различением денотата и смысла к Фреге, а не к Миллю. Однако исследование об именах в работе Милля *A System of Logic* (1843) можно с пользой прочитать в данной связи. ⟨К стр. 18.⟩

15) Этим мы вовсе не хотим придать понятию смысла какой-то психологический оттенок. Напротив, смысл (или концепт) — это постулированный абстрактный объект с определенными постулированными свойствами. Эти свойства лишь кратко намечены в приведенном неформальном рассмотрении; в частности, мы не рассматриваем допущений, которые должны быть сделаны относительно равенства смыслов, так как сейчас нам это не требуется. ⟨К стр. 18.⟩

16) Это перевод термина Фреге *drückt aus*. Термин Милля *connotes* так же мог бы быть использован здесь, однако нужно было бы следить за тем, чтобы не смешивать понимание этого термина Миллем с тем пониманием, которое стало с тех пор обычным в английском языке. ⟨К стр. 19.⟩

17) Употребление термина *концепт* ⟨*concept*⟩ является отклонением от терминологии Фреге. Это употребление было подсказано автору перепиской с Карнапом в 1943 г., и хотя оно не совпадает с употреблением термина *концепт* в последних работах Карнапа, но близко примыкает к нему. Это употребление хорошо согласуется также с употреблением у Рассела термина *class-concept* в *The Principles of Mathematics* (1903); ср. там § 69. ⟨К стр. 19⟩.

18) В то время, как точный смысл имени „Пегас" является переменным или неопределенным, мы будем считать, грубо говоря, что Пегас — это крылатый конь, принимавший такое-то и такое-то участие в таких-то и таких-то предполагаемых событиях. При этом следует иметь в виду лишь тот минимум деталей предания, который необходим для проверки, имеющей целью оправдать высказывание, что, вопреки общему мнению, „Пегас все же существовал".

Таким образом, мы считаем, что в существующем языке „Пегас" не является личным именем ⟨personal name⟩, имеющим тот смысл, что кто-то или что-то зовется так-то, а имеет более сложный смысл, описанный выше. Однако не нужно думать, что подобные вопросы, относящиеся к обычным языкам, всегда имеют один окончательный ответ. Напротив, всегда действительное положение неопределенно и остается много дискуссионных вопросов. ⟨К стр. 19.⟩

19) Например, в случае формализованного языка, полученного из какой-либо логистической системы главы X [или статьи автора в *The Journal of Symbolic Logic*, том 5, 1940, стр. 56—68] посредством интерпретации, сохраняющей главную интерпретацию переменных и символов λ (абстракция) и ( ) (применение функции к аргументу), достаточна следующая предосторожность при приписывании смыслов исходным константам. Смысл исходной константы типа o или ι должен быть таким, чтобы — на основании принятых предположений — обеспечивать существование денотата в соответствующей области $\mathfrak{O}$ (истинностных значений) или $\mathfrak{I}$ (индивидов). Для исходной константы типа $\alpha\beta$ смысл должен быть таким, чтобы — на том же основании — обеспечивать существование денотата, лежащего в области $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, т. е. являющегося функцией, отображающей (всю) область $\mathfrak{B}$, принятую за область значений переменных типа β, в область $\mathfrak{A}$, принятую за область значений переменных типа α.

Если такая интерпретация логистической системы совместима с ее формальными свойствами, то каждая правильно построенная формула без свободных переменных будет иметь денотат, как оно и должно быть.

Может случиться, как, например, в случае $\iota_{\alpha(\alpha)}$, что при самой непосредственной, или естественным образом напрашивающейся, интерпретации некоторой исходной константы типа $\alpha\beta$ она обозначает функцию, отображающую собственную часть области $\mathfrak{B}$ в область $\mathfrak{A}$. В таком случае нужно распространить (в случае нужды — искусственными методами) функцию на всю область $\mathfrak{B}$, чтобы получить функцию, область аргументов которой совпадала бы с областью $\mathfrak{B}$. Тогда смысл, приписанный исходной константе, должен быть таким, чтобы определять в качестве денотата эту последнюю функцию, а не первоначальную, имеющую областью аргументов собственную часть области $\mathfrak{B}$. ⟨К стр. 19.⟩

20) Например, в предложении „Скотт является автором *Вэверлея*” имена „Скотт”, „*Вэверлей*”, „автор *Вэверлея*” употреблены прямым образом. В предложении же „Георг IV хотел узнать, является ли Скотт автором *Вэверлея*”, те же имена употреблены косвенным образом (тогда как имя „Георг IV” — прямым). Далее, в предложении „Шлиманн искал местоположение Трои” имена „Троя” и „местоположение Трои” употреблены косвенным образом, потому что искать местоположение Трои — это не то же самое, что искать местоположение другого города, определенного другим концептом, даже если эти два города и имеют одно и то же местоположение (что может быть и неизвестным ищущему).

По теории содержания собственных имен Фреге, которой мы придерживаемся, предложение „Шлиманн искал местоположение Трои” утверждает, что некоторое отношение существует не между Шлиманном и местоположением Трои (так как Шлиманн мог искать местоположение Трои и при том условии, что Троя была лишь легендарным городом и ее местоположение никогда не существовало), а между Шлиманном и определенным концептом, а именно концептом, выражаемым именем „местоположение Трои”. Это, однако, не означает, что предложение „Шлиманн искал местоположение Трои” ⟨„Schliemann sought the site of Troy”⟩ утверждает то же самое, что и „Шлиманн искал концепт, выражаемый именем „местоположение Трои” ⟨„Schliemann sought the concept of the site of Troy”⟩. Напротив, первое предложение утверждает существование определенного отношения между Шлиманном и концептом, выражаемым именем „местоположение Трои” ⟨the concept of the site of Troy⟩, и это предложение истинно; второе же предложение утверждает существование такого же отношения между Шлиманном и концептом, выражаемым именем „концепт, выражаемый именем местоположение Трои” ⟨the concept of the concept of the site of Troy⟩, и это предложение, по всей вероятности, ложно. Отношение, существующее между Шлиманном и концептом, выражаемым именем „местоположение Трои”, не передается глаголом *искать*, и употребление этого глагола может ввести в заблуждение.

(Куайн в различных работах, в том числе в *The Journal of Philosophy*, том 40, 1943, стр. 113—127 различает „meaning” ⟨„смысловое содержание”⟩ имени и то, что это имя „designates” ⟨„обозначает”⟩. Это различение аналогично проводимому Фреге различению между sense ⟨смысл⟩ и denotation ⟨денотат⟩. Куайн проводит также различие между „purely designative” ⟨чисто обозначающими⟩ и другими вхождениями имен, которое во многих случаях соответствует проводимому Фреге различию между прямым ⟨ordinary⟩ и косвенным ⟨oblique⟩ вхождениями. Исследование теории Куайна и ее отличий от теории Фреге см. в работе автора настоящей книги в *The Journal of Symbolic Logic*, том 8, 1943, стр. 45—47, а также в работе Уайта в *Philosophy and Phenomenological Research*, том 9, № 2, 1948, стр. 305—308.) ⟨К стр. 19.⟩

21) Для того чтобы подчеркнуть отличие, о котором идет речь, мы иногда будем (как во втором абзаце примечания 20) употреблять такие предложения, как „концепт, выражаемый именем сэр Вальтер Скотт" ⟨„the concept of Sir Walter Scott"⟩, „концепт, выражаемый именем автор *Вэверлея*" ⟨„the concept of the author of *Waverley*"⟩, концепт, выражаемый именем „местоположение Трои" ⟨„the concept of the site of Troy"⟩ для обозначения именно тех концептов, которые *выражаются* соответственно именами „сэр Вальтер Скотт", „автор *Вэверлея*", „местоположение Трои". Так построенные выражения ⟨с определенным артиклем „the"⟩, например „концепт, выражаемый именем *местоположение Трои*" ⟨„the concept of the site of Troy"⟩, достаточно легко отличимы от сходных предложений, например „концепт местоположения Трои" ⟨„a concept of the site of Troy"⟩. Последнее выражение имеет в виду какой-либо один из многочисленных концептов указанного места.

Этот прием является лишь грубым средством, служащим целям неформального рассмотрения. Он не позволяет устранить косвенного употребления имен, так как предложение „концепт имени *местоположение Трои*" содержит косвенное вхождение имени „местоположение Трои". ⟨К стр. 19.⟩

22) Чтобы избежать серьезных трудностей, мы должны также принять, что если составляющее имя не имеет денотата, то и составное имя денотата не имеет. Такие примеры из обычных языков, которые, казалось бы, доказывают обратное, как, например, „миф о *Пегасе*", „поиски Понсе де Леоном *источника молодости*"*), следует рассматривать как доказательства косвенного употребления соответствующих (выделенных курсивом) составляющих имен. ⟨К стр. 20.⟩

23) Таким образом, различение смысла и денотата имеет аналог в применении к переменным. Две переменные, области значений которых определены различными концептами, должны считаться различными переменными, даже если бы их области значений и совпадали. Вопрос этот, однако, никогда не встанет в связи с каким-либо из фактически рассматриваемых ниже формализованных языков, так как множество областей, допускаемых в качестве областей значений для переменных, будет ограничено. ⟨К стр. 20.⟩

---

*) Имеется в виду упоминающийся в мифологии араваков источник Бимини (буквально: „источник жизни"). В 10-х годах XVI века Понсе де Леон отплыл из Пуэрто-Рико на поиски этого источника (в результате этого путешествия им была открыта Флорида). — *Прим. ред.*

[24] Невозможность такого отождествления сразу видна из обычного математического употребления переменных. Так, два собственных имени какой-либо области значений вполне заменимы друг другом, если только они имеют один и тот же смысл, но две различных переменных должны оставаться различными, даже если они имеют одну общую область значений, определенную одним и тем же концептом. Если, например, каждая из букв x и y является переменной с областью значений — множеством действительных чисел, то неравенства $x(x+y) \geqslant 0$ и $x(x+x) \geqslant 0$ все же различны, так как второе удовлетворяется тождественно, первое же — нет. ⟨К стр. 20.⟩

[25] Это предположение сделано лишь для простоты проводимого разъяснения. Мы будем употреблять термин *форма* и по отношению к выражениям, полученным сходным образом, но в которых x может иметь и иные вхождения. При этом мы будем только предполагать, что выражение содержит хотя бы одно вхождение x в качестве свободной переменной. (См. примечание 28 и относящееся к этому вопросу разъяснение в § 06.) ⟨К стр. 21.⟩

[26] Здесь мы употребляем слово *форма* в смысле, отличном от того, в котором употребляли это слово в § 00, когда говорили о форме и содержании. Если нужно будет подчеркнуть, что слово *форма* употребляется в смысле § 00, мы будем говорить о *логической форме*.

Мы употребляем теперь слово *форма* примерно так, как это обычно делается в алгебре. Можно даже считать, что мы получаем наше понятие из соответствующего алгебраического понятия путем распространения его на выражения, отличные от тех, к которым оно обычно применяется в алгебре (полиномы или однородные полиномы). В частном случае пропозициональных форм ⟨propositional forms⟩ (см. § 04) слово *форма* уже употребляется в логике независимо от его употребления алгебраистами — см., например, Кейнз, *Formal Logic*, 4-е изд., 1906, стр. 53; Хью Мак-Колл в *Mind*, том 19, 1910, стр. 193; Сусанна Лангер, *Introduction to Symbolic Logic*, 1937, стр. 91; Генрих Шольц, *Vorlesungen über Grundzüge der Mathematischen Logik*, 1949 (об употреблении термина *Aussageform* в немецком языке).

Вместо слова *форма* мы могли бы употреблять здесь слово *переменная* по аналогии с тем, как мы употребляем слово *константа*. То есть так же, как мы применяем термин константа к составному имени, содержащему другие имена (константы) в качестве составляющих частей, мы могли бы применять термин *переменная* к соответствующим выражениям, содержащим переменные в качестве составляющих частей. Такую терминологию можно было бы даже оправдывать математической традицией. Однако мы предпочитаем сохранить более разработанное словоупотребление, согласно которому переменная — это всегда единый символ (обычно буква или буква с индексами).

Нам кажется неудачным употребление некоторыми современными авторами слова *функция* (с определяющими прилагательными или без них) для обозначения того, что мы здесь назвали формой, так как оно вступает в противоречие с абстрактным понятием функции, которое будет разъяснено в § 03, и затемняет его. ⟨К стр. 21.⟩

27) Из допущения (2) в конце § 01 следует, что получаемое таким образом значение формы не зависит от выбора имени для данного значения переменной x.

Тем не менее и здесь уместно провести различие между смыслом и денотатом, потому что полное рассмотрение вопроса должно включать помимо *значения* формы (в том смысле, как мы его разъясняли в тексте; более полно его можно было бы назвать *денотатным*, или *предметным, значением*) еще и то, что можно было бы назвать *смысловым значением* формы. Смысловое значение формы определяется концептом некоторого значения переменной x и совпадает со смыслом выражения, получаемого из формулы при подстановке в нее вместо всех вхождений x произвольного имени, смыслом которого является этот концепт.

Нужно также отметить, что в конкретном языке форма может иметь значение даже для такого значения переменной x, которое не имеет имени в данном языке: достаточно, чтобы это значение переменной x имело имя в каком-либо соответствующем расширении языка — скажем в том, которое получается добавлением некоторого имени данного значения переменной x к словарю языка и разрешением подставлять его вместо всякого вхождения x в качестве свободной переменной. Точно так же форма может иметь смысловое значение для некоторого концепта данного значения переменной x, если какое-либо соответствующее расширение языка содержит имя, смыслом которого является этот концепт.

В дальнейшем мы увидим на специальных примерах, что возможно даже построение языков с такими словарями, которые содержат одни только переменные и формы и совсем не содержат констант. Однако самым естественным путем для введения содержания форм, встречающихся в этих языках, является, как будто, предположение о существовании расширений этих языков, содержащих константы, или, что почти то же самое, разрешение временно менять содержание переменных („фиксировать значение переменных") так, чтобы они становились константами. ⟨К стр. 21.⟩

28) Мы заимствуем этот термин у Гильберта (1922), Вильгельма Аккермана (1924), Дж. фон Неймана (1927), Гильберта и Аккермана (1928), Гильберта и Бернайса (1934). То, что мы здесь назвали свободной переменной, называют иногда *действительной пере-*

менной. Этот термин, введенный Пеано в 1897 г. и впоследствии заимствованный Расселом (1908), однако, менее удовлетворителен, так как противоречит обычному употреблению термина „действительная переменная" в смысле переменной, область значений которой составляют действительные числа.

Как мы увидим в дальнейшем (§ 06), свободную переменную нужно отличать от *связанной переменной* (по терминологии школы Гильберта), или *кажущейся переменной* ⟨*apparent variable*⟩ (терминология Пеано). Различие состоит в том, что выражение, содержащее x в качестве свободной переменной, имеет значения для различных значений переменной x, содержание же выражения, в которое x входит как связанная, или кажущаяся переменная, от x не зависит, и это не в том смысле, что выражение имеет одно и то же значение для всех значений x, а в том, что переменной x вообще нельзя приписывать значений. ⟨К стр. 21.⟩

[29] Вслед за У. В. Куайном мы принимаем этот этимологически более правильный термин вместо распространенного в настоящее время термина „unary". ⟨К стр. 21.⟩

[30] Используя разъясненное в примечании 27 понятие смыслового значения, которое естественным образом обобщается на n-арные формы, мы должны были бы для полноты распространить на формы и допущение (1). Это можно сделать так. Будем называть две формы *равносильными по смыслу*, если они согласованы по смысловому значению для каждой системы концептов значений их свободных переменных; будем называть форму *равносильной по смыслу* с константой, если для каждого набора концептов значений ее свободных переменных ее смысловое значение совпадает со смыслом константы; наконец, назовем две константы *равносильными по смыслу*, если они выражают один и тот же смысл. Тогда: (5) если в составной константе или форме заменить входящую в нее составную константу или форму на другую, совпадающую с ней по смыслу, то получающаяся при этом составная константа или форма совпадает по смыслу с исходной. ⟨К стр. 22.⟩

[31] Поэтому переменная (точнее говоря, различные примеры этой переменной или различные ее вхождения) может быть записана на бумаге так же точно, как и знак 7, хотя само число 7 можно так записать лишь в том непрямом смысле, что может быть записано нечто, обозначающее число 7.

Точно так же константа и формы являются символами или выражениями определенного рода. Правда, принято говорить о числах и физических величинах как о „константах", но такое словоупотребление не позволяет провести достаточно четкого различия между константами и переменными, и мы будем избегать его в этой книге. ⟨К стр. 22.⟩

[32] См. его статью в *Festschrift Ludwig Boltzmann Gewidmet*, 1904. (Упомянутая в конце этой работы его теория функций как „ungesättigt" является особой темой, не связанной необходимым образом с его важными положениями о переменных. Мы не будем придерживаться этой теории. То, что мы будем называть функцией (см. § 03), Фреге скорее назвал бы „Werthverlauf einer Function".) ⟨К стр. 22.⟩

[33] Тем не менее мы рассмотрим следующий пример, сходный с одним из примеров, приведенных Фреге. Должны ли мы обычный перечень из семнадцати имен считать полным перечнем саксонских королей Англии, или же мы должны считать, что это полный перечень только постоянных саксонских королей Англии и что следует принимать в расчет еще неопределенное количество переменных саксонских королей Англии? Такой переменный саксонский король был бы живым существом с весьма удивительными свойствами: он должен был бы, скажем, быть взрослым мужчиной по имени Альфред в 876 г. и мальчиком по имени Эдуард в 976 г.

В соответствии с нашим воззрением мы (следуя Фреге) склонны считать, что существует точно семнадцать саксонских королей Англии от Эгберта до Гарольда и что не существует никаких переменных или неопределенных саксонских королей, которыми следовало бы увеличить это число. Сказанное остается верным для натуральных чисел, для действительных чисел и вообще для множеств любых элементов—абстрактных или конкретных. Переменность или неопределенность там, где она существует, всегда есть вопрос языка и связана с символами или выражениями. ⟨К стр. 22.⟩

[34] Мы говорим „система обозначений" а не „язык", так как только специфически числовые обозначения можно считать хорошо разработанными. Они обычно дополняются (для формулирования теорем и доказательств) тем или иным из обычных языков, по выбору автора. ⟨К стр. 22.⟩

[35] Каждое положительное целое число есть действительное число. То есть в приводимых примерах эти термины понимаются таким образом. ⟨К стр. 23.⟩

[36] В пояснение примечания 28 приведем несколько примеров выражений, содержащих связанные переменные:

$$\int_0^2 x^x\,dx, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{m=n}\frac{x-m+1}{m\pi}.$$

Два первых выражения суть константы, содержащие x в качестве связанной переменной. Третье выражение есть сингулярная форма, содержащая x в качестве свободной, а m и n в качестве связанных переменных.

Переменная может иметь одновременно как свободные, так и связанные вхождения в одном и том же выражении. Примером может служить выражение $\int\limits_0^x x^x dx$, в котором двойное употребление буквы x не ведет к недоразумениям. Другими примерами являются переменная Δx в $(D_x \sin x)\Delta x$, переменная x в $xE(k)$, если обозначения $D_x \sin x$ и $E(k)$ заменить на выражения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

и

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

соответственно. ⟨К стр. 23.⟩

[37] Ответ на вопрос, имеют ли эти константы один и тот же смысл (и один и тот же денотат), зависит от общей теории равенства смыслов, в рассмотрение которой мы не входили — ср. примечание 15. Хотя Фреге и не сформулировал никакой законченной теории равенства смыслов, совершенно ясно, что он считал бы эти две константы различающимися по смыслу. Однако можно было бы привести убедительные доводы в пользу предположения о равенстве смыслов этих констант на том, скажем, основании, что если эти константы связать знаком равенства, то получится тождественно истинное высказывание (т. е. высказывание, истинное по чисто логическим соображениям), или на каком-либо ином подобном основании. Без сомнения, существует более чем одно значение слова „смысл", зависящее от принятого критерия равенства смыслов; выбор одного из них есть вопрос соглашения и удобства. ⟨К стр. 23.⟩

[38] Или любой другой константе, равносильной 0. ⟨К стр. 24.⟩

[39] Слова „операция", „дача", „определение" (в том смысле, как они здесь употребляются), несомненно, очень близки к понятию „функция". Поэтому, если понимать сказанное здесь как определение, то можно было бы заподозрить наличие порочного круга. Однако в данном введении мы занимаемся скорее неформальными разъяснениями, нежели формулировкой определений, а для такой цели использование синонимов может быть очень полезным. В конечном счете понятие функции — или какое-либо сходное понятие, например понятие класса, — приходится считать первоначальным, или неопределяемым. (В дальнейшем мы увидим, каким образом можно класс считать частным случаем функции и каким образом в определенной связи или для определен-

ных целей классы можно использовать для замены функций вообще.) ⟨К стр. 24.⟩

40) Это предложение является примером использования переменных для образования общих суждений. Хотя в настоящем введении мы и не разъясняли такое их использование, мы предполагаем его понятным, так как оно общепринято в математике. (См. конец § 06.) ⟨К стр. 24.⟩

41) Многозначная (сингулярная) функция может иметь более чем одно значение для каждого аргумента. Если написать имя такой функции и приписать к нему справа имя аргумента, взятое в скобки, то получающееся выражение будет общим именем (common name) (см. примечание 6), обозначающим значения функции для данного аргумента.

Хотя многозначные функции возникают в математике, казалось бы, естественным образом при изучении действительных или комплексных чисел, но тотчас возникают и трудности, которые нелегко преодолеть. Поэтому многозначные функции обычно заменяются тем или иным путем однозначными функциями. Один из методов состоит в замене многозначной функции соответствующей однозначной бинарной пропозициональной функцией, или отношением (§ 04). Другой метод состоит в замене многозначной функции однозначной функцией, значением которой для каждого аргумента является класс, а именно класс значений многозначной функции для того же аргумента. Еще один метод состоит в замене области определений, когда каждый аргумент, которому соответствует n значений функций, заменяется на n различных аргументов, каждому из которых ставится в соответствие одно из значений функции (именно эту роль выполняет риманова поверхность в теории функций комплексного переменного). ⟨К стр. 25.⟩

42) Хотя выражение „функция двух переменных" (так же как „функция трех переменных" и т. д.) является общеупотребительным, мы им пользоваться не будем, так как оно может привести к смешению *аргументов*, к которым функция применяется, с *переменными*, значениями которых эти аргументы являются. ⟨К стр. 25.⟩

43) Использование знака $=$ для обозначения тождественности двух вещей предполагается знакомым читателю. Мы не ограничиваем использование этого знака специальным случаем чисел и применяем его для обозначения тождественности вообще. ⟨К стр. 26.⟩

44) Мы предполагаем, что никакая из этих форм не содержит буквы f в качестве свободной переменной. В противном случае текст нашего разъяснения нужно было бы изменить, заменив в нем всюду букву f на какую-либо иную переменную с той же областью значений, но уже не являющуюся свободной переменной ни одной из форм. ⟨К стр. 26.⟩

[45] Поясним сказанное опять примерами из теории действительных чисел. Так, $x^3 + y^3$ есть функция от $x + y$ и xy. В то же время $x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$ не есть функция от $x + y$ и xy (что легко усмотреть из того, что форма $x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$ не симметрична). Далее, $x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 4x^3z + 4xz^3 + 4y^3z + 4yz^3$ есть функция от $x + y + z$ и $xy + xz + yz$, а $x^4 + y^4 + z^4$ не есть функция от $x + y + z$ и $xy + xz + yz$. ⟨К стр. 26.⟩

[46] То есть *пропозициональной формой* в смысле § 04 ниже. ⟨К стр. 26.⟩

[47] В соответствии с этим верно, например, что $x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$ есть функция от $x + y$ и xy, если $x \geqslant y$. Если, в частности, область значений переменных состоит из действительных или комплексных чисел, то употребляется геометрическая терминология: $x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$ есть функция от $x + y$ и xy в полуплоскости $x \geqslant y$. ⟨К стр. 27.⟩

[48] См. примечания 4 и 6. ⟨К стр. 27.⟩

[49] Например, в теории действительных чисел форма $(e^x - e^{-x})/2$ определяет в качестве присоединенной функции функцию sh. Эта функция определяется посредством следующего правила: значение функции sh для некоторого аргумента x равно $(e^x - e^{-x})/2$. Область определения функции sh состоит из всех таких x-ов (т. е. из всех таких действительных чисел x), для которых $(e^x - e^{-x})/2$ имеет значение. Иными словами, в данном случае область определения состоит из всех действительных чисел.

Разумеется, вовсе не обязательно, чтобы свободной переменной формы была буква x. Для ясности, пожалуй, лучше взять именно такой пример, в котором свободной переменной формы будет буква, отличная от x.

Так, форма $(e^y - e^{-y})/2$ определяет в качестве присоединенной функции функцию sh посредством следующего правила: значением функции sh для некоторого аргумента x является значение формы $(e^y - e^{-y})/2$ для значения x ее свободной переменной y. (То есть, в частности, значением функции sh для аргумента 2 является значение формы $(e^y - e^{-y})/2$ для значения 2 переменной y, и аналогично для всех возможных аргументов x.)

Обычно пишут уравнение

$$\mathrm{sh}\,(x) = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}),$$

считая его достаточным для выражения всего сказанного выше. Это уравнение можно даже называть *определением* функции sh в смысле примечания 168, (1) или (3). ⟨К стр. 27.⟩

[50] Согласно классической теории действительных чисел, множество сингулярных функций, отображающих действительные числа в действительные числа (или даже множество одних только

аналитических функций), несчетно. А так как множество форм какого-либо языка всегда не более чем счетно, то ясно, что не существует такого языка, или системы обозначений, в котором каждая функция, отображающая действительные числа в действительные числа, была бы присоединенной функцией какой-либо формы.

Из несчетности множества самих действительных чисел следует даже, что не существует языка, в котором каждое действительное число имело бы имя. (Такая вещь, как, например, бесконечное десятичное разложение, не может, конечно, рассматриваться как *имя* соответствующего действительного числа, поскольку бесконечное десятичное разложение не может даже быть полностью выписано или включено как часть в какое-либо фактически выписанное или произнесенное суждение.) ⟨К стр. 27.⟩

[51] Например, встречающиеся в примечании 49 формы $(e^x - e^{-x})/2$ и $(e^y - e^{-y})/2$ имеют одну и ту же присоединенную функцию. ⟨К стр. 28.⟩

[52] Так, выражения $\lambda x((e^x - e^{-x})/2)$, $\lambda y((e^y - e^{-y})/2)$, sh являются синонимами, поскольку они имеют не только один и тот же денотат (а именно, функцию sh), но и один и тот же смысл, если даже рассматривать этот вопрос с точки зрения самых строгих критериев совпадения смыслов.

[Говоря это, мы имеем в виду язык, или систему обозначений, в котором встречаются как выражение sh, так и выражение $\lambda x((e^x - e^{-x})/2)$. Как бы то ни было, но сам факт синонимии свидетельствует о принципиальной возможности обойтись без выражения sh, которое, если не считаться с вопросами удобства, можно всюду заменить более длинным выражением $\lambda x((e^x - e^{-x})/2)$. При построении формализованного языка мы предпочитаем избегать такого удвоения обозначений до тех пор, пока это достижимо без особых затруднений. См. § 11.]

Выражения $\lambda x((e^x - e^{-x})/2)$ и $\lambda y((e^y - e^{-y})/2)$ содержат переменные x и y соответственно в качестве *связанных* переменных в смысле примечаний 28 и 36 (и § 06 ниже). Это следует из того, что по своему содержанию (только что разъясненному) эти выражения являются не сингулярными формами, а константами. Однако выражение $(e^x - e^{-x})/2$ является, конечно, сингулярной формой, содержащей x в качестве свободной переменной.

Содержание такого выражения, как $\lambda x(ye^x)$, полученного из бинарной формы ye^x приписыванием λx, вытекает теперь как следствие из разъяснений относительно переменных и форм, сделанных в § 02. В этом выражении x есть связанная переменная, а y — свободная. Само выражение есть сингулярная форма, значениями которой являются сингулярные функции. Приписывая к этой форме λy, мы получаем константу, обозначающую некоторую сингулярную функцию, область значений которой состоит из сингулярных функций. ⟨К стр. 28.⟩

[53] При построении формализованного языка правила обращения со скобками должны быть сформулированы с большей тщательностью. На деле это происходит не путем объединения знака λx со скобками, а соответствующими предписаниями, относящимися к связи между скобками и различными другими обозначениями, которые могут встретиться в форме, к которой приписано λx. ⟨К стр. 28.⟩

[54] Так, в связи с теорией действительных чисел мы употребляем $\lambda x 2$ в качестве обозначения для функции, область определения которой состоит из всех действительных чисел и значением которой для всех аргументов является 2. ⟨К стр. 28.⟩

[55] Следует также обратить внимание на выражения, в которых за λ стоит переменная, отличающаяся от свободной переменной той формы, которая следует за этим, как, например, в выражении $\lambda y((e^x - e^{-x})/2)$. Из разъяснений § 02 следует, что это выражение есть сингулярная форма со свободной переменной x. Значениями этой формы являются константные функции. Если, например, взять 0 в качестве значения переменной x, то значением формы $\lambda y((e^x - e^{-x})/2)$ будет константная функция $\lambda y 0$.

Как в выражении $\lambda y((e^x - e^{-x})/2)$, так и в выражении $\lambda y 0$ y есть связанная, или кажущаяся, переменная. ⟨К стр. 28.⟩

[56] Термин „симметрия" обычен в математике. Поэтому мы уже употребили его в примечании 45 по отношению к формам, считая, что он будет понятен читателю. ⟨К стр. 28.⟩

[57] Это было сделано Карнапом в *Notes for Symbolic Logic* (1937) и других работах. ⟨К стр. 29.⟩

[58] „*Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.* Omnis ergo expressio analytica, in qua praeter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expressionem componentes sunt constantes, erit functio ipsius z . . . *Functio ergo quantitatis variabilis ipsa erit quantitas variabilis*". *Introductio in Analysis Infinitorum*, 1748, стр. 4; *Opera*, ser. 1, том 8, стр. 18*). См. далее примечание 62. ⟨К стр. 29.⟩

---

*) „*Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел, или постоянных количеств.* Всякое аналитическое выражение, в котором, за исключением переменного количества z, все остальные количества, составляющие это выражение, постоянны, будет функцией z . . . *Следовательно, функция переменного количества сама будет переменным количеством*". Л. Эйлер, *Введение в анализ бесконечно малых*, том I, ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 30. — *Прим. перев.*

[59] См. его *Werke*, том 1, стр. 135. Несущественно, что в этом месте Дирихле ограничивает свое высказывание непрерывными функциями, так как из других рассуждений в его работах ясно, что аналогичное обобщение допускается и по отношению к функциям разрывным. На странице 132 того же тома находится его знаменитый пример функции, отображающей действительные числа в действительные числа и имеющей точно два значения — одно для рациональных, другое для иррациональных аргументов.

Это обобщение, сделанное Дирихле, частично предвосхитил еще в 1749 г. Эйлер [см. доклад Буркгардта в *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, том 10, часть 2, 1908, стр. 13—14), а затем Фурье (см. его *Oeuvres*, том 1, стр. 207, 209, 230—232). ⟨К стр. 29.⟩

[60] *Werke*, стр. 3—4. ⟨К стр. 29.⟩

[61] В статье, перепечатанной в *Mathematische Annalen*, том 20, 1882, стр. 63—112. ⟨К стр. 29.⟩

[62] Цитата из работы Эйлера, приведенная в примечании 58, звучит так, как если бы его *переменное количество* было своего рода символом или выражением. Это, однако, не согласуется с другими высказываниями в той же работе, очень существенной для эйлерова понимания *функции*, например, „*Si fuerit y functio quaecunque ipsius z, tum vicissim z erit functio ipsius y*" (*Opera*, стр. 24). „Sed omnis transformatio consistit in alio mode eandem functionem exprimendi, quemadmodum ex Algebra constat eandem quantitatem per plures diversas formas exprimi posse" (*Opera*, стр. 32)*). ⟨К стр. 29.⟩

[63] Возникает вопрос о возможности, скажем, вопросительной логики или логики повелительной (императивной), в которой вопросительные или повелительные предложения и то, что они выражают (вопросы или приказания), играли бы роль, аналогичную той, которую в обычной логике играют повествовательные предложения и суждения. Попытки создания императивной логики, а также оптативной логики (или логики желаний) действительно имели место, однако эта тема выходит за рамки нашей книги. ⟨К стр. 30.⟩

[64] Ср. разъяснения, сделанные в § 02, об употреблении в связи с логистическими системами терминов *константа*, *переменная*, *форма*. Сказанное там в равной мере относится еще к целому ряду терминов того же рода, которые будут введены ниже, в частности

---

*) *„Если y будет какой-либо функцией z, то и, обратно, z будет функцией y".* (*Введение в анализ бесконечно малых*, том I, ОНТИ, М.—Л., стр. 35.) „. . . Все преобразование состоит в выражении той же функции другим образом, ибо, как известно из алгебры, одно и то же количество может быть выражено во многих различных формах." (Там же, стр. 40.) — *Прим. перев.*

к терминам *пропозициональная переменная, пропозициональная форма, оператор, квантор, связанная переменная, связка.* ⟨К стр. 30.⟩

[65] Для того чтобы отличить неутвердительное употребление предложения от утвердительного, особенно в формализованном языке, Фреге ставил перед предложением в первом случае горизонтальную черту, ——, а во втором случае знак $\vdash$—, используя таким образом добавление вертикальной черты для обозначения утверждения. Рассел, и Уайтхед и Рассел в *Principia Mathematica* не ставят горизонтальную черту перед неутверждаемыми предложениями, но, подобно Фреге, используют знак $\vdash$— как знак утверждения.

(Фреге ставил горизонтальную черту не только перед предложениями, но и перед остальными именами, рассматривая получающееся в этом случае выражение как ложное предложение, однако нам незачем останавливаться на этих деталях символики Фреге.)

В этой книге мы не будем употреблять какого-либо специального знака утверждения, считая (в формализованных языках) выделение предложения в отдельную строку или отдельные строки достаточным указанием на то, что оно утверждается. Это возможно благодаря тому, что неутвердительно употребляемые предложения всегда являются частями утверждаемых предложений, и благодаря возможности располагать материал на печатной странице в двух измерениях. (При одномерном расположении нельзя было бы, конечно, избежать использования знака утверждения, хотя бы и в качестве знака препинания.)

Знак $\vdash$, используемый ниже в главе I и в последующих главах, не есть знак утверждения Фреге—Рассела, он имеет там совершенно иное значение. ⟨К стр. 30.⟩

[66] Для Фреге, как для последовательного платоника, использование термина „постулируем" было бы неприемлемым. Его точка зрения была бы лучше передана утверждением, что ситуация указывает на *существование* таких двух предметов, как истина и ложь (*das Wahre und das Falsche*). ⟨К стр. 31.⟩

[67] Впервые явное использование двух истинностных значений встречается у Пирса в *American Journal of Mathematics*, том 7, 1885, стр. 180—202 (см. также его *Collected Papers*, том 3, стр. 210—238). Фреге впервые использовал истинностные значения в *Funktion und Begriff*, 1891, и в статье, относящейся к 1892 г., которая была упомянута в примечании 5. В этой статье впервые был сформулирован взгляд на предложения как на имена истинностных значений. ⟨К стр. 31.⟩

[68] Например, в *Logick* (1725) Исаака Уатса: „*Суждение* ⟨*a proposition*⟩ есть предложение ⟨a sentence⟩, в котором два или более

понятия ⟨*ideas*⟩ или *выражения* ⟨*terms*⟩ соединены или разъединены утверждением или отрицанием... Описывая суждение, я использую как слово выражение, так и слово понятие, потому что если чистые понятия объединены в мысли без помощи слов, то это скорее называется *мнением* ⟨*judgment*⟩, если же они облечены в слова, то это называется *суждением*, как в том случае, когда это делается лишь мысленно, так и в том случае, когда это выражается письменно или устно". Далее, Ричард Уатли в *Elements of Logic*, 1826 г. пишет: „Следующий раздел логики изучает *суждение* ⟨*proposition*⟩, которое есть *мнение* ⟨*judgment*⟩, *выраженное словами*. Суждение определяется логически, как указательное предложение, т. е. утверждающее или отрицающее (это исключает приказания и вопросы)".

Здесь Уатли частично следует Генри Олдричу (1691). Отрывок этот в действительности свидетельствует об отсутствии какого-либо существенного прогресса по сравнению с писавшим за полтысячелетия до того Петром Испанским и приведен здесь лишь в связи с историей термина „proposition" в английском языке. ⟨К стр. 32.⟩

69) Рассмотрите, например, нелепость, получающуюся при замене слова „proposition" на слова „declarative sentence" в Гетисбергском обращении Линкольна*). ⟨К стр. 32.⟩

70) Для дальнейших справок по истории вопроса мы отсылаем читателя к работе Карнапа *Introduction to Semantics*, 1942, стр. 235—236; см. также Итон, *General Logic*, 1931. ⟨К стр. 32.⟩

71) В соответствии со сказанным в примечании 22, такими предложениями являются те (во всяком случае, такими предложениями мы считаем, следуя Фреге, те), которые содержат какие-либо прямым образом употребленные имена, выражающие смысл, но не имеющие денотата. Примерами могут служить: „Нынешний король Франции плешив", „Нынешний король Франции не плешив", „Автор *Principia Mathematica* родился в 1861 г." (Последний пример может, конечно, быть включенным в такой контекст, в котором выражение „автор *Principia Mathematica*" будет означать примерно то же самое, что „только что упомянутый автор *Principia Mathematica*", и будет поэтому иметь денотат; мы же предполагаем, что такого контекста нет и упомянутое выражение означает „единственный автор *Principia Mathematica*" и, следовательно, не имеет денотата.)

---

*) Имеется в виду речь, произнесенная Авраамом Линкольном 19 ноября 1863 г. при заложении национального кладбища на месте поля сражения под Геттисбергом. Слово „proposition" встречается в этой речи в следующей фразе: „Fourscore and seven years ago, our fathers brought forth on this continent a new nation, conceived in liberty, and dedicated to the proposition that all men are created equal". Цитируется по книге *The Gett sburg speech and other papers by Abraham Lincoln*, 1899, стр. 39. — *Прим. ред.*

К предложениям, как частному случаю имен, применимо, конечно, и замечание, сделанное в конце примечания 22. Так, мы считаем истинными (и содержащими косвенные вхождения имен) следующие предложения: „Леди Гамильтон красотою была равна Афродите", „Источник молодости не расположен во Флориде", „Нынешний король Франции не существует". Легко подобрать примеры сомнительных суждений, по отношению к которым решение вопроса о наличии у них истинностных значений связано с трудностями. Это объясняется недостаточной определенностью содержания многих выражений в обычных языках. ⟨К стр. 32.⟩

[72] Обратите внимание на следующее различие. Сообщение о том, что некоторое суждение утверждалось (скажем, при таких-то и таких-то обстоятельствах), не только не нуждается в указании, какой при этом употреблялся язык, но вообще не имеет отношения к какому бы то ни было конкретному языку. Если же мы говорим о некотором предложении, что оно утверждалось, то мы не сумеем передать нашу мысль, пока не укажем, какой при этом употреблялся язык, и это потому, что не только одно и то же суждение может быть выражено различными предложениями на различных языках, но и одно и то же предложение может быть употреблено для утверждения различных суждений в зависимости от того, какой язык имеет в виду говорящий. Несущественно, что последняя ситуация сравнительно редка в основных ныне известных языках; она не редка, если учитываются все возможные языки.

Так, например, если пользоваться русским языком, то фраза „Сенека сказал, что человек есть разумное животное" сообщает, какое суждение утверждал Сенека, но не сообщает, каким он пользовался языком. С другой стороны, фраза „Сенека писал Rationale enim animal est homo" ничего не говорит о суждении, которое он утверждал, а лишь сообщает, какую он написал последовательность букв. (Читатель мог догадаться о том, что Сенека пользовался латынью, или мог знать об этом из каких-либо иных источников, однако в данной фразе это не сказано и даже не подразумевается, потому что, помимо латыни, существует много языков, в которых та же последовательность букв означает утвердительное суждение и — как знать — некоторые из них могли в свое время действительно употребляться.) ⟨К стр. 33.⟩

[73] Ср. примечание 26. ⟨К стр. 33.⟩

[74] Это утверждение кажется в общем и целом правильным, хотя вопрос сильно затемнен расхождениями различных авторов в отношении теории содержания ⟨theory of meaning⟩ и различием взглядов на понятия функции и суждения. Мысль о пропозициональной функции как об аналоге числовой функции анализа высказана Фреге, но термин „пропозициональная" функция

принадлежит Расселу. Первоначальное значение этого термина у Рассела не вполне ясно. В своем введении ко второму изданию *Principia Mathematica* (1925) он склоняется к принятому нами или очень близкому к нему истолкованию этого термина. ⟨К стр. 33.⟩

[75] Гл. XI. ⟨К стр. 34.⟩

[76] В главе VI. ⟨К стр. 34.⟩

[77] В соответствии с содержательным представлением о классах, согласно которому совпадают всякие два класса, имеющие одни и те же элементы, утверждение о единственности пустого класса было бы верно безотносительно к областям определения. Различение пустых классов с различными областями определения было проведено Расселом в 1908 г. как часть его теории типов (см. гл. VI). Еще раньше то же самое было сделано Эрнстом Шрёдером, хотя и по совершенно иным мотивам (см. его *Algebra der Logik*, том 1, 1890). ⟨К стр. 36.⟩

[78] При случае мы будем также пользоваться термином *тернарное отношение* (*кватернарное отношение* и т. д.), но просто *отношение* мы будем говорить, имея в виду бинарное отношение, т. е. бинарную пропозициональную функцию. ⟨К стр. 36.⟩

[79] Формализованные языки должны строиться с таким расчетом, чтобы членение на отдельные символы можно было производить в них совершенно точно. В обычных языках это членение возможно, как правило, лишь частично и приблизительно. Лучше даже сказать, что наше предположение о его возможности включает известную идеализацию.

Если взять, к примеру, какой-либо напечатанный русский текст, то простые символы, получающиеся при его членении, — это не всегда буквы, из которых составлены слова, потому что членение слова на отдельные буквы может не оправдываться содержанием. Часто отдельными символами являются слова. В других случаях это части слов, так как, например*), деление слова „книги" на „книг" и „и" или „холоднее" — на „холод" и „нее" оправдывается содержанием. В определенных случаях лингвистическая структура значимых частей есть идеализация, как, например, если считать, что „нельзя" имеет строение, аналогичное строению „нехватает", „лучше" — строение, аналогичное строению „холод-

* Здесь перевод отклоняется от подлинника, в котором речь идет, конечно, об английском тексте: «...Деление слова „books" на „book" и „s" или „colder" на „cold" и „er" оправдывается содержанием. В определенных случаях лингвистическая структура значимых частей есть идеализация, как, например, если считать, что „worse" ⟨„хуже"⟩ имеет строение, аналогичное строению „colder" ⟨„холоднее"⟩, или „I went" ⟨„я шел"⟩ — строение, аналогичное строению „I shall go" ⟨„я буду идти"⟩, или „had I known" ⟨„знай я"⟩ — строение, аналогичное строению „if I should hear" ⟨„если бы я слышал"⟩, и т. д.» — *Прим. ред.*

нее" и т. д. (Можно ожидать, что менее очевидные и более сложные примеры появятся при более детальном анализе.) ⟨К стр. 37.⟩

[80] По-видимому, всегда можно избежать такого положения, когда комбинация одних только несобственных символов дает выражение, имеющее самостоятельное содержание. В противном случае трудно было бы считать, что разложение этого выражения на составляющие его несобственные символы оправдано содержанием. ⟨К стр. 37.⟩

[81] Так, например, можно считать, что в выражении $(t - (x - y))$ внутренние скобки играют роль лишь указателей объединения части символов, из которых построено выражение, а именно $x - y$, и применены в комбинации с символом —, который обозначает вычитание. ⟨К стр. 37.⟩

[82] Тривиальным примером такого применения является использование символа | | для обозначения абсолютной величины. Можно считать, что в обоих введенных в § 03 обозначениях применения сингулярной функции к ее аргументу скобки играют такую двойную роль. ⟨К стр. 37.⟩

[83] Нет нужды, да и невозможно, задавать смысл новых констант каким-либо отдельным способом, отличным от способа задания самого обозначения, так как способ задания обозначения уже влечет за собой некоторый смысл, а фраза, которая используется для называния обозначения, также должна выражать некоторый смысл. ⟨К стр. 37.⟩

Другие вопросы возникают в тех случаях, когда наряду с константами допускаются имена, имеющие смысл, но не имеющие денотата. В обычных языках и в обычных системах математических обозначений такие имена как будто действительно употребляются в сочетании со связками. Некоторые из приведенных нами примеров связаны с использованием таких имен. Однако, как уже отмечалось, мы будем стремиться избегнуть этого в формализованных языках, которые будем рассматривать.

[84] Ср. примечание 27. ⟨К стр. 38.⟩

[85] Например, обычное обозначение (—) для вычитания действительных чисел можно считать связкой. Это значит, что можно рассматривать как связку комбинацию символов, состоящую из левой скобки, знака минус и правой скобки, при условии, что непосредственно перед знаком минус и непосредственно после него помещаются соответствующие константы или формы. Чтобы описать свойства этой связки, проявляющиеся в образовании нового содержания, нужно задать денотаты для всех новых констант, получающихся при подстановке констант перед знаком минус и после него, а также полную схему значений для всех форм, получающихся при подстановке на эти места двух форм или одной

формы и одной константы. Часто это проще всего достигается путем введения (любыми доступными в конкретном контексте средствами) бинарной функции действительных чисел, которая называется *вычитанием*, и объявления ее присоединенной функцией связки. Результат такого построения находится при этом в полном соответствии с содержанием §§ 01—02. ⟨К стр. 38.⟩

86) Вновь используя пример из предыдущего примечания, мы можем считать, что обозначение (—) есть связка и что знак минус не имеет самостоятельного значения. Можно, однако, стоять и на той точке зрения, что знак минус обозначает бинарную функцию *вычитание* (является ее именем) и что такие, например, выражения, как $(x - y)$ или (5—2), являются специальными обозначениями, отличными от введенных в § 03, применения бинарной функции к ее аргументам. Выбор одного из этих истолкований знака минус представляется довольно произвольным. Однако ясно, что если бы мы захотели придумать имя для бинарной функции, то знак минус мог бы быть этим именем не хуже всякого другого, и это было бы самым простым решением вопроса. ⟨К стр. 39.⟩

87) Как объяснено ниже, мы отвлекаемся сейчас от трудностей, вызываемых принятием теории типов или какой-либо заменяющей ее теории, чтобы не осложнять этих вводных разъяснений. Стоя на этой точке зрения, мы определим присоединенную функцию для связки, являющейся обозначением применения сингулярной функции к ее аргументу, как бинарную функцию, которая для упорядоченной пары аргументов f и x принимает значение $f(x)$. Но если мы захотим использовать какое-либо имя этой функции для элиминирования связки, то нам потребуется новая связка — а именно обозначение для применения бинарной функции к ее аргументам. Если мы теперь захотим элиминировать эту новую связку при помощи какого-либо имени ее присоединенной функции, то нам опять потребуется новая связка для обозначения применения тернарной функции к ее аргументам. Ясно, что эти попытки не дают никакого действительного продвижения вперед.

[После изучения теории типов читатель увидит, что как утверждения, сделанные нами только что, так и некоторые сделанные ранее утверждения остаются в некотором смысле по существу верными и с точки зрения этой теории. При этом приходится только, например, вместо связки, являющейся обозначением для применения сингулярной функции к ее аргументам, рассматривать множество связок, соответствующих различным типам и имеющих каждая свою присоединенную функцию. Если же мы предпочтем считать, что связка остается всегда одной и той же независимо от рассматриваемых типов, то легко может случиться, что в языке не окажется переменной с такой областью значений, которая требуется для образования присоединенной формы.

Присоединение же такой переменной к словарю языка вызовет трудности с именем для присоединенной функции. См. Карнап, *Logische Syntax der Sprache* (цитируется в примечании 131), примеры в конце § 53 и сделанные там ссылки; см. также предложенные Б. Ноткатом „межтиповые переменные" в журнале *Mind*, n. s., том 43, 1934, стр. 63—77 и примечания Тарского в приложении к его *Wahrheitsbegriff* (цитируется в примечании 140).] ⟨К стр. 39.⟩

[88] Тем не менее существует применимый в некоторых случаях (ср. гл. X) способ, который позволяет исключить все связки, кроме обозначения для применения сингулярной функции к ее аргументу. Это достигается тем, что бинарная функция истолковывается как сингулярная функция, значениями которой являются сингулярные функции; тернарная функция истолковывается как сингулярная, значениями которой являются бинарные функции (понимаемые в указанном выше смысле), и т. д. Возможность такого сведения объясняется тем, что, как оказывается, получаемая этим путем n-арная функция может служить для всех обычных целей, для которых служит n-арная функция, понимаемая в любом другом смысле.

В некоторых случаях (например, в аксиоматической теории множеств) полезен другой прием сведения, по которому, например, бинарная функция истолковывается как сингулярная функция, аргументами которой являются упорядоченные пары. Этот прием (по крайней мере *prima facie*) не сводит всех связок к одной-единственной, так как, помимо обозначения для применения сингулярной функции к ее аргументу, необходима еще связка, которая объединяла бы имена двух вещей, давая имя их упорядоченной пары (или по крайней мере какое-либо обозначение, служащее той же цели). Тем не менее этот прием может быть иногда использован для завершения сведения, особенно в тех случаях, когда в наличии имеются другие связки или операторы (§ 06). ⟨К стр. 39.⟩

[89] Употребление в этих выражениях таких слов, как „если", „влечет", „эквивалентно", не нужно понимать таким образом, будто содержание этих слов точно передается соответствующей связкой во всех или хотя бы в большинстве случаев. Напротив, связку нужно понимать лишь в том смысле, как она описывается третьим столбцом, в котором задается присоединенная функция, выражения же четвертого столбца служат в лучшем случае лишь приближением.

В обиходной речи выражения „если . . ., то . . ." и „влечет" употребляются, пожалуй, не столько для обозначения отношения между истинностными значениями, сколько для обозначения отношения между суждениями. Трудно точно указать возможные варианты содержания этих выражений при таком их употреблении, и мы не будем пытаться этого делать. Вместо этого мы выделим один способ употребления выражения „если..., то..." (или „влечет") — их употребление в материальном смысле, как мы будем говорить, — при котором их можно считать обозначающими отношение между истинностными значениями, и это отношение мы объявим присоединенной функцией связки [$\supset$].

В качестве примеров материального применения выражения „если..., то..." рассмотрим следующие четыре предложения:

(I) Если Жанна д'Арк была патриоткой, то Натан Хейл*) был патриотом.

(II) Если Жанна д'Арк была патриоткой, то Видкун Квислинг был патриотом

(III) Если Видкун Квислинг был патриотом, то розовое масло приятно пахнет

(VI) Если Видкун Квислинг был патриотом, то лимбургский сыр приятно пахнет.

Предположим, примера ради, что проверка исторических фактов показала, что Жанна д'Арк и Натан Хейл действительно были патриотами, а Видкун Квислинг патриотом не был. Тогда предложения (I), (III) и (IV) истинны, а предложение (II) ложно, причем для получения этих заключений нам не нужно проводить никаких исследований ни свойств розового масла, ни свойств лимбургского сыра. [Если читатель склонен подвергать сомнению истинность, скажем, предложения (III) на том основании, что между Видкуном Квислингом и розовым маслом нет никакой связи, то это значит, что он понимает выражение „если..., то..." не в материальном смысле, а в каком-либо ином.] ⟨К стр. 40—41.⟩

[90] Эти термины ⟨conditional и biconditional⟩ введены Куайном, который понимал их как „композицию, значения которой задаются" помещенным в третьем столбце перечнем истинностных значений. По нашей терминологии этим перечнем задается не сама связка, а ее присоединенная функция См. Куайн, *Mathematical Logic*, 1940, стр. 15, 20.

Мы предпочитаем пользоваться более привычными терминами *материальная импликация* и *материальная эквивалентность*, в которых прилагательное *материальная* можно опускать в тех случаях, когда нет опасности смешения с каким-либо другим видом импликации или эквивалентности — например с формальной

---

*) Хейл Натан ⟨Hale, Nathan⟩ (1756—1776) — герой войны за независимость в Северной Америке 1775—1783 гг., по профессии школьный учитель. Находясь в разведке в расположении британских войск, был взят в плен и повешен. Предание приписывает ему высказывание, что он жалеет только о том, что имеет лишь одну жизнь, которую может отдать за родину. — *Прим. ред.*

импликацией и формальной эквивалентностью (§ 06) или с такими видами импликации и эквивалентности, которые являются отношениями между суждениями, а не между истинностными значениями (и которые относятся к модальной логике). ⟨К стр. 40—41.⟩

91) Особого упоминания заслуживает символика Яна Лукасевича, в которой не используются скобки. В этой системе обозначений отрицание, дизъюнкция, импликация, эквивалентность и конъюнкция обозначаются соответственно буквами N, A, C, E, K. По мере надобности вводятся другие буквы (R употреблялось как знак антиэквивалентности, D — как знак антиконъюнкции). Если буква употребляется в качестве сентенциональной связки, то к ней справа приписываются в определенном порядке те предложения и пропозициональные формы, вместе с которыми она употребляется. При этом не нужны ни скобки, ни какие-нибудь иные символы для специального указания объединения. Например, пропозициональная форма

$$[[p \supset [q \vee r]] \supset \sim p]$$

(где p, q, r — пропозициональные переменные) записывается в обозначениях Лукасевича так:

$$CCpAqrNp.$$

Эту идею можно, конечно, распространить и на другие связки, в частности на обозначения для применения сингулярной функции к ее аргументу, и исключить таким образом из формализованного языка все скобки (см. примечание 88). Эта возможность интересна, но получаемая при этом система обозначений непривычна и менее наглядна, чем обычная. ⟨К стр. 41.⟩

92) Этот термин мы заимствуем из *Principia Mathematica*, придавая ему по существу тот смысл, который он приобрел после изменений, внесенных в эту книгу (точнее говоря, предложенных) Расселом в его введении к ее второму изданию. ⟨К стр. 42⟩.

93) Например, присоединенная функция пропозициональной формы, упомянутой в примечании 91. ⟨К стр. 42.⟩

94) По отношению к каждой операторной переменной мы будем предполагать, что или все ее вхождения первого типа *в некоторое вхождение конкретной операнды* свободны во вновь образованной константе или форме, или же ни одно из них не свободно. Дело в том, что среди обычно употребляемых математических и логических операторов не встречается таких, которые нарушали бы это требование. Кроме того, ясно, что в них мы столкнулись бы с определенными аномалиями содержания, которых желательно избежать. ⟨К стр. 42.⟩

95) Ср. примечание 28. ⟨К стр. 42.⟩

[96] Поэтому константа или форма, содержащая некоторую переменную в качестве связанной, не меняет своего содержания при замене всех связанных вхождений этой переменной на другую (ранее не встречавшуюся) переменную с той же областью определения. Ограничение, указанное в скобках, добавлено лишь как предосторожность против отождествления двух переменных, которые должны были бы оставаться различными, и в действительности его можно несколько ослабить; ср. замечание, сделанное в § 03 относительно замены свободной переменной.

Например, константа $\int\limits_0^2 x^x dx$ (см. примечание 36) не меняет своего содержания при замене переменной x на переменную y: она имеет не только тот же денотат, но и тот же смысл, что и константа $\int\limits_0^2 y^y dy$. ⟨К стр. 43.⟩

[97] Примеры см. во втором абзаце примечания 36. ⟨К стр. 43.⟩

[98] А также допущению (5) примечания 30. ⟨К стр. 43.⟩

[99] Так, в теории действительных чисел обычное обозначение для определенного интегрирования является сингулярно-тернарным оператором; например, в форме $\int\limits_0^x x^x dx$ (см. примечание 36) операторной переменной является x, а операндами — константа 0, форма x и форма x^x.

Далее, большое П (знак произведения), использованное в третьем примере в начале примечания 36, является частью сингулярно-тернарного оператора. Знаки $=$ над и под знаком П следует считать не знаками равенства в обычном смысле (т. е. в смысле примечания 43), а несобственными символами и тоже частями оператора. В этом случае применения оператора, который приведен в качестве примера, операторной переменной является m, а операндами 1, n и

$$\frac{x-m+1}{m\pi}.$$

В качестве другого примера применения того же самого оператора, содержащего как связанные, так и свободные вхождения переменной m, приведем

$$\prod_{m=m+1}^{m=m+n+1} \frac{x-m+1}{m\pi}.$$

Примеры операторов, содержащих более чем одну операторную переменную, можно найти в обычных обозначениях двойного и многократного предела и двойного и многократного интеграла.

Следует также отметить, что при желании можно n-арные связки считать 0-арными-n-арными операторами. ⟨К стр. 43.⟩

[100] В комбинаторной логике Карри (основанной на идее Шейнфинкеля) делается попытка более сильного сведения. А именно делается попытка полного исключения всех операторов, переменных и всех связок, кроме обозначения для применения сингулярной функции к ее аргументу, причем с таким расчетом, чтобы получить формализованный язык, в котором все простые символы, за исключением единственной связки, являются константами и который, тем не менее, годится для получения некоторых или даже всех результатов, для которых обычно используются переменные. Эта тема выходит за пределы настоящей книги, и, кроме того, исследования, проводимые в этом направлении, находятся в настоящее время в состоянии, слишком сложном для краткого изложения. Мы отсылаем читателя к монографии автора этой книги, *The Calculi of Lambda-Conversion* (1941), в которой рассматриваются аналогичные проблемы, а также к статьям Шейнфинкеля, Карри и Россера, цитированным в указанной монографии; к многочисленным работам Карри и Россера, опубликованным в *The Journal of Symbolic Logic* в 1941 и 1942 гг.; к вводной статье Роберта Фейса в *Revue Philosophique de Louvain*, том 44, 1946, стр. 74—103, 237—270, а также к статье Карри в *Synthese*, том 7, 1949, стр. 391—399. ⟨К стр. 43.⟩

[101] Для того чтобы убедиться в ложности первого предложения, достаточно рассмотреть единственный пример: значение 0 для x.

Мы предостерегаем читателя против попыток говорить, что предложение $(x)(\exists y)_{\blacksquare}\, xy > 0$ „почти всегда истинно", или что оно истинно „с одним исключением", или что-нибудь подобное. Эти выражения подошли бы скорее к пропозициональной форме $(\exists y)_{\blacksquare}\, xy > 0$, о рассмотренном же предложении нужно просто сказать, что оно ложно. ⟨К стр. 45.⟩

[102] Несколько более сложным примером различия, являющегося результатом изменения порядка кванторов, может служить известное различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью. Пусть x и y будут переменными, область определения которых состоит из действительных чисел, а ε и δ — переменными, область определения которых состоит из положительных действительных чисел. Тогда мы следующим образом можем выразить непрерывность действительной функции f на заданном классе F действительных чисел (который мы предполагаем открытым или замкнутым промежутком):

$$(y)\,(\varepsilon)\,(\exists\,\delta)\,(x)_{\blacksquare}\; F(y) \supset_{\blacksquare} F(x) \supset_{\blacksquare} |x-y| < \delta \supset_{\blacksquare} |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Равномерную же непрерывность f на F мы можем выразить следующим образом:

$$(\varepsilon)(\exists\delta)(x)(y)\,.\,F(y)\supset.\,F(x)\supset.\,|x-y|<\delta\supset.\,|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Для того чтобы избежать трудностей, не имеющих прямого отношения к иллюстрируемому вопросу, мы не только предположили класс F открытым или замкнутым промежутком, но и предположили, что область определения функции f составляют все действительные числа. [Функции с более ограниченными областями определения всегда можно распространить, расширяя их области определения путем произвольного приписывания значений. При построении формализованных языков в этой связи общеупотребителен упрощающий прием, когда ограничиваются рассмотрением функций с определенными стандартными областями определения (ср. примечание 19).] ⟨К стр. 45,⟩

103) Употребление кванторов началось в 1879 г. с Фреге. Независимо от Фреге те же идеи проводили несколько позже Митчел и Пирс (см. исторический очерк в § 49). ⟨К стр. 46.⟩

104) Терминами *формальная импликация* и *формальная эквивалентность* пользовались Уайтхед и Рассел в *Principia Mathematica*, и с тех пор эти термины укоренились в достаточной мере для того, чтобы не было смысла менять их, хотя прилагательное *формальный* выбрано, быть может, не очень удачно и его не следует понимать здесь в том же самом смысле, который мы ему будем придавать в других местах. ⟨К стр. 46.⟩

105) С помощью разъясненных теперь обозначений мы можем вернуться к § 00 и переписать имеющиеся там примеры I—IV так, как они могли бы выглядеть в соответствующем формализованном языке.

Пусть a и b — переменные, область определения которых составляют человеческие существа. Пусть v есть переменная, область значений которой составляют слова (для определенности будем считать словом всякую конечную последовательность русских ⟨в подлиннике — английских⟩ букв). Пусть B обозначает отношение „быть братом". Пусть S обозначает отношение „носить фамилию". Пусть ϱ и σ обозначают человеческие существа Ричард и Стенли соответственно, и пусть τ обозначает слово „Томсон". Тогда три посылки и заключение примера I можно выразить следующим образом:

$$B(a,\ b)\supset_{ab}.\ S(a,\ v)\equiv_v S(b,\ v);$$

$$B(\varrho,\ \sigma);$$

$$S(\sigma,\ \tau);$$

$$S(\varrho,\ \tau).$$

Пусть, далее, z и w — переменные, область определения которых составляют комплексные числа, а x — переменная, область определения которой составляют действительные числа. Пусть R обозначает отношение „давать отношение, выражаемое действительным положительным числом", и пусть A обозначает отношение „иметь аргумент, равный". Тогда посылки и заключение примера II могут быть выражены следующим образом:

$$R(z, w) \supset_{zw} . A(z, x) \equiv_x A(w, x);$$

$$R(i - \sqrt{3}/3, \omega);$$

$$A(\omega, 2\pi/3);$$

$$A(i - \sqrt{3}/3, 2\pi/3).$$

Очевидно, что отношение „давать отношение, выражаемое действительным положительным числом", может быть расчленено таким образом, что вместо $R(z, w)$ мы могли бы написать, например,

$$(\exists x)[x > 0][z = xw].$$

Точно так же можно было бы каким-то образом расчленять и отношение „иметь аргумент, равный" или (в I) отношение „быть братом". Однако эти членения не имеют отношения к правильности рассуждений в рассматриваемых примерах. Более того, их ни в коем случае нельзя считать окончательными или абсолютными; так, например, вместо того, чтобы расчленять отношение „давать отношение, выражаемое положительным действительным числом", мы могли бы с таким же правом считать его основным и расчленять вместо этого отношение „быть больше, чем" таким образом, чтобы вместо $x > z$ писать $R(x - z, 1)$.

Таким же образом в случае примеров III и IV мы не расчленяем сингулярных пропозициональных функций „быть оригиналом виденного мною портрета", „быть убийцей Авраама Линкольна" и „быть изобретателем телеги", а просто обозначаем их через P, L, и W соответственно. Если теперь β обозначает Джона·Уилкиса Буса, то посылки и заключение примера III можно выразить следующим образом:

$$P(\beta) \qquad L(\beta) \qquad (\exists a)[P(a)\, L(a)],$$

а посылки и ложное заключение примера IV — так:

$$(\exists a) P(a) \qquad (\exists a) W(a) \qquad (\exists a)[P(a)\, W(a)].$$

При таком выражении примеров III и IV исчезает обманчивое сходство между ними. Оно явилось результатом логической иррегулярности русской ⟨в подлиннике — английской⟩ грамматики, благодаря которой „кто-то" ⟨somebody⟩ поддается тому же синтаксическому анализу, что и существительное. ⟨К стр. 47.⟩

[106] Это утверждение (которое является истинным и которое иногда необходимо сообщать начинающим) следует, конечно, отличать от другого (и ложного) утверждения: $\sim_{\bullet} \sin(x+y) = \sin x + \sin y$. ⟨К стр. 47.⟩

[107] Это предложил сделать Рассел в своем введении ко второму изданию *Principia Mathematica* (1925). Фактически это исключение осуществил Куайн в своей *Mathematical Logic* (1940), а Фитч и Берри упростили метод Куайна в статьях в *The Journal of Symbolic Logic*, том 6, 1941, стр. 18—22, 23—27. ⟨К стр. 47.⟩

[108] Стоит попутно заметить, что тот же прием применяется и при изучении первого языка, являясь необходимым дополнением метода обучения с помощью показа и подражания. Вначале с помощью метода показа и подражания должна быть приблизительно изучена какая-то часть языка; затем эта неточно известная часть используется для формулирования правил языка (и, быть может, для устранения первоначальных недоразумений); затем усвоенная часть языка может быть расширена путем нового обучения с помощью показа и подражания, и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута известная степень точности познания языка.

Нет никаких принципиальных препятствий к тому, чтобы первым языком, который будет изучен таким методом, был не обычный язык, а какой-либо из формализованных языков этой книги. (Однако имеется, конечно, то практическое препятствие, что формализованные языки плохо приспособлены к требованиям легкости общения.) ⟨К стр. 48.⟩

[109] Использование языка для того, чтобы говорить на нем о нем самом, не может, конечно, быть методом построения формализованного языка. Но если формализованный язык обладает соответствующими средствами выражения, то после того, как он построен, он может оказаться пригодным для того, чтобы на нем говорить о нем самом; в частности, может оказаться возможным задним числом отобразить в языке и сам процесс его построения. Таким образом, может случиться, что язык-объект и метаязык будут совпадать — обстоятельство, которое в дальнейшем важно будет иметь в виду. ⟨К стр. 48.⟩

[110] Это различение впервые было проведено Давидом Гильбертом, который, впрочем, говорит о „математике" и „метаматематике", а не о языке-объекте и метаязыке. Термины „язык-объект" и „метаязык", точнее их польские и немецкие аналоги, были введены Альфредом Тарским и Рудольфом Карнапом, которые особенно много занимались исследованием вопросов *синтаксиса* и *семантики* (см. примечания 131 и 140.) ⟨К стр. 48.⟩

[111] Заметим, что термин „язык" мы употребляем в таком смысле, что всякий данный язык имеет некоторый однозначно определенный словарь. Например, введение в словарь дополнительного символа достаточно для того, чтобы мы получили новый, не совпадающий с прежним язык. (Таким образом, английский язык 1849 года и английский язык 1949 года — это два разных языка, хотя и удобно называть их одним именем, различая их путем указания даты лишь в тех случаях, когда это различение существенно.) 〈К стр. 49.〉

[112] Подразделение исходных символов формализованного языка на четыре категории, а именно констант, переменных, связок и операторов, было введено по существу Дж. фон Нейманом в *Mathematische Zeitschrift*, том 26, 1927, см. стр. 4—6. Там он еще добавляет пятую категорию, составленную из символов, указывающих ассоциацию, например скобок различных видов. Наши термины „connective" и „operator" соответствуют его терминам „Operation" и „Abstraktion" соответственно.

Хотя символы, не входящие ни в одну из категорий, указанных фон Нейманом, и возможны, они, тем не менее, редко употреблялись, и для почти всех когда-либо предлагавшихся формализованных языков классификация исходных символов фон Неймана достаточна. Многие формализованные языки имеют исходные символы всех четырех (или пяти) категорий; из этого, однако, не следует, что это обязательно даже для языков, предназначаемых для выражения главным образом математических идей.

В качестве интересного примера (возможного) обозначения, не входящего ни в одну из категорий фон Неймана, мы упомянем символ, с помощью которого из имени класса может быть получено выражение, играющее роль переменной, областью определения которой был бы этот класс. Быть может, было бы необходимо предусмотреть возможность образования из имени класса бесконечного числа таких выражений, которые играли бы роль различных переменных, имеющих этот класс своей областью определения. Но эти выражения должны были бы отличаться от переменных в смысле § 02 не только тем, что они были бы не простыми символами, а составными выражениями, но и тем, что их область значений могла бы быть пустой. Язык, который содержал бы такой символ, никогда не был построен и детально изучен, и поэтому неясно, что может быть сделано в этом направлении. (Некоторые соображения, имеющие, как кажется, отношение к этому вопросу, были высказаны Беппо Леви в *Universidad Nacional de Tucumán, Revista*, ser. A, том 3, № 1, 1942, стр. 13—78.)

Используемые в главе X переменные с индексами, указывающими область значений (тип), не являются примерами переменных только что описанного рода, потому что переменная, состоящая из буквы и индекса, всегда рассматривается как единый исходный символ. ⟨К стр. 49.⟩

113) На практике условие (B) не является обычно источником каких-либо затруднений. Хотя написание символов, принятых в качестве исходных, и не всегда осуществляется непрерывной линией, тем не менее требование (B) можно удовлетворить хотя бы тем, что последовательность исходных символов договариваются писать, оставляя между ними промежутки стандартной длины, превышающей длину любого промежутка, который может встретиться внутри символа.

Необходимость требования (B) и возможные случаи его нарушения были указаны Станиславом Лесьневским в его критике, упомянутой в предыдущем примечании статьи фон Неймана. См. ответ фон Неймана в *Fundamenta Mathematicae*, том 17, 1931, стр. 331—334, и последнее слово Лесьневского в этом споре в публикации 1938 г. в виде оттиска из *Collectanea Logica*, том 1 (ср. *The Journal of Symbolic Logic*, том 5, стр. 83). ⟨К стр. 49.⟩

114) Введение в качестве выражений языка исключительно одномерных сочетаний исходных символов удобно, но не существенно. Двумерные расположения, конечно, возможны, а в математических обозначениях и обычны, но путем соответствующих изменений системы обозначений они всегда могут быть сведены к одномерным расположениям. Обозначения Фреге в его *Begriffsschrift*, например, тесным образом связаны с двумерным расположением; однако из-за трудностей типографского набора эти обозначения никогда никем не применялись и уже в течение длительного времени заменяются одномерным эквивалентом. ⟨К стр. 49.⟩

115) Здесь не имеются в виду так называемые непосредственные заключения ⟨immediate inferences⟩ традиционной логики. Мы называем вывод *непосредственным* ⟨*immediate*⟩ не в том смысле, что он (помимо прочего) имеет лишь одну посылку, а в том, что для него требуется лишь однократное применение одного из правил вывода. ⟨К стр. 49.⟩

116) Следуя Карнапу и другим авторам, мы употребляем термин „язык" таким образом, что во всяком языке существует лишь одно понятие доказательства. Поэтому введение дополнительной аксиомы или правила вывода, так же как и изменение какой-либо аксиомы или правила вывода, дают новый, отличный от исходного язык.

[По другой точке зрения, которая, как может показаться, больше соответствует повседневному употреблению слова „язык", следовало бы определить „язык" как состоящий из исходных символов, понятия правильно построенной формулы и некоторой *интерпретации* (см. ниже), а аксиомы и правила вывода следовало бы считать образующими „логику" языка. В этом случае вместо того, чтобы говорить о *правильной* или *неправильной* интерпретации логистической системы (см. ниже), мы говорили бы о правильной или неправильной для языка логике. В пользу этой точки зрения можно было бы привести некоторые доводы. Однако мы не принимаем ее отчасти из нежелания менять уже хорошо разработанную терминологию, отчасти потому, что новая терминология потребовала бы двоякого подразделения предметов синтаксиса и семантики (§§ 08, 09) в зависимости от того, рассматривается ли язык-объект отдельно или вместе с какой-либо его логикой, а это кажется и неестественным, особенно в случае семантики, и бесполезным, насколько можно судить в настоящее время.] 〈К стр. 50.〉

[117] Помимо минимально необходимого, исходный базис может включать и некоторые другие понятия, введенные для того, чтобы использовать их при определении правильно построенной формулы или при формулировании правил вывода. В частности, исходные символы можно тем или иным способом разбить на различные категории; например, можно различать *исходные константы*, *переменные* и *несобственные символы*, можно также выделить много категорий исходных констант, переменных и несобственных символов. Переменные и исходные константы вместе обычно называются *собственными символами*. Можно задать правила различения *свободных* и *связанных вхождений* переменных в правильно построенные формулы, и в соответствии с этим правильно построенные формулы можно подразделять на *формы* и *константы* в зависимости от того, содержат ли они или не содержат свободные вхождения переменных. Могут также быть заданы правила выделения из числа всех форм некоторых форм, называемых *пропозициональными формами*, а из числа всех констант — некоторых констант, называемых *предложениями*. При этом терминология часто подбирается таким образом, чтобы при превращении логистической системы в язык путем принятия одной из подразумеваемых главных интерпретаций (см. ниже) термины *исходная константа*, *переменная*, *несобственный символ*, *собственный символ*, *свободный*, *связанный*, *форма*, *константа*, *пропозициональная форма*, *предложение* получали содержание, согласующееся с неформальными семантическими разъяснениями §§ 02—06.

Исходный базис формализованного языка, т. е. интерпретированной логистической системы, получается прибавлением семантических правил (см. ниже) к исходному базису логистической системы. 〈К стр. 50.〉

[118] Хорошо известным примером из топологии является проблема (все еще не решенная даже для случая простейших 〈elementary〉 многообразий размерности выше двух) найти метод распознавания для любых двух замкнутых триангулированных

многообразий, заданных посредством отношений инцидентности, будут ли они гомеоморфными или нет, или, как иногда говорят, проблема нахождения полной классификации таких многообразий или нахождения полной системы инвариантов*).

Другим примером может служить алгоритм Эвклида, который в области целых чисел или в некоторых других числовых областях, позволяет для любых двух элементов этой области эффективно найти их наибольший общий делитель (или наибольший общий множитель).

Вообще, эффективный метод вычисления, особенно если он распадается на отдельные шаги, среди которых последующие зависят от результатов предыдущих, называется *алгоритмом*. (Написание „algorithm" давно установилось, и оно должно быть сохранено, несмотря на какие бы то ни было соображения этимологического характера.) ⟨К стр. 51.⟩

[119] Исследование по этому вопросу и вариант точного определения см. в статье автора настоящей книги в *American Journal of Mathematics*, том 58, 1936, стр. 345—363, особенно § 7. Понятие эффективности можно также определить, сказав, что эффективным является тот метод вычисления (или алгоритм), для которого возможно построение вычисляющей машины. Эта идея воплощена в точное определение А. М. Тьюрингом в *Proceedings of the London Mathematical Society*, том 42, 1936—1937, стр. 230—265 и том 43, 1937, стр. 544—546. См., далее, С. К. Клини, *Mathematische Annalen*, том 112, 1936, стр. 727—742; Пост, *The Journal of Symbolic Logic*, том 1, 1936, стр. 103—105; Тьюринг, *The Journal of Symbolic Logic*, том 2, 1937, стр. 153—163; Гильберт и Бернайс, *Grundlagen der Mathematik*, том 2, 1939, добавление II. ⟨К стр. 52.⟩

[120] Говоря, что утверждение имеется в том случае, когда имеется содержание, мы не достигаем цели до тех пор, пока нет эффективного критерия наличия содержания. Понимание языка, достигнутое каким бы то ни было путем, должно включать умение эффективно определять содержательность (в каком-либо подходящем смысле), а в логистической системе, являющейся чисто формальным аспектом языка, это оказывается эффективным критерием правильности построения. ⟨К стр. 52.⟩

---

*) Проблема нахождения указанного только что метода называется проблемой гомеоморфии. Как показал недавно А. А. Марков, проблема гомеоморфии n-мерных многообразий неразрешима (т. е. требуемого метода не существует) при $n > 3$. Более того, для всякого натурального числа n, большего трех, можно указать такое n-мерное многообразие M^n, что проблема гомеоморфии многообразий многообразию M^n явится неразрешимой. См. публикации А. А. Маркова в *Успехах математических наук*, том 13, вып. 4, 1958, стр. 213—216. и в *Докладах Академии Наук СССР*, том 121, 1958, стр. 218—220, а также его отдельную брошюру *Неразрешимость проблемы гомеоморфии* (1958). — *Прим. ред.*

[121] Быть может, на первый взгляд покажется, что модифицированное таким образом доказательство могло бы содержать, кроме последовательности правильно построенных формул, еще и другие элементы. Так, например, в различных местах можно было бы поместить указания на метаязыке о том, каким правилом вывода оправдано включение в доказательство той или иной формулы в качестве непосредственного следствия предыдущих формул, или о том, какие из предыдущих формул являются посылками непосредственного вывода.

В действительности же мы считаем это неприемлемым, потому что нашей целью является выражение доказательств (так же как и теорем) в полностью формализованном языке-объекте, и до тех пор, пока какая-либо часть доказательства остается выраженной в неформализованном метаязыке, логический анализ нельзя считать доведенным до конца. Предложение метаязыка, говорящее, например, о том, что некоторая конкретная формула непосредственно следует из каких-то предыдущих конкретных формул, если оно не может быть вообще опущено как излишнее, всегда должно быть тем или иным путем заменено одним или несколькими предложениями языка-объекта.

Хотя мы используем метаязык для построения языка-объекта, мы требуем, чтобы, будучи построенным, язык-объект был способен самостоятельно, без дальнейшей помощи метаязыка, выражать вещи, для которых он был предназначен. ⟨К стр. 53.⟩

[122] Из-за возможных недоразумений мы избегаем таких выражений, как „что она обозначает" или „какие она имеет значения".

Например, в одной из логистических систем главы X мы можем найти правильно построенную формулу, которая в одной из главных интерпретаций системы обозначает наибольшее целое положительное n, для которого $1 + n^r$ является простым, где r — наименьшее четное положительное целое, для которого существует такое наибольшее положительное целое n. Таким образом, семантические правила в каком-то смысле определяют, что эта формула обозначает, однако возможность воспользоваться этим определением ограничивается трудностью математической проблемы, которая должна быть решена для того, чтобы каким-то более привычным образом установить положительное целое число, обозначаемое этой формулой, или хотя бы для того, чтобы ответить на вопрос, обозначает ли эта формула единицу.

Далее, в логистической системе F^{1h} главы III (или A^0 главы V), взятой с ее главной интерпретацией, имеется правильно построенная формула, которая в соответствии с семантическими правилами обозначает истинностное значение того, что всякое четное число, большее 2, является суммой двух простых чисел. Сказать, что семантические правила определяют, что эта формула обозначает, было бы предвосхищением решения знаменитой проблемы, и лучше считать, что правила косвенным образом определяют, что́ эта формула выражает.

Указывая, каким образом имя обозначает (а не что оно обозначает), мы в действительности фиксируем его смысл, а указывая, каким образом форма принимает значения, мы фиксируем соответствие между смысловыми значениями формы (см. примечание 27) и концептами значений ее переменных. (Такое изложение вопроса достаточно точно для наших целей, хотя оно остается неопределенным в том отношении, что мы оставили понятие „смысл" неопределенным — см. примечания 15, 37.)

Как мы увидим ниже на конркетных примерах (таких, как правила a — g из § 10, или правила a — f из § 30, или правила α—ζ из § 30), в большинстве наших семантических правил явным утверждением является то, что определенные правильно построенные формулы, обычно при некоторых условиях, должны обозначать определенные предметы или иметь определенные значения. Однако, как только что было объяснено, это явное утверждение обычно выбирается таким образом, чтобы неявно задавать также и смысл и смысловые значения. Более полное исследование по семантике должно было бы, несомненно, содержать дополнительные правила, явным образом определяющие смысл или смысловые значения, однако это завело бы нас в еще не исследованные области. ⟨К стр. 53.⟩

[123]) Это обстоятельство теперь уже давно хорошо известно в связи с аксиоматическим методом в математике (см. ниже). ⟨К стр. 55.⟩

[124]) В конкретном формализованном языке можно, конечно, используя переменные, в какой-то степени обобщить доказательство сообразуясь с его формой. Однако, ввиду ограниченности областей определения переменных, применимость такого обобщения у́же, чем при формализации в логической системе, интерпретация которой остается неопределенной.

Процедуру формализации доказательства в логической системе и последующего использования формализованного доказательства в различных интерпретациях системы можно считать удобным приемом краткого изложения, так как вместо этого можно было бы полностью повторять доказательство каждый раз, когда оно встречается в связи с новой интерпретацией. Использование метаязыка с этой точки зрения допустимо, потому что от каждого случая такого использования можно было бы избавиться, и оно поэтому не нарушает требования независимости языка-объекта (примечание 121).

[Если, с другой стороны, мы хотим строго трактовать понятие логической формы доказательства, то это должно быть сделано в конкретном формализованном языке, а именно в формализованном метаязыке языка доказательств. По программе § 02, каждая переменная этого языка будет иметь фиксированную область определения, приписанную ей заранее, быть может, в соответствии с теорией типов. Тогда понятие формы, рассматриваемое с помощью этих средств, должно, как будто бы, ограничиться доказательствами определенного класса и не принимать в расчет сходство форм доказательств этого класса и других классов (в том же самом или различных языках). По-видимому, наша неформальная ссылка в тексте на логическую форму должна быть уточнена в этом направлении, прежде чем она может быть сделана точной; ср. § 09.] ⟨К стр. 55.⟩

[125] Автор предпочитает термин „математическая логика", понимая под этим содержательную логику, изучаемую математическими методами, в частности формальным аксиоматическим (или логистическим) методом. Однако оба эти термина, так же как и термин „символическая логика", часто применяются и по отношению к логике, рассматриваемой с помощью не так полно формализованных математических методов, в частности по отношению к „алгебре логики", начало которой было положено в 1847 г. работами Джорджа Буля и Августа де Моргана и которая была исчерпывающим образом рассмотрена в *Vorlesungen über die Algebra der Logic* Эрнста Шрёдера (1890—1905). Термин „логистика" более определенным образом ограничен методами, описанными в настоящем разделе, и имеет, кроме того, то преимущество, что из него легче сделать прилагательное. (Иногда термин „логистика" использовался специально по отношению к школе Рассела или по отношению к теории Фреге—Рассела, по которой математика является ветвью логики; ср. примечание 545. Однако мы будем следовать более распространенной традиции, которая не связывает с этим термином такого специального содержания.)

Лейбниц употреблял термины „Logica Mathematica" и „logistica" наряду с „calculus ratiocinator" и многими другими синонимами для обозначения исчисления умозаключений ⟨calculus of reasoning⟩, которое было им предложено, но никогда не было развито за пределы кратких и неполных (хотя и важных) фрагментов. Буль использовал выражения „mathematical analysis of logic", „mathematical theory of logic". Термин „Mathematische Logik" был в 1877 г. использован Шрёдером, „математическая логика" — Платоном Порецким в 1844 г., „logica matematica" (итальянский) — Джузеппе Пеано в 1891 г. Термин „symbolic logic" ⟨символическая логика⟩ был, по-видимому, впервые применен Джоном Венном (в *The Princeton Review*, 1880 г.), хотя еще Буль говорил о „symbolical reasoning". Слово „логистика" ⟨logistic⟩ и его аналоги в других языках первоначально означали искусство вычисления или обычную арифметику. Современное его использование для обозначения математической логики началось с Интернационального Конгресса философии 1904 г., где он был предложен независимо Ительсоном, Лаландом и Кутюра. Кроме того, в литературе встречаются термины „logischer Calcul" (Готфрид Плюке, 1766), „algorithme logique" (Кастильон, 1805), „calculus of logic" (Буль, 1847), „calculus of inference" (Де Морган, 1847), „logique algorithmique" (Дельбёф, 1876), „Logikkalkul" (Шрёдер, 1877), „theoretische Logik" (Гильберт и Аккерман, 1928). Кроме того, встречаются „Boole's logical algebra" (Пирс, 1870). „logique algebrique de Boole" (Лиард, 1877), „algebra of logic" (Александр Макфарлейн, 1879, Пирс, 1880). ⟨К стр. 55.⟩

[126] Изложение аксиоматического метода можно, конечно, найти во многих математических учебниках и других работах. Особенно хорошее изложение имеется во введении к *Projective Geometry* Веблена и Юнга, том I (1910). ⟨К стр. 55.⟩

[127] Это метод большинства математических курсов, которые построены аксиоматически, но не посвящены специально логике, например, курса Веблена и Юнга (предыдущее примечание). ⟨К стр. 55.⟩

[128] Слова „аксиома" и „постулат" употреблялись самым различным образом и как синонимы, и с разнообразными различиями между ними, в том числе и автором настоящей работы. Тем не менее в этой книге мы будем строго придерживаться установленной сейчас терминологии. ⟨К стр. 55.⟩

[129] Так, например, обычно допускается, чтобы в правилах вывода рассматривались как различные два неопределяемых термина, из которых один предназначается для обозначения индивида, а другой — для обозначения класса индивидов, или два неопределяемых термина, из которых один должен обозначать класс индивидов, а другой — отношение между индивидами. При этом не допускается, чтобы рассматривались в качестве различных два неопределяемых термина, если оба они должны обозначать класс индивидов. Однако нельзя дать никакого окончательного проверочного принципа.

Субъективный и по существу произвольный характер различения того, что относится к конкретной ветви математики и что — к логике, лежащей в основе системы, можно проиллюстрировать на примере сомнений, возникающих иногда в связи с вопросом, нужно ли считать знак равенства неопределяемым термином (для которого необходимо формулировать постулаты) математической дисциплины, рассматриваемой с помощью неформального аксиоматического метода. Другой иллюстрацией может служить исследование Цермело по аксиоматической теории множеств в его работе 1908 г. (ср. гл. XI), где он, занимаясь неформальным аксиоматическим методом, вводит отношение ε принадлежности к множеству в качестве неопределяемого термина, хотя при изложении математических дисциплин на основе неформального аксиоматического метода то же самое отношение обычно относят к логике. ⟨К стр. 56.⟩

130) Ср. примечание 116. ⟨К стр. 56.⟩

131) Эта терминология введена Карнапом в его книге *Logische Syntax der Sprache* (1934), которая переведена на английский язык (с некоторыми добавлениями) как *The Logical Syntax of Language* (1937). См. в связи с этой книгой также рецензии на нее Сондерса Мак-Лейна в *Bulletin of the American Mathematical Society*, том 44, 1938, стр. 171—176 и С. К. Клини в *The Journal of Symbolic Logic*, том 4, 1939, стр. 82—87. ⟨К стр. 56.⟩

132) Ср. примечание 109. В частности, рассмотрения главы VIII показывают, что логистическая система главы VII способна выражать свой собственный синтаксис, если принять интерпретацию, отличную от главной интерпретации главы VIII, а именно такую интерпретацию, при которой символы и формулы логистической системы, так же как и все конечные последовательности таких формул, причисляются к индивидам, а функциональная константа S получает соответствующую (довольно сложную) интерпретацию, детали которой могут быть выяснены, если следовать методу гёделевых номеров, изложенному в главе VIII. ⟨К стр. 57.⟩

133) Имея в своем распоряжении аппарат синтаксических переменных, мы могли бы в действительности отказаться от применения синтаксических констант, идя окольными путями в тех случаях, в которых иначе как будто требовались бы синтаксические константы. Это иллюстрируется примерами предыдущего примечания, что станет ясно в связи с цитированными там главами. Однако более естественно и удобно, особенно при неформальном рассмотрении синтаксиса, позволить свободно пользоваться синтаксическими константами. ⟨К стр. 58.⟩

134) По терминологии схоластиков использование слова в качестве имени его самого, т. е. для обозначения его самого как слова, называлось *suppositio materialis*. В противоположность этому использование слова в его собственном, или обычном, смысле называлось *supposito formalis*. Эта терминология все еще иногда удобна.

Многочисленные другие различения видов *suppositiones* слишком громоздки и неточны для того, чтобы ими можно было пользоваться. Все они, подобно различению *suppositio materialis* и *formalis*, опираются на особенности и неправильности содержания, которые встречаются во многих обычных языках и должны быть исключены при построении формализованного языка. ⟨К стр. 58.⟩

135) Если следовать определению, данному в *The Century Dictionary*. ⟨К стр. 58.⟩

136) Помимо того, что систематическое применение кавычек неудобно на практике, оно дает повод для многочисленных ошибок и недоразумений. Одной из таких ошибок является неправильное использование кавычек, как если бы они определяли функцию, отображающую вещи (некоторого рода) в имена этих вещей, или как если бы такую функцию вообще можно было использовать без каких-либо дополнительных оговорок. Такой же ошибкой было бы использование в качестве синтаксической переменной выражения, получающегося при заключении в кавычки какой-либо переменной языка первой ступени, хотя такое выражение является, строго говоря, не переменной какого-либо рода и не формой, а константой.

Столь же распространенным является неправильное представление, что тривиальными или само собой разумеющимися являются суждения, выраженные следующими фразами: ‘ ‘ Снег белый ’ истинно в том и только в том случае, если снег белый ’ (пример Тарского); ‘ ‘ Снег белый ’ означает, что снег белый’; ‘ ‘ Кейптаун ’ — имя или одно из имен Кейптауна ’.

Это последнее недоразумение может возникнуть и в связи с автонимиями. Полезным методом борьбы с такими недоразумениями является перевод на другой язык (ср. примечание Лангфорда в *The Journal Symbolic Logic*, том 2, 1937, стр. 53). Например, суждение, что ‘Кейптаун’ является именем Кейптауна, мы следующим образом сообщили бы итальянцу (который, как мы предполагаем, знает русский язык): ‘ ‘ Кейптаун ’ è il nome di Città del Capo ’. Если предположить, насколько мы это можем, что итальянские слова имеют точно тот же смысл, что и русские слова, которые мы этими итальянскими словами переводим, — в частности, что ‘ Città del Capo ’ имеет тот же смысл, что и ‘ Кейптаун ’ и что ‘ ‘ Кейптаун ’ ’ имеет в итальянском языке тот же смысл, что и в русском, — то мы видим, что итальянское и русское предложения должны выражать одно и то же суждение, которое не может быть большей тривиальностью, когда оно выражено на одном языке, чем когда оно выражено на другом.

Предыдущий пример может быть пояснен, если вспомнить примечание 8, в котором говорилось, что отношение называния есть в сущности тернарное отношение, которое может быть сделано бинарным, если в конкретном контексте фиксировать язык. Так мы получаем более точные русские предложения ‘ ‘Кейптаун’ — русское имя Кейптауна’; ‘ ‘Città del Capo’ — итальянское имя Кейптауна’. Итальянские переводы таковы: ‘ ‘ Кейптаун’ è il nome russo di Città del Capo’, ‘ ‘ Città del Capo’ è il nome italiano di Città del Capo’. Из двух рассматриваемых суждений первое производит ложное впечатление очевидности, если оно выражено по-русски, причем эта иллюзия рассеивается при переводе на итальянский; второе, напротив, не кажется очевидным или тривиальным, пока оно выражено по-русски, при переводе же на итальянский оно начинает производить такое впечатление.

(В трех предыдущих абзацах этого примечания мы следовали Фреге в систематическом использовании одинарных кавычек, что нужно иметь в виду при чтении. Как уже разъяснялось, мы не делаем этого нигде в других местах книги.) ⟨К стр. 59.⟩

[137] То есть сочетание будет использоваться в синтаксическом языке в качестве бинарной связки, присоединенной функцией которой является сочетание. С точки зрения технической здесь требовалось бы соответствующее обозначение для указания объединения или какое-либо соглашение по этому вопросу, например, аналогичное соглашение о группировке влево (как в § 11). Однако, ввиду ассоциативности сочетания, с этим не связано никаких трудностей. ⟨К стр. 59.⟩

[138] Это верно, конечно, только в предположении, что синтаксический язык не совпадает с языком-объектом.

Если же формализованный язык должен содержать имена своих собственных формул, то именем формулы как правило не должна быть сама эта формула. Например, переменная языка не должна быть (в этом же языке) сама своим именем, так как имя переменной является не переменной, а константой (что уже было отмечено в иной связи в примечании 136). ⟨К стр. 61.⟩

[139] Сравнение правил арифметики с правилами шахматной игры было сделано Томэ (1898) и фигурирует в споре между Томэ и Фреге (1903—1908). Оно было также использовано Германом Вейлем (1924) для описания гильбертовой программы метаматематики, т. е. синтаксиса математического языка-объекта. ⟨К стр. 61.⟩

[140] Этот термин (точнее, его польский аналог) был введен Тарским в одной из его статей в *Przegląd Filozoficzny*, том 39, 1936, стр. 50—57, переведенной на немецкий язык под названием „Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik" в *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique* (1936). Другими важными работами в области семантики являются работа Тарского *Pojęcie Prawdy w Językach Nauk Dedukcyjnych* (1933), впоследствии переведенная на немецкий язык (с важным добавлением) под названием „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" в *Studia Philozophica*, том 1, 1936, стр. 261—405, и работа Карнапа *Introduction to Semantics* (1942). Относительно книги Карнапа см. рецензию автора настоящей книги в *The Philosophical Review*, том 52, 1943, стр. 298—304.

Слово *семантика* имеет многочисленные другие значения, большинство из которых старше, чем то, в каком мы его здесь употребляем. Необходима осторожность, чтобы не допустить путаницы. В настоящей работе это слово всегда будет иметь одно и то же содержание, совпадающее (или по существу совпадающее) с содержанием, которое оно имеет у Тарского, Морриса (*Foundations of the Theory of Signs*, 1938), Карнапа, Берри (*Harward University Summaries of Theses* 1942, стр. 330—334). ⟨К стр. 61.⟩

141) Упомянута в предыдущем примечании. ⟨К стр. 61.⟩

142) Для многих частных языков Тарский решает также проблему нахождения синтаксического отношения, совпадающего по объему с семантическим отношением удовлетворения пропозициональной формы.

В статье, опубликованной в *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 42, № 1, 1935, т. е позднее работы Тарского *Pojęcie Prawdy*, но ранее появления ее немецкого перевода с добавлением, Карнап решил обе проблемы (нахождения синтаксических эквивалентов для *быть истинным предложением* и *удовлетворять пропозициональной форме*) для одного частного языка, более сильного, чем какой-либо из языков, для которых эти проблемы были ранее решены Тарским. Прием Карнапа может быть упрощен либо в свете добавления Тарского, либо так, как это было предложено Клини в его рецензии, цитированной в примечании 131.

В принятой нами теории содержания семантические понятия „быть истинным предложением" и „удовлетворять пропозициональной форме" можно свести к понятиям „обозначать" и „принимать значения"; поэтому приведенные выше результаты Тарского и Карнапа неявно содержатся в утверждении следующего примечания. ⟨К стр. 61.⟩

143) Подробнее это можно сделать следующим образом. В § 07 при рассмотрении семантических правил формализованного языка мы предполагали понятия „обозначать" и „иметь значения" уже известными и использовали семантические правила для того, чтобы дать содержание прежде не интерпретированной логистической системе. Но вместо этого можно и не приписывать встречающимся в семантических правилах словам „обозначать" ⟨denote⟩ и „принимать значение" ⟨have values⟩ никакого предварительного содержания, а затем считать, что семантические правила в их совокупности образуют определение понятий „обозначать" и „принимать значение" (так же, как правила построения логистической системы определяют понятие „правильное построение"). Если понятия, выражаемые посредством слов „обозначать" и „принимать значения", определить таким образом, то они будут относиться к теоретическому синтаксису, так как в их определении не было использовано ничего семантического. Но по отношению к данному формализованному языку они совпадают по объему с семантическими понятиями „обозначать" и „принимать значения".

Положение станет яснее, если вспомнить, что для всякой логистической системы можно предполагать существование многих правильных интерпретаций, при которых правильно построенным формулам системы приписываются различные денотаты и значения. Эти приписывания денотатов и значений могут быть осуществлены путем установления абстрактного соответствия, так что исследование этих приписываний относится, к теоретическому синтаксису. Семантика начинается тогда, когда мы решаем вопрос о содержании правильно построенных формул путем фиксирования какой-то конкретной интерпретации системы. Отличие семантики и синтаксиса обнаруживается в особенном значении, приданном одной конкретной интерпретации и устанавливаемом этой интерпретацией приписывании денотатов и значений правильно построенным формулам. Однако в пределах формальной логики, включающей чистый синтаксис и чистую семантику, об этом особенном значении нельзя сказать ничего, кроме того, что оно постулируется как особое.

Аналогичные ситуации часто встречаются в математике. Так, например, можно считать, что плоская метрическая эвклидова геометрия получается из плоской проективной геометрии посредством придания особого значения одной конкретной прямой линии и одной конкретной эллиптической инволюции на ней. И, пожалуй, можно сказать, что семантика сводится к синтаксису в том же смысле, в каком эвклидова метрическая геометрия на плоскости сводится к проективной геометрии.

Все это указывает на то, что для сохранения различия между семантикой и синтаксисом термины „обозначать" и „принимать значения" должны вводиться как неопределяемые термины и исследоваться с помощью аксиоматического метода. Наше использование семантических правил имеет целью сделать шаг в этом направлении. Фактически уже в работе Тарского *Wahrheitsbegriff* содержится план аксиоматической теории истины, альтернативной к отысканию синтаксического эквивалента понятия истина. ⟨К стр. 61.⟩

[144] В главе VIII будет дана более точная формулировка этого утверждения в отношении частного случая, получающегося, если логистическую систему главы VII интерпретировать, в соответствии со сказанным в примечании 132, так, чтобы система могла выражать свой собственный синтаксис. ⟨К стр. 62.⟩

[145] Сходные с методом, использованным Куртом Гёделем при доказательстве его теорем о неполноте, изложенных в главе VIII. ⟨К стр. 62.⟩

[146] Это утверждение более тщательно сформулировано Тарским.

Из результатов Гёделя, упомянутых в предыдущем примечании (или, соответственно, из сведéния Тарским семантики к синтаксису), вытекает, что следует ожидать также существования истинных синтаксических предложений, не являющихся теоремами. Однако они далеко не столь просты по своему строению. И тем не менее основные синтаксические правила, описанные в § 07, могут все оказаться теоремами, если их переписать в виде предложений языка.

[147] И допущение (5) примечания 30. ⟨К стр. 63.⟩

[148] Все выражения языка — формулы, или правильно построенные формулы, — можно считать значениями (синтаксических) переменных одного типа. Однако нам все же потребуются термины „обозначать "различных типов, так как, заполнив первый пропуск в „—— обозначает ——" синтаксической переменной, мы можем заполнить второй пропуск переменной или константой произвольного типа.

Аналогично этому и разные другие использованные нами термины должны быть заменены каждый множеством терминов различных типов. Это относится, в частности, к термину „вещь", а являющаяся результатом этого неопределенность особенно сильно заметна в примечании 9, которое должно стать схемой с типовой неопределенностью.

См. также замечание, сделанное в последнем абзаце примечания 87. ⟨К стр. 63.⟩

[149] Терминология объяснена в §§ 27, 30, 33 и главе VI. (Типовая неопределенность, которая нам была здесь нужна, является неопределенностью в отношении *типа* в смысле, описанном в примечании 578, и поэтому отлична от типовой неопределенности, упоминаемой в примечании 585, которая является скорее неопределенностью в отношении *уровня*.) ⟨К стр. 63.⟩

Примечания к гл. I

[150] Исторические вопросы, связанные с пропозициональным исчислением, будут кратко рассмотрены в заключительном параграфе главы II. ⟨К стр. 65.⟩

[151] Относительно терминологии см. разъяснения в § 07 и в примечании 117. ⟨К стр. 66.⟩

[152] По всей видимости, Пеано первым использовал систематический метод нумерации теорем, аксиом и т. д., при котором указывался бы раздел, где они встречаются. Используемый нами метод в некотором отношении сходен с методом, использованным Куайном.

Мы будем нумеровать параграфы цифрами, состоящими из двух или большего числа знаков. Номер главы, в которой находится данный параграф, можно получить, отбрасывая от его номера последнюю цифру. Номера глав всегда даются римскими цифрами. Некоторые главы начинаются с краткого введения, не включенного ни в какой занумерованный параграф.

Мы будем нумеровать аксиомы, правила вывода, теоремы и метатеоремы числами из трех или большего числа знаков таким образом, чтобы номер параграфа, в котором они находятся, получался отбрасыванием последней цифры. Мы ставим крестик † перед номером аксиомы или теоремы логистической системы; мы ставим звездочку * перед номером (исходного) правила вывода, номером аксиомной схемы, номером производного правила вывода или номером теоремной схемы; наконец, мы ставим двойную звездочку ** перед номерами других метатеорем. (Терминология, не объясненная уже во введении, будет объяснена в этой и следующих главах.) Номера аксиом, аксиомных схем и исходных правил вывода имеют нуль своей предпоследней цифрой и отличаются этим от номеров теорем, теоремных схем, производных правил вывода и других метатеорем.

При нумерации правил вывода мы используем номер параграфа, в котором они находятся, и малые римские цифры. Так, 10i, 10ii, 10iii являются правилами вывода из § 10.

Серия упражнений имеет тот же номер, что и параграф, за которым она следует. Для отдельных упражнений в серии мы используем номер серии и номер этого упражнения в серии, разделяя их точкой. Так, например, 12.0, 12.1 и т. д. — упражнения к § 12.

Определения и определения-схемы нумеруются D1, D2 и т. д. безотносительно к параграфу, в котором они находятся. ⟨К стр. 66.⟩

[153] Относительно использования жирных букв в качестве синтаксических переменных см. § 08. См. также выделенное курсивом положение в конце § 08.

Без соглашения о том, что сочетание используется для сочетания (см. примечание 137), нам пришлось бы формулировать 10iii более длинно следующим образом: Если $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\Delta}$ — пп-формулы, то формула, состоящая из [, за которой следуют по порядку все символы из $\mathbf{\Gamma}$, за которыми следует $\supset$, за которым следуют по порядку символы из $\mathbf{\Delta}$, за которыми следует], — есть пп-формула. ⟨К стр. 66.⟩

[154] Выбор направления слева направо является уступкой привычкам нашего глаза. С тем же успехом можно было бы описать сходную процедуру, в которой счет производился бы справа налево. ⟨К стр. 66.⟩

[155] Подробнее: если данная формула правильно построена и состоит из более чем одного символа, то первым символом должна быть левая скобка [, а следующим должен быть либо собственный символ, либо [. Если следующий символ — собственный, то третьим символом должен быть знак $\supset$ и этот третий символ есть главный знак импликации. Если же вторым символом является [, то счет ведется слева направо так, как было указано; если в процессе счета 1 приходится на], то следующим символом должен быть $\supset$ и это главный знак импликации. ⟨К стр. 66.⟩

[156] Здесь [,] и $\supset$ употреблены автонимно. Заметим, что, помимо использования в синтаксическом языке символов и формул языка-обьекта в качестве *автонимных собственных имен*, т. е. имен самих себя, как это разъяснено в § 08, нам иногда будет удобно использовать их в качестве *автонимных общих имен*, т. е. в качестве общих имен (см. примечания 4, 6) своих вхождений.

При автонимном применении [можно читать вслух как „левая скобка",] — как „правая скобка" и $\supset$ — как „знак импликации" (или, подробнее, как „знак материальной импликации").

При чтении вслух пп-формул из P_1 (или других логистических систем) иногда удобно сохранить для [и] чтение „левая скобка" и „правая скобка" соответственно, но $\supset$ следует в этом случае читать как „влечет", или „имплицирует", или „если . . ., то . . .", как указано в таблице § 05. ⟨К стр. 66.⟩

[157] На практике вся процедура часто может быть сокращена очевидными приемами. ⟨К стр. 67.⟩

[158] Как разъяснено в § 08, жирные заглавные латинские буквы имеют в качестве значений пп-формулы рассматриваемой логистической системы. Это делает излишним явное добавление условия „где **A** и **B** — пп-формулы". ⟨К стр. 67.⟩

[159] Жирные строчные латинские буквы, как в данном случае **b**, имеют в качестве своих значений собственные символы — см. § 08. Если **b** не входит в **A**, то результат подстановки совпадает с **A**. ⟨К стр. 67.⟩

[160] Для краткости мы говорим просто „следует" вместо „непосредственно следует", что является полным выражением, введенным в § 07. ⟨К стр. 67.⟩

[161] Подразумевается, конечно, что **B** может быть произвольной пп-формулой. Математической индукцией по числу вхождений знака $\supset$ в **A** можно доказать, что результат подстановки будет пп-формулой. ⟨К стр. 67.⟩

[162] Термины *модус поненс*, *большая посылка*, *малая посылка*, *антецедент*, *консеквент* являются терминами схоластической логики (так же, конечно, как и термины *посылка*, *заключение*). ⟨К стр. 67.⟩

[163] Можно было бы называть *законом двойного отрицания* либо †104, либо пп-формулу, которая получается из †104 при замене антецедента консеквентом и наоборот. Мы выбрали первую и поэтому вторую будем называть *обратным законом двойного отрицания*. Таким образом, закон двойного отрицания является тем законом, который позволяет (посредством подстановки и *модус поненс)* отбрасывать двойное отрицание.

Точно так же закон самодистрибутивности импликации, †103, дает возможность (посредством подстановки и по *модус поненс*) распределять импликацию по импликации. А *обратный закон самодистрибутивности* (*материальной*) *импликации* является обращением †103, которое позволяет производить процесс, обратный этому.

Если мы в †103 и †104 заменим главный знак импликации знаком $\equiv$ из определения D6, приведенного ниже (или эквивалентом знака $\equiv$ в какой-либо другой формулировке пропозиционального исчисления), то мы получим *полный закон самодистрибутивности* (*материальной*) *импликации* и *полный закон двойного отрицания*, как мы их будем соответственно называть. ⟨К стр. 68.⟩

[164] Следует обратить внимание на то, что определение допускает присутствие в доказательстве различных не относящихся к делу отклонений, так как не требуется, чтобы всякая появляющаяся в доказательстве пп-формула действительно способствовала достижению доказываемой формулы или чтобы для получения требующейся ппф из других ппф посредством серии непосредственных выводов мы всегда шли кратчайшим путем. ⟨К стр. 68.⟩

165) Сравните использование больших точек в § 06.

Использование точек для замены скобок было введено Пеано и заимствовано Уайтхедом и Расселом в *Principia Mathematica*. Описанное здесь соглашение об использовании точек как скобок не совпадает с тем, которое имеется у Пеано и Уайтхеда и Рассела, а представляет собой модификацию, которую автор считает более простой и практически более удобной. ⟨К стр. 70.⟩

166) Мы встретим некоторое количество исключений, особенно в этом параграфе и в § 16, где сокращения используются в качестве автонимов в строгом смысле слова, т. е. как имена самих сокращений, а не для обозначения или сокращения пп-формул. Но мы будем следить за тем, чтобы это всегда было ясно из контекста. ⟨К стр. 70.⟩

167) В некоторых случаях могут быть даны определения, не вносящие никаких сокращений в том буквальном смысле слова, что вновь вводимое выражение действительно короче той пп-формулы, вместо которой оно должно употребляться. Тем не менее употребление таких определений может иногда приводить к большей ясности или четче выделять некоторые характерные черты какой-либо пп-формулы. ⟨К стр. 71.⟩

168) Определения в этом смысле мы будем называть *определениями сокращения*, чтобы отличать их от различных других вещей, которые также называются или могут называться определениями (в связи с некоторым формализованным языком). К этим последним относятся:

(1) *Пояснительные определения* ⟨*explicative difinitions*⟩, которые служат для разъяснения содержания обозначений (символов, пп-формул, связок или операторов), уже присутствующих в данном языке, и которые выражаются предложением в этом самом языке. Такое пояснительное определение часто может включать знак равенства или знак материальной или иной эквивалентности, помещаемый между разъясняемым обозначением или какой-либо пп-формулой, содержащей его, и другой пп-формулой языка. (Мы не пользуемся здесь традиционным термином *real definition*, так как с ним связаны ассоциации и предположения, которых мы хотели бы избежать.)

(2) Предложения семантического метаязыка, дающие или разъясняющие содержание какого-либо обозначения, уже присутствующего в языке-объекте. Это могут быть либо (*исходные*) *семантические правила* в смысле § 07, либо то, что естественно назвать *производными семантическими правилами*.

(3) Определения, которые по форме сходны с определениями из (1), но в отличие от них должны расширять язык введением новых обозначений, ранее в нем не имевшихся. Определения этого вида являются элементами языка-объекта, в котором они

встречаются, в не меньшей степени, чем его аксиомы или теоремы. Поэтому автор согласен с Лесьневским, что если такие определения допускаются, то это должно происходить на основе *правил определения*, включенных в исходный базис языка и сформулированных с той же тщательностью, которой мы требовали для правил построения и преобразования (в частности, должны быть выполнены соответствующие условия эффективности; ср. § 07). К сожалению, авторы, которые используют определения этого вида, не всегда с должной тщательностью формулировали правила определения. В этом отношении можно критиковать даже *Grundlagen der Mathematik* Гильберта и Бернайса (их изложение этого вопроса в томе I, стр. 292—293 и 391—392, ближе, чем многие другие, к полной строгости, однако оно не обеспечивает возможности введения многих видов обозначений, которые для каких-либо целей можно было бы пожелать ввести с помощью определений, и потому не дает полной свободы определений). С другой стороны, коль скоро правила определения точно сформулированы, они становятся, по крайней мере теоретически, излишними, так как всегда было бы возможно заранее обозреть все, что могло бы быть введено посредством определений, и вместо этого предусмотреть соответствующие исходные обозначения в исходном базисе языка. Это остается справедливым и в том случае, когда правила определения достаточно широки для того, чтобы позволять прямое введение с помощью рекурсивных равенств новых обозначений для функций положительных или неотрицательных целых чисел, как это было указано, хотя и в других терминах, Карнапом в *The Logical Syntax of Language*, § 22 (ср. также Гильберт и Бернайс, том. 2, стр. 293—297).

С теоретической точки зрения вполне можно обойтись без определений в смысле (3). Поэтому мы предпочитаем не пользоваться ими, и, определяя в § 07 логистическую систему, мы не предусмотрели включение правил определения в исходный базис. Это позволяет нам избежать таких затруднительных вопросов, как вопрос о том, должны ли определения этого вида выражаться с помощью того же знака равенства или эквивалентности, который в других случаях употребляется в языке-объекте, или же с помощью специального знака *равенства по определению*, такого, например, как знак „$=_{\mathrm{df}}$"; или вопрос о том, не относятся ли все же эти определения (поскольку они касаются обозначений) к метаязыку, а не к языку-объекту.

Эвристический процесс уточнения содержания некоторого обозначения (часто слова или выражения обычного языка), для которого уже известно его приблизительное или частичное содержание, не относится, строго говоря, к области формальной логики, хотя результат этого процесса может быть выражен определением или может мотивировать определение того или иного рода. Не относится к области формальной логики и процедура *остенсивного определения* ⟨*ostensive definition*⟩, с помощью которого собственное или общее имя приписывается конкретному объекту путем физического показа или указания объекта.

(В связи с неформализованными метаязыками мы будем и дальше говорить об „определениях" в обычном, неформальном смысле. При этом имеется в виду, что после формализации метаязыка они превратятся в определения сокращения.) ⟨К стр. 71.⟩

[169] Некоторые из них найдут лишь незначительное применение в этой книге, однако мы их все же вводим, для того чтобы при желании ими можно было бы воспользоваться. Знак $\bar{\vee}$ использован вместо знака $\vee$ с пересекающей его вертикальной чертой только лишь по типографским соображениям. ⟨К стр. 72.⟩

[170] Аналогичное соглашение о восстановлении скобок является обычным при чтении равенств элементарной алгебры, где скобки, связанные со знаком равенства, составляют высшую категорию, связанные со знаками сложения и вычитания — следующую категорию, а те, которые связаны с умножением, — третью категорию и где в остальном действует правило группировки влево. Например, $xy - 3x + 2y = x - y - 4$ следует читать как $[(((xy) - (3x)) + (2y)) = ((x - y) - 4)]$, а не (например) как $[(((xy) - 3)(x + (2y))) = (x - (y - 4))]$ или как-нибудь иначе. ⟨К стр. 73.⟩

[171] Было бы возможно и, может быть, более естественно использовать $\sim\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ (т. е. $[[\mathbf{A} \supset f] \supset \mathbf{B}]$) в качестве дизъюнкции $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Мы выбрали вместо этого $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{B}$, так как некоторый интерес представляет тот факт, что в данном случае можно избежать использования константы f (т. е. отрицания). Определение $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ как $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{B}$ дано Расселом в *The Principles of Mathematics* (1903) и вторично, более формально, в *American Journal of Mathematics*, том 28, 1906, стр. 201. ⟨К стр. 74.⟩

[172] Как было разъяснено в § 04, предложение является истинным или ложным в зависимости от того, обозначает ли оно t или f, а пропозициональная форма называется истинной или ложной при фиксированных значениях свободных переменных, в зависимости от того, принимает ли она значение t или f. ⟨К стр. 74.⟩

[173] Включая интерпретации, являющиеся правильными в обобщенном смысле § 19. ⟨К стр. 75.⟩

[174] В дальнейшем, в частности в главах IV и V, мы будем рассматривать некоторые метатеоремы, доказательство которых не является эффективным. Такие метатеоремы, однако, не должны использоваться в качестве производных правил. ⟨К стр. 77.⟩

[175] Поэтому в этом месте доказательство †122 целиком входит в доказательство †123, если последнее выписать полностью. ⟨К стр. 78.⟩

[176] Методом, отличным от указанного здесь, это доказано Клини в *Annals of Mathematics*, том 35, 1934, стр. 531—532. Доказательство Клини проведено для логистической системы, отличной от той, которая имеется в тексте, однако рассматриваемая проблема во всем существенном та же самая.

Первая из двух метатеорем этого упражнения доказана ниже как **143, а аналогичные метатеоремы для логистической системы P_2 доказаны в следующей главе. Тем не менее читатель должен провести доказательства настоящего упражнения, не заглядывая в дальнейшие доказательства, или, в крайнем случае, при разборе данных ниже доказательств он должен выписать их более подробно, в частности, должен восстановить детали доказательства леммы, использованной ниже при доказательстве **143. ⟨К стр. 79.⟩

[177] Ср. Карл Менгер в *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, № 3, 1932, стр. 22—23; Лукасевич в примечании 5 (со ссылкой на Яськовского) одной статьи в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 24, 1932, стр. 153—183; Карл Шрёдер в *Axiomatisierung der Fregeschen Aussagenkalküle* (1943). ⟨К стр. 79.⟩

[178] Не обязательно в том смысле, что полностью выписанное доказательство состоит из более короткой последовательности пп-формул. ⟨К стр. 79.⟩

[179] Таким образом, доказательство ведется фактически методом математической индукции по m (или i). ⟨К стр. 82.⟩

[180] $q \supset f$ можно читать как „не q" или как „q ложно" (где „ложно" не является, конечно, семантическим термином, а есть просто синоним для „не" или „имплицирует ложь"). †140 можно читать так: „Если p, то если не q, то p не имплицирует q". Аналогично, мы можем †141 читать так: „Если p имплицирует q, то если q имплицирует r, то p имплицирует r", а †142 — так: „Если не p имплицирует r, то если p имплицирует r, то r". ⟨К стр. 85.⟩

[181] Эти производные правила носят более простой характер, чем теорема дедукции, взятая за производное правило. Действительно, эти правила, подобно нашим исходным правилам вывода, требуют в качестве посылок только некоторые утверждаемые пп-формулы, и если эти пп-формулы даны, то проверка вывода является эффективной. Если же в качестве производного правила используется теорема дедукции, то необходимо предъявить конечную последовательность пп-формул, и не в качестве утверждаемых, а в качестве образующих доказательство из гипотез, и только после этого становится возможной эффективная проверка.

С другой стороны, эти производные правила вывода, 14.9 (1)—(4), легко могут быть сделаны эффективной заменой теоремы дедукции как средства для сокращения записей доказательств. Преимущества теоремы дедукции в этой роли носят в значительной степени психологический и эвристический характер. ⟨К стр. 88.⟩

[182] Таким образом, метод доказательства есть по существу математическая индукция по *n*. Ср. примечание 179. ⟨К стр. 94.⟩

[183] В настоящей книге эта заключенная в скобки часть проблемы будет всегда явным образом включаться в полные или в частичные решения проблемы разрешения всякой системы.

Однако она может быть опущена как излишняя с теоретической точки зрения, поскольку, как это станет ясно в главе VIII, всегда существует эффективный пересчет всех доказательств логистической системы и поскольку, зная, что доказательство некоторой пп-формулы существует, мы всегда можем его найти, просматривая все доказательства в порядке их эффективного пересчета. Против этого можно возразить, (1) что процесс нахождения чего-либо не должен называться эффективным, если нет предсказуемой верхней границы для числа шагов этого процесса, и (2) что не только разрешающая процедура должна быть эффективной, но и ее обоснование должно быть эффективным в том смысле, что оно должно заключаться в эффективном выписывании доказательства пп-формулы (если доказательство существует). Однако на этих возражениях было бы довольно трудно настаивать. Действительно, предлагаемое в (1) ограничение понятия эффективности неопределенно, и автор не знает, как его можно было бы уточнить, не исключая при этом процедур, которые с точки зрения обычных (неформальных) критериев должны, очевидно, считаться эффективными. Требование, предложенное в (2), идет в направлении математического интуиционизма (см. главу XII) и с точки зрения классической математики должно быть признано радикальным. ⟨К стр. 94.⟩

[184] В свое время автор предложил термин *deducibility problem* ⟨*проблема выводимости*⟩ для того, что здесь названо проблемой разрешения для доказуемости, имея в виду сохранить термин *decision problem* ⟨*проблема разрешения*⟩ либо для семантической проблемы разрешения, либо для того, что в § 43 названо *decision problem for validity* ⟨*проблема разрешения для общезначимости*⟩. Однако представляется более удобным использовать термин *decision problem* ⟨*проблема разрешения*⟩ в качестве общего имени для проблем отыскания всевозможных эффективных критериев (разрешающих процедур) и выделять различные проблемы разрешения с помощью определительных прилагательных и предложений. ⟨К стр. 94.⟩

[185] Читатель должен быть осторожным, чтобы избежать неправильного понимания утверждений, сделанных в 15.5—15.8.

Например, в 15.6 имеется в виду, что если эквивалентность считать равенством, антиэквивалентность — сложением, а конъюнкцию — умножением, то определяющие соотношения <the defining laws> булева кольца оказываются теоремами системы P_1. Следовательно, теоремами системы P_1 оказываются и все соотношения <all laws> булева кольца, которые выводимы из определяющих соотношений средствами пропозиционального исчисления (включая правило подстановки, *101, и правило подстановочности эквивалентности, *159). До тех пор, пока мы не обращаемся к какой-либо частной интерпретации системы P_1, вообще нельзя говорить о кольце в смысле конкретной системы элементов с такими операциями над ними, для которых выполнялись бы кольцевые соотношения. Если мы допускаем интерпретации, являющиеся правильными в обобщенном смысле § 19, то многие из правильных интерпретаций системы P_1 окажутся булевыми кольцами (с эквивалентностью в качестве кольцевого равенства и т. д.) в смысле конкретной системы элементов и операций. Однако неверно, будто *всякая правильная интерпретация системы* P_1 *является булевым кольцом* в этом смысле; или даже, точнее, учитывая такие случаи, как в упражнениях 19.11 и 19.12, нелегко приписать выделенному курсивом положению какое-либо удовлетворительное содержание.

В своей главной интерпретации система P_1 является не просто булевым кольцом, но и полем из двух элементов, в котором сложение и умножение определяются так, как это описано в 15.5. Это замечание, так же как и его использование при формальном оперировании с пропозициональным исчислением, принадлежит И. И. Жегалкину и опубликовано в *Математическом сборнике*, том 34, 1927, стр. 9—28. Для каждого, кто знаком с операциями элементарной алгебры, действительно очень удобно переписать все выражения пропозиционального исчисления в терминах антиэквивалентности и конъюнкции, принятых за основные связки, используя 0 и 1 в качестве пропозициональных констант и ставя знак $+$ вместо знака $\not\sim$.

Общепринятый теперь термин *булево кольцо* принадлежит Стоуну (1936). <К стр. 97.>

[186] Это замечание является дуальным (в смысле § 16) к замечаниям 15.5 и 15.6. Оно было использовано независимо от Жегалкина Эрбраном в его диссертации в 1930 г. и затем Стоуном в 1937 г. Оно лежит в основе другого приема, дуального к приему предыдущего примечания, с помощью которого к пропозициональному исчислению могут быть применены методы элементарной алгебры. А именно, все выражения пропозиционального исчисления переписываются в терминах эквивалентности и дизъюнкции, принятых за основные связки; при этом 0 и 1 используются в качестве про-

позициональных констант и обычные знаки сложения и умножения ставятся вместо $\equiv$ и $\vee$ соответственно. (Ср. упражнение 24.3.)

Закон $pp \equiv p$ и дуальное к нему выражение известны под названием *законов тавтологии*, хотя содержание термина „тавтология" здесь совершенно иное, нежели то, которое было введено в тексте. С точки зрения теории колец они также могут быть названы *законами идемпотентности*. ⟨К стр. 97.⟩

187) Это замечание неявно содержится в статье Пирса 1885 г., упомянутой в примечании 67. (В этой же статье имеется и „закон Пирса" из упражнения 12.6.) ⟨К стр. 97.⟩

188) Аугустусом де Морганом были сформулированы в его *Formal Logic* в 1847 г. не эти законы, а соответствующие им законы исчисления классов.

В словесной формулировке эти законы были известны еще схоластам, впервые, возможно, Окаму. Ср. статью Лукасевича в *Erkenntnis*, том 5, 1935, стр. 111—131, в которой он утверждает, что некоторые зачатки пропозиционального исчисления имеются не только у схоластов, но и у античных авторов — материальная импликация, в частности, у Фило из Мегары. Относительно же истории законов де Моргана у схоластов смотри Ф. Бёнер в *Archiv für Philosophie*, том 4, 1951, стр. 113—146. ⟨К стр. 98.⟩

189) Не намереваясь входить в историю вопроса, мы просто составили примерный список по материалам сравнительно новых работ традиционного характера. После выполнения частей (1) и (2) данного упражнения обнаружатся некоторые противоречия. Они могут быть отнесены частью за счет неопределенности содержания, частью за счет расхождений между различными авторами. ⟨К стр. 98.⟩

190) Мы отбрасываем как не относящееся к делу традиционное предположение, что предложения должны иметь субъектно-предикатную форму. ⟨К стр. 98.⟩

191) Вопрос о представлении гипотетического и дизъюнктивного силлогизмов в обозначениях пропозиционального исчисления рассматривала Лангер в приложении к ее *Introduction to Symbolic Logic* (1937). ⟨К стр. 98.⟩

192) История здесь лишь незначительно изменена по сравнению с оригиналом Мигуэля де Сервантеса (1615). ⟨К стр. 99.⟩

193) Пост в *American Journal of Mathematics*, том 43, 1921, см. стр. 177.

Ввиду наличия правила подстановки, понятие абсолютной непротиворечивости тесно связано с понятием непротиворечивости в смысле Поста; первым его использовал в качестве общего определения непротиворечивости, как будто, Тарский (*Monatschefte* *für Mathematik und Physik*, том 37, 1930, см. стр. 387—388). Сходное замечание можно сделать и относительно понятия абсолютной полноты (ср. Тарский, там же, стр. 390—391). <К стр. 101.>

[194] Читатель, который хочет поскорее перейти к логистическим системам более существенного характера, чем пропозициональное исчисление, может опустить § 19 и все параграфы главы II, за исключением §§ 20—23, 27. Особенно уместно отложить §§ 26, 28 и соответствующие им упражнения, с тем чтобы изучать их в связи с дальнейшими главами. <К стр. 105.>

[195] Что касается правил вывода, то эквивалентность двух определений независимости обосновывается рассуждениями, близкими к тем, с помощью которых мы в примечании 183 показывали, что наложенные нами на исходные правила вывода требования эффективности достаточны для того, чтобы обеспечить выполнение необходимых условий эффективности для производных правил вывода (§ 12) в тех случаях, когда такое исходное правило доказывается в качестве метатеоремы какой-либо другой системы. В дальнейшем мы будем пользоваться только вторым определением независимости правил вывода, т. е. будем называть правило независимым, если имеется по меньшей мере одна теорема, которую нельзя доказать без него.

Следует иметь в виду, что независимое вначале правило вывода может стать зависимым при добавлении к логистической системе дополнительных аксиом. <К стр. 105.>

[196] Требование экономии предположений обычно считают относящимся также к длине и сложности (или, быть может, в некотором смысле к силе) индивидуальных правил или аксиом, а не только к их числу. <К стр. 105.>

[197] На практике удобно именно так использовать числа для обозначения истинностных значений, хотя аналогия с обозначениями, использованными для случая двух истинностных значений, подсказывает скорее $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, ..., $\mathfrak{t}_\mu$ в качестве выделенных и $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, ..., $\mathfrak{f}_{\nu-\mu}$ в качестве невыделенных истинностных значений.

Числа 0 и 1 часто употребляются вместо букв $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ также при проверке тавтологий по способу, указанному в § 15. <К стр. 106.>

[198] Можно пользоваться также и бесконечным числом истинностных значений, среди которых имеется конечное или же бесконечное число выделенных истинностных значений, и аналогично — невыделенных истинностных значений. В этом случае прямая проверка тавтологий (по способу, аналогичному указанному в § 15) не является уже эффективной, тем не менее понятие тавтологии может все же быть полезным. <К стр. 106.>

[199] У Карнапа слово „интерпретация" используется в несколько ином смысле, чем у нас, поэтому наша терминология не совпадает с карнаповской, а является ее адаптацией, соответствующей настоящему контексту. Впервые на существование правильных интерпретаций пропозиционального исчисления (в любой его формулировке), не являющихся вместе с тем нормальными, указал по существу Бернштейн в *Bulletin of the American Mathematical Society*, том 38, 1932, стр. 390, 592; а также независимо от него Карнап в своей книге *Formalization of Logic*, 1943. См. также рецензию на эту работу Карнапа автора настоящей книги в *The Philosophical Review*, том 53, 1944, стр. 493—498. ⟨К стр. 110.⟩

Примечания к главе II

[200] Под „пп-частью" некоторой формулы мы всегда будем понимать ее связную пп-часть; такая терминология является, конечно, естественной и не нуждается в разъяснениях. ⟨К стр. 116.⟩

[201] Относительно метатеорем **225—**227 ср. упражнение 12.1 и примечание 176. ⟨К стр. 116.⟩

[202] Само по себе существование много-однозначного или даже одно-однозначного соответствия между пп-формулами систем P_1 и P_2, которое сопоставляло бы теоремы теоремам и нетеоремы нетеоремам, следует уже из того, что теоремы и нетеоремы как в системе P_1, так и в системе P_2 составляют счетные бесконечные классы. Однако само по себе существование такого соответствия, не обладающего какими-либо дополнительными свойствами вроде сформулированных здесь структурных свойств, вряд ли может считаться свидетельством существенной эквивалентности двух систем. В главе X мы вернемся к вопросу, как лучше всего понимать в общем случае *эквивалентность* двух логистических систем. ⟨К стр. 121.⟩

[203] Обозначение $[p, q, r]$ удобно произносить следующим образом: „p или r в зависимости от q или не-q". ⟨К стр. 124.⟩

[204] То есть сентенциональные связки из § 05. ⟨К стр. 124.⟩

[205] Заметим, что пп-формула с одной переменной имеет истинностную таблицу из двух столбцов, пп-формула с двумя переменными — истинностную таблицу из трех столбцов и т. д. Пп-формула, не содержащая переменных, имеет точно одно (фиксированное) значение, и поэтому можно считать, что ее истинностная таблица состоит из одного столбца (и одной строки). Из определения полноты мы нарочно исключили истинностные таблицы из одного столбца, так как хотим считать полными не только такие системы, как импликация и f, но и такие, как импликация и отрицание. ⟨К стр. 125.⟩

[206] В своей монографии *The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic* (1941). Для не более чем бинарных связок существует другое рассмотрение этого вопроса, предложенное Вильямом Верником в *Transactions of the American Mathematical Society*, том 51, 1942, стр. 117—132.

Пост рассматривал также проблему описания истинностных таблиц, получающихся в произвольной системе исходных связок (с заданными истинностными таблицами). ⟨К стр. 125.⟩

[207] Возможность положить в основу пропозиционального исчисления одну-единственную исходную связку была известна еще Пирсу, как это видно из одного фрагмента, написанного им около 1880 г., и из главы 3 его неоконченной *Minute Logic*, датированной январем-февралем 1902 г. Они оставались неопубликованными при жизни Пирса, но появились в четвертом томе его *Collected Papers* (см. стр. 13—18, 215—216 этого тома). Первое сообщение в печати относительно возможности положить в основу пропозиционального исчисления одну-единственную исходную связку было сделано Шеффером в *Transactions of the American Mathematical Society*, том 14, 1913, стр. 481—488.

Для булевых алгебр этому соответствует то обстоятельство, что в основу обычных булевых операций может быть положена одна-единственная операция, которую можно выбрать из двух дуальных друг к другу операций. Обе эти операции были совместно использованы в качестве самодуальной системы исходных операций для пропозиционального рассмотрения булевых алгебр Эдвардом Штаммом в статье, опубликованной в *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 22, 1911, стр. 137—149. Фактическое построение булевой алгебры на основе одной исходной связки было впервые выполнено Шеффером в статье 1913 г. (некоторые указания на этот счет имеются также в неопубликованном фрагменте Пирса 1880 г.)

Обозначения Пирса, являющиеся его двумя альтернативными единственными исходными связками пропозиционального исчисления, не были использованы другими авторами, и их незачем воспроизводить здесь. Шеффер использовал знак дизъюнкции $\vee$, понимая его, однако, как знак антидизъюнкции; антиконъюнкция была введена им лишь в примечании, и для нее он специального знака не применял. Вертикальная черта, называемая с тех пор штрихом Шеффера, использовалась Шеффером лишь в связи с булевыми алгебрами; в качестве знака для антиконъюнкции его впервые использовал Нико в статье, в которой имеется его единственная аксиома пропозиционального исчисления, рассматриваемая в следующем параграфе (ср. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, том 19, 1917—1920, стр. 32—41.) ⟨К стр. 128.⟩

[208] Предлагается в качестве нерешенной проблемы для исследования, а не в качестве упражнения в обычном смысле. Автор не пытался найти решение. ⟨К стр. 133.⟩

[209] Аренд Гейнтинг в *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Physikalisch-mathematische Klasse, 1930, стр. 42—56. ⟨К стр. 135.⟩

[210] А. Колмогоров в *Математическом сборнике*, том 32, 1924—1925, стр. 646—667 и Ингебрайт Иогансон в *Compositio Mathematica*, том 4, 1936, стр. 119—136. См. также статью Вайсберга, цитированную в следующем примечании.

Колмогоров рассматривает вначале не полное минимальное исчисление, а ту его часть, которая получается отбрасыванием трех исходных связок—конъюнкции, дизъюнкции и эквивалентности — и содержащих их аксиом (и получает для этого исчисления результат, сходный с полученным позднее для интуиционистского исчисления результатом Гливенко, который приведен в упражнении 26.15). Колмогоров упоминает в одном примечании о добавлении трех аксиом для дизъюнкции, приведенных нами в тексте, однако полное минимальное исчисление и само название („minimal calculus" или „Minimalkalkül") встречается впервые в статье Иогансона. Колмогоров использует в качестве аксиом для импликации не две приведенные в тексте, а эквивалентные им четыре аксиомы, заимствованные у Гильберта, а три аксиомы для дизъюнкции он заимствует у Аккермана. Иогансон использует аксиомы Гейтинга (из статьи, цитированной в примечании 209), опуская одну из аксиом отрицания. 〈К стр. 136.〉

[211] М. Вайсберг в *Wiadomości Matematyczne*, том 46, 1938, стр. 45—101.

〈*Поправка, присланная автором.*〉 Эта статья Вайсберга содержит ошибку, которую нелегко исправить. Однако метатеорема, о которой идет речь, и аналогичная метатеорема формулировки F^{1i} интуиционистского функционального исчисления первого порядка были доказаны Карри в *The Journal of Symbolic Logic*, том 4, стр. 128 (1), и доказательство было воспроизведено Клини в *The Journal of Symbolic Logic*, том 19, стр. 215. Так как доказательство, данное Карри, зависит от генценовского *Hauptsatz* для *LJ*, то следует заметить, что существенным является использование самого *Hauptsatz*, а не генценовских *Sequenzen*, так как последние могут, разумеется, быть элиминированы с помощью определения, данного на стр. 165 (с $m = 1$ в интуиционистском случае), и *Hauptsatz* оказывается тем самым доказанным в такой форме, которая применима к формулировкам обычного вида без *Sequenzen*. (Ср. Карри, *loc. cit.* и Шютте, *The Journal of Symbolic Logic*, том 16, стр. 155.) 〈К стр. 136.〉

[212] Герхард Генцен в *Mathematische Zeitschrift*, том 39, 1934, стр. 176—210, 405—431. Вайсберг, *loc. cit.* Другие процедуры разрешения для интуиционистского пропозиционального исчисления предложены Мак-Кинси и Альфредом Тарским в *The Journal of Symbolic Logic*, том 13, 1948, стр. 1—15, Ригером в *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Carolinae*, № 189, 1949, и Б. Ю. Пильчак в *Докладах Академии Наук СССР*, том 75, 1950, стр. 773—776. 〈К стр. 137.〉

[213] Это решение проблемы разрешения для исчисления эквивалентности принадлежит Лесьневскому. Обратите внимание на его связь с 15.7. ⟨К стр. 137.⟩

[214] Это решение проблемы разрешения для исчисления эквивалентности и отрицания является следствием данного Лесьневским решения проблемы разрешения для исчисления эквивалентности и получено независимо друг от друга Мак-Кинси и Михайлеску; см. *The Journal of Symbolic Logic*, том 2, стр. 175 и том 3, стр. 55. Здесь вновь следует обратить внимание на связь с 15.7. ⟨К стр. 138.⟩

[215] Михайлеску в *Annales Scientifiques de l'Université de Jassy*, part I, том 23, 1937, стр. 369—408, iv. ⟨К стр. 138.⟩

[216] Эти два правила были использованы Стоуном в *American Journal of Mathematics*, том 59, 1937, стр. 506—514. ⟨К стр. 138.⟩

[217] Станислав Яськовский построил такую систему истинностных таблиц с бесконечным числом истинностных значений, при которой тавтологии совпадают с теоремами интуиционистского пропозиционального исчисления (т. е. такую, которая по терминологии Мак-Кинси является *характеристической* для интуиционистского пропозиционального исчисления). См. *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, Paris, 1935 (опубликовано в 1936), part VI, стр. 58—61.

(*Добавлено в корректуре.* См., далее, статью Джина Роуза в *Transactions of the American Mathematical Society*, том 75, 1953, стр. 1—19.) ⟨К стр. 140.⟩

[218] См. цитированную в примечании 271 статью Гливенко и статью Гёделя в *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, № 4, 1933, стр. 34—38. ⟨К стр. 141.⟩

[219] Для минимального исчисления этот результат был получен Иогансоном (*loc. cit.*); позднее Вайсбергом (*loc. cit.*) этот результат был получен для минимального исчисления Колмогорова с импликацией и отрицанием в качестве единственных исходных связок. (См. примечания 210, 211). ⟨К стр. 142.⟩

[220] Вайсберг показал (*loc. cit.*), что импликация-конъюнкция-дизъюнкция-*f* и импликация-конъюнкция-дизъюнкция-отрицание образуют полные системы независимых исходных связок для систем $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{W}}$ и $\mathrm{P}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{S}}$ соответственно, т. е. для интуиционистского пропозиционального исчисления. ⟨К стр. 142.⟩

[221] Другого рода формулировка с бесконечным числом аксиом получается, если выбрать соответствующим образом систему исходных связок и затем принять в качестве аксиом все тавтологии; при этом не нужны никакие правила вывода — на это указал по существу еще Эрбран в 1930 г.

Этот прием не обеспечивает дедуктивного анализа пропозиционального исчисления и не дает возможности исследовать результаты принятия или отбрасывания различных частных предположений (таких, например, как закон исключенного третьего или закон отрицания антецедента; ср. § 26). Тем не менее он может быть полезным в тех случаях, когда желательно лишь бегло просмотреть пропозициональное исчисление и только в качестве подготовки к изучению более обширных систем. Он был использован таким образом Гильбертом и Бернайсом (*Grundlagen der Mathematik*, том 1, 1934, см. стр. 83, 105), Куайном (*Mathematical Logic*, 1940, см. стр. 88—89) и другими авторами.

Аналогичный сокращенный прием можно в действительности применить при исследовании любой логистической системы, проблема разрешения которой решена таким способом, который обеспечивает практически осуществимую процедуру разрешения, но, конечно, лишь после решения проблемы разрешения. ⟨К стр. 143.⟩

[222)] Ср. рассмотрение определений-схем в § 11. ⟨К стр. 143.⟩

[223)] Следует заметить, что, несмотря на эквивалентность систем P и P_2 в строгом смысле, указываемом метатеоремами *270 и **271, и несмотря на полноту системы P_2, система P не является, тем не менее, полной в каком-либо из трех смыслов § 18. Действительно, пп-формула $p \supset q$, например, может быть добавлена к системе P в качестве аксиомы, не вызывая при этом какой-либо противоречивости. Семантически это связано с тем обстоятельством, что система P имеет более широкий класс правильных интерпретаций, нежели система P_2, так как правила системы P (вследствие отказа от правила подстановки) уже более не достаточны для различения пропозициональных переменных и пропозициональных констант. ⟨К стр. 144.⟩

[224)] Расширенное пропозициональное исчисление рассматривалось Расселом под названием „theory of implication" в *American Journal of Mathematics*, том 28, 1906, стр. 159—202. Оно рассматривалось Лукасевичем и Тарским как „erweiterter Aussagenkalkül" в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 23, 1930, стр. 44—50. ⟨К стр. 145 и 149.⟩

[225)] Как явствует из одного неформального рассуждения в *The Principles of Mathematics* (1903) и из дальнейшего рассмотрения этого вопроса у Рассела, он также собирался использовать эти элементы для расширенного пропозиционального исчисления. Однако в 1906 г. он взял отрицание в качестве дополнительной исходной связки на том основании, что в противном случае было бы невозможно выразить суждение, что не все истинно, — которое, как он полагает, выражается адэкватным образом посредством $\sim (p)p$, но не посредством $(p)p \supset (s)s$. (Автору кажется, что позиция Рассела 1906 г. включает весьма сомнительный тезис, что существует *единственный априори данный* общеобязательный концепт отрицания, воспроизведение которого является задачей логиков; вряд ли даже крайний реализм Фреге совместим с этим. ⟨К стр. 145.⟩

[226] В 1903 году Рассел действительно определяет $\sim p$ как $p \supset_r r$. В 1906 г. он рассматривает и отвергает определение $\sim p$ как $p \supset (s)s$. Расселу же принадлежит (1903, 1906) определение конъюнкции pq (или, более общо, **AB**), которое указывается третьей из четырех формул, напечатанных петитом на стр. 145 внизу.

Определение $\sim p$ как $p \supset_r r$ намечено в статье Пирса 1885 г. (*American Journal of Mathematics*, том 7, см. стр. 189—190). И возможно, что Рассел почерпнул свою идею из этого источника. Во всяком случае, Пирс не использовал явно квантора общности для определения отрицания, а выражал отрицание p посредством $p \supset \alpha$, где α определялось словами как „index of no matter what token" ⟨показатель произвольности значения⟩. ⟨К стр. 145.⟩

[227] Помимо использования слова „конъюнкция" для обозначения связки или ее присоединенной функции, как было разъяснено в § 05, будет удобно также называть „конъюнкцией" пп-формулу **CD** (построенную из **C** и **D** с помощью этой связки). Аналогично пп-формула **C** $\vee$ **D** будет называться „дизъюнкцией", пп-формула **C** $\equiv$ **D** — „эквивалентностью", пп-формула $\sim$**C** — „отрицанием" и т. д. ⟨К стр. 146.⟩

[228] Станислав Лесьневский, „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik" в *Fundamenta Mathematicae*, том 14, 1929, стр. 1—81. ⟨К стр. 146.⟩

[229] В тех случаях, когда допускаются переменные таких более высоких типов, следует говорить о *высших прототетиках*. [*Добавлено в корректуре*. С тех пор, как это было написано, появилось обширное сообщение о прототетике Слупецкого в *Studia Logica* (Warsaw), том 1, 1953, стр. 44—112; Слупецкий называет *пропозициональным исчислением с кванторами*, *элементарной прототетикой* и *прототетикой* то, что мы здесь называем *расширенным пропозициональным исчислением*, *прототетикой* и *высшей прототетикой* соответственно.] ⟨К стр. 146.⟩

[230] *Fundamenta Mathematicae*, том 4, 1923, стр. 196—200. ⟨К стр. 147.⟩

[231] При написании конкретных пп-формул прототетики можно для сокращения просто опускать верхние индексы у букв f, g, h. Переменные, значениями которых являются функции с различным числом переменных, нельзя путать друг с другом или с буквой f, обозначающей истинностное значение ложь. ⟨К стр. 147 и 148.⟩

[232] Говоря о конъюнкции четырех пп-формул **A**, **B**, **C**, **D**, мы, конечно, имеем в виду конъюнкцию **ABCD**, понимаемую в соответствии с соглашением о группировке влево (§ 11). ⟨К стр. 147.⟩

[233] Относительно этого решения проблемы разрешения для прототетики см. также Лесьневский, *loc. cit.* и имеющиеся там ссылки на Лукасевича и Тарского. ⟨К стр. 147.⟩

[234] В случае функционального исчисления четвертого или более высокого порядка модификация прототетики будет состоять (помимо замены букв, употребляемых для истинностно-функциональных переменных) в том, что будет допускаться использование обозначения применения функции к ее аргументам только в таких комбинациях, как $\mathfrak{a}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, . . ., где $\mathfrak{a}$ является в каждом случае истинностно-функциональной переменной соответствующего рода, а $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, . . . должны быть пропозициональными переменными. По соображениям, которые выясняются в дальнейшем, это можно считать модификацией не самой прототетики, а ее частной формулировки, причем выбор точки зрения зависит от того, какое понятие эквивалентности логистических систем мы примем для этой цели. Однако, несмотря на то, что, например, 28.1 (4) и 28.1 (7) являются пп-формулами рассмотренной в этом параграфе формулировки прототетики, они не являются пп-формулами какого-либо функционального исчисления высшего порядка (даже при замене букв f, g).

С другой стороны, прототетика входит как часть в логистическую систему главы X без какой бы то ни было модификации, кроме тривиальных по существу изменений обозначений. ⟨К стр. 147.⟩

[235] Обратите внимание на связь этой формулы с метатеоремой упражнения 15.2 (или с аналогами этой метатеоремы в любой другой формулировке пропозиционального исчисления). А именно, все теоремы, задаваемые этой метатеоремой, заключены, в известном смысле, в одной данной теореме прототетики, так как прямо получаются из нее с помощью аналогичного *101 или *201 правила подстановки для пропозициональных переменных и правила подстановки для истинностно-функциональных переменных, аналогичного рассматриваемому в следующей главе правилу подстановки для функциональных переменных. Таким образом, связь эта сходна со связью, например, между пп-формулой $\sim p \supset_{\blacksquare} p \supset q$ пропозиционального исчисления и метатеоремой, утверждающей, что всякая пп-формула $\sim \mathbf{A} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ является теоремой. ⟨К стр. 148.⟩

[236] Ср. Тарский, статья, цитированная в примечании 230. ⟨К стр. 148.⟩

[237] Найден Джорджем Булем для исчисления классов. Обратите внимание на связь с метатеоремой из упражнения 24.9 (относительно свед́ения к полной дизъюнктивной нормальной форме). ⟨К стр. 148.⟩

[238] Из статьи Болеслава Собоцинского, *Z Badań nad Prototetyką*, которая вышла в виде отдельного оттиска в 1939 г., но почти

все экземпляры которой погибли во время войны. В 1949 г. „Institut d'Études Polonaises en Belgique" издал под названием *An Investigation of Protothetic* английский перевод с добавлением пояснительного введения. ⟨К стр. 148.⟩

[239] Многие авторы предвосхищали идею своего рода алгебры или исчисления логики, особенно Лейбниц, Готфрид Плюке, Ламберт, Кастильон; их попытки, однако, были в различных отношениях неудовлетворительны и недостаточны и не привели к связному развитию. См. Кутюра, *La Logique de Leibniz* (1901) и *Opuscules et Fragments Inédits de Leibniz* (1903); Льюис, *A Survey of Symbolic Logic* (1918); Йорген Йоргенсен, *A Treatise of Formal Logic* (1931); Карл Дюр, „Die Logistik Johann Heinrich Lamberts" в *Festschrift Andreas Speiser* (1945); „A Bibliography of Symbolic Logic" автора этих строк в томах 1 и 3 *The Journal of Symbolic Logic*. ⟨К стр. 148.⟩

[240] Джордж Буль, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), *An Investigation of the Laws of Thought* (1854). Аугустус Де Морган, *Formal Logic* (1847). ⟨К стр. 148.⟩

[241] Де Морган, *Syllabus of a Proposed System of Logic* (1860) и статья в *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, том 10, 1864, стр. 331—358. Пирс, различные статьи 1870—1903 гг., изданные в 3 томе его *Collected Papers*; Мёрфи, различные статьи 1875—1891 гг.; Эрнст Шрёдер, *Algebra der Logik*, том 3, 1895. ⟨К стр. 148.⟩

[242] *Mathematical Questions*, том 28, 1877, стр. 20—23; *Proceedings of the London Mathematical Society*, том 9, 1877—1878, стр. 9—20, 177—186 и том 10, 1878—1879, стр. 16—28; *Mind*, том 5, 1880, стр. 45—60; *Philosophical Magazine*, 5*s*, том 11, 1881, стр. 40—43. ⟨К стр. 148.⟩

[243] Лукасевич и Тарский, „Untersuchungen über den Aussagenkalkül" в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 23, 1930, стр. 30—50. ⟨К стр. 148.⟩

[244] Прекрасный исторический и вводный обзор работы Уайтхеда Рассела имеется в главе 2 книги *The Philosophy of Alfred North Whitehead* Куайна. ⟨К стр. 149.⟩

[245] *American Journal of Mathematics*, том 30, 1908, стр. 222—262. ⟨К стр. 150.⟩

[246] *Mathematische Zeitschrift*, том 25, 1926, стр. 305—320. ⟨К стр. 150⟩

[247] *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, том 19, 1917—1920, стр. 32—41. ⟨К стр. 150.⟩

[248] Эрик Гётлинд в *Norsk Matematisk Tidsskrift*, том 29, 1947, стр. 1—4; Е. Расёва, ibid., том 31, 1949, стр. 1—3. ⟨К стр. 150.⟩

[249] *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, том 10, 1913, стр. 428—438. ⟨К стр. 150.⟩

[250] *Mathematische Zeitschrift*, том 26, 1927, стр. 1—46. Метод фон Неймана можно применить как средство формулирования такой ло-

гистической системы, в которой нельзя использовать правило подстановки, так как в ней нет пропозициональных переменных или других переменных, соответствующих той же цели. Так, в частности, простое прикладное функциональное исчисление первого порядка в смысле следующей главы (§ 30) следует формулировать с помощью аксиомных схем, а не правила или правил подстановки.

См. изучение этого вопроса у Гильберта и Бернайса в *Grundlagen der Mathematik*, том 1, стр. 248—249; а также, специально для пропозиционального исчисления, у Бернайса в *Logical Calculus*, 1935—1936, стр. 44—47; также у Бернайса, ibid., стр. 50—53. ⟨К стр. 150.⟩

[251] В *Revue de Métaphysique et de Morale*, том 12, 1904, стр. 25—30 и в *Les Principes des Mathématiques*, 1905. ⟨К стр. 150.⟩

[252] Другими встречающимися в литературе названиями являются „theory of deduction" ⟨теория дедукции⟩ в *Principia Mathematica* и в расселовской *Introduction to Mathematical Philosophy* и „sentential calculus" ⟨сентенциональное исчисление⟩ (т. е. calculus of sentences ⟨исчисление предложений⟩ у многих современных авторов). Оба эти названия, однако, кажутся довольно неподходящими, так как они ссылаются на определенные синтаксические аспекты исчисления (выводимость, предложения), а не на соответствующие содержания (импликация, суждения). Действительно, естественнее было бы считать теорию дедукции или исчисление предложений ветвью логического синтаксиса и излагать ее на метаязыке. ⟨К стр. 151.⟩

[253] В статье, упомянутой в примечании 247. ⟨К стр. 151.⟩

[254] *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 39, 1932, стр. 259—262. ⟨К стр. 151.⟩

[255] Описана в статье Вайсберга, упомянутой в предыдущем примечании. Еще одна модификация аксиомы Нико, принадлежащая Лукасевичу, приведена Лесьневским на стр. 10 в статье, упомянутой в примечании 228. ⟨К стр. 151.⟩

[256] *Przegląd Filozoficzny*, том 35, 1932, стр. 171—193. ⟨К стр. 151.⟩

[257] *Proceedings of the Royal Irish Academy*, том 52, section A, № 3, 1948, стр. 25—33. (*Добавлено в корректуре*. Различные более короткие единственные аксиомы пропозиционального исчисления предложены Мередитом в *The Journal of Computing Systems*, том 1, № 3, 1953, стр. 155—164.) ⟨К стр. 151.⟩

[258] См. изложение этого вопроса у Лукасевича и Тарского в статье, упомянутой в примечании 243. ⟨К стр. 151.⟩

[259] В *Wiadomo'ci Matematyczné*, том 43, 1937, стр. 131—168. ⟨К стр. 151.⟩

[260] См. упомянутую в примечании 228 статью, стр. 10—11. ⟨К стр. 151.⟩

[261] В той же самой статье, стр. 16. ⟨К стр. 152.⟩

[262] В статье, цитированной в примечании 259, стр. 163. Аксиомы были сначала анонсированы, без доказательства их достаточности, в статье, цитированной в примечании 254. ⟨К стр. 152.⟩

[263] Система из упражнения 26.3 (1) изложена в статье Вайсберга из примечания 259, стр. 165; предварительно она была анонсирована в статье из примечания 254. Эти же статьи содержат две другие принадлежащие Вайсбергу формулировки исчисления эквивалентности, одна из которых содержит одну-единственную аксиому. Различные другие единственные аксиомы для исчисления эквивалентности указаны (без доказательства достаточности) в статье, цитированной в примечании 256. Однако самые короткие единственные аксиомы для исчисления эквивалентностей, с такими же, как в упражнении 26.0, правилами вывода, принадлежат Лукасевичу; одной из них является аксиома, приведенная в 26.3 (2) (см. реферат Генриха Шольца в *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, том 22, 1940, стр. 289—290). ⟨К стр. 152.⟩

[264] В статье, упомянутой в примечании 215. ⟨К стр. 152.⟩

[265] В его мимеографированных *Elementy Logiki Matematycznej*, Варшава, 1929. ⟨К стр. 152.⟩

[266] Например, в *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, том 6, 1928, стр. 65—85. ⟨К стр. 152.⟩

[267] Гильберт и Бернайс используют аксиому $p \supset q \supset . \, p \supset r \supset . \, p \supset qr$ вместо более короткой аксиомы $p \supset . \, q \supset pq$. Они указывают на очевидную возможность использовать более короткую аксиому, но подчеркивают, что при этом в той формулировке пропозиционального исчисления, которую они приняли первоначально (и которая в некоторых иных отношениях не совсем совпадает с нашей системой P_H), нарушилась бы независимость аксиомы $p \supset . \, q \supset p$. В своем *Logical Calculus*, 1935—1936, стр. 44, Бернайс вводит формулировку $P_{H'}$ пропозиционального исчисления, которая отличается от P_H единственно тем, что она вместо обратного закона контрапозиции содержит в качестве аксиом закон *приведения к абсурду* и закон двойного отрицания. Независимость $p \supset . \, q \supset p$ как аксиомы в P_H была указана выше в 26.8, а ее независимость как аксиомы в $P_{H'}$ (вопрос, оставленный Бернайсом открытым) может быть доказана почти тем же самым методом.

Дополнительные результаты и замечания, относящиеся к P_H и родственным системам, включая позитивное импликативное пропозициональное исчисление, позитивное пропозициональное исчисление и интуиционистское пропозициональное исчисление, помещены в приложении III второго тома *Grundlagen der Mathematik* Гильберта и Бернайса. ⟨К стр. 152.⟩

268) Приписывается ему Вайсбергом в статье, упомянутой в примечании 211. ⟨К стр. 153.⟩

269) В статье, упомянутой в примечании 211. ⟨К стр. 153.⟩

270) См. *Mathematische Zeitschrift*, том 39, стр. 189. ⟨К стр. 153.⟩

271) В его статье в *Académie Royale de Belgique, Bulletins de la Classe des Sciences*, ser. 5, том 15, 1929, стр. 183—188 (которая содержит также в качестве своего основного результата метатеорему из упражнения 26.15). ⟨К стр. 153.⟩

272) В своей статье, упомянутой в примечании 67, стр. 190—192 (или *Collected Papers*, том 3, стр. 223—225). ⟨К стр. 153.⟩

273) Ян Лукасевич в *Przegląd Filozoficzny*, том 23, 1921, стр. 189—205 и в более поздних публикациях. ⟨К стр. 153.⟩

274) Пост в *American Journal of Mathematics*, том 43, 1921, стр. 163—185. ⟨К стр. 153.⟩

275) Людвиг Витгенштейн, „Logisch-philosophische Abhandlung" в *Annalen der Naturphilosophie*, том 14, 1921, стр. 185—262; переиздано в виде книги под названием *Tractatus Logico-philosophicus* с параллельным английским переводом. ⟨К стр. 153.⟩

276) *Ruch Filozoficzny*, том 5, 1920, стр. 169—171. Истинностная таблица Лукасевича для $\supset$ имеется в упражнении 19.8, где описывается трехзначное пропозициональное исчисление, весьма близкое к исчислению Лукасевича. ⟨К стр. 153.⟩

277) В упомянутой в примечании 274 статье, являющейся диссертацией Поста, 1920 г. ⟨К стр. 153.⟩

278) В публикациях, упомянутых в примечаниях 243 и 265 и в *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* Лукасевича, которые непосредственно следуют (в том же периодическом издании) за статьей, упомянутой в примечании 243. ⟨К стр. 153.⟩

279) Иржи Слупецкий в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 29, 1936, стр. 9—11; том 32, 1939, стр. 102—128. ⟨К стр. 154.⟩

280) В *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 24, 1931, стр. 126—148. Другая система аксиом и правил вывода для трехзначного пропозиционального исчисления Лукасевича предложена недавно Аланом Роузом в *The Journal of the London Mathematical Society*, том 26, 1951, стр. 50—58. ⟨К стр. 154.⟩

281) В *Mathematische Zeitschrift*, том 25, 1926, стр. 305—320. ⟨К стр. 154.⟩

282) Хантингтон в *Annals of Mathematics*, ser. 2, том 36, 1935, стр. 313—324. ⟨К стр. 154.⟩

[283] Первые два из результатов независимости из 26.11 доказаны в его статье от 1930 г., упомянутой в примечании 209. Все они непосредственно получаются тем же методом — как для формулировки интуиционистского пропозиционального исчисления самого Гейтинга, так и для всякой другой формулировки. ⟨К стр. 154.⟩

[284] *Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Anzeiger*, том 69, 1932, стр. 65—66. ⟨К стр. 154.⟩

[285] В статье из примечания 274. ⟨К стр. 154.⟩

[286] Ласло Кальмар в *Acta Scientiarum Mathematicarum*, том 7, № 4, 1935, стр. 222—243. ⟨К стр. 154 и 155.⟩

[287] В *The Journal of Symbolic Logic*, том 3, 1938, стр. 37—40. В этой статье имеются ссылки на более ранние доказательства полноты. ⟨К стр. 154.⟩

[288] В статье в *Wiadomości Matematyczne*, том 47, 1939, стр. 119—139. Идея применения метода Кальмара к этой формулировке пропозиционального исчисления была указана автору Леоном Хенкиным как приводящая, вероятно, кратчайшим путем к доказательству полноты пропозиционального исчисления (основанного на независимых аксиомах, а также на *модус поненс* и подстановке как правилах вывода).

Система $\mathrm{P}_{\mathrm{w}}^{\mathrm{m}}$ из упражнения 26.21 заимствована из той же статьи Вайсберга, где она кратко упомянута на стр. 139 при указании поправки к статье из примечания 211. ⟨К стр. 154.⟩

[289] В статье, упомянутой в примечании 259. ⟨К стр. 154 и 155.⟩

[290] Модифицированная форма теоремы дедукции, приспособленная к одной специальной формулировке функционального исчисления первого порядка, была приведена им без доказательства в одном резюме в *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Paris), том 186, 1928, см. стр. 1275. Теорема дедукции была сформулирована и доказана им для системы, сходной с функциональным исчислением порядка ω, в его парижской диссертации *Recherches sur la Théorie de la Démonstration*, опубликованной в 1930 г. под № 33 в *Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, стр. 61—62. При доказательстве теоремы дедукции в главе I и затем в главе III мы пользуемся методом, который по существу является методом Эрбрана. ⟨К стр. 155.⟩

[291] Она сформулирована им таким образом в статье в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 23, 1930, см. аксиому 8* на стр. 24. ⟨К стр. 155.⟩

[292] *Grundlagen der Mathematik*, том 1, стр. 155 и том 2, стр. 387. ⟨К стр. 155.⟩

[293] Станислав Яськовский, *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*, 1934. ⟨К стр. 155.⟩

[294] В *Mathematische Zeitschrift*, том 39, 1934, стр. 176—210, 405—431; см. особенно II. Abschnitt, стр. 183—190. ⟨К стр. 155.⟩

[295] Там же, III. Abschnitt, стр. 190—210. Генценовское использование *секвенций* заимствовано отчасти у Пауля Герца; см. статью Генцена в *Mathematische Annalen*, том 107, 1932, стр. 329—350 и имеющиеся там ссылки на Герца. ⟨К стр. 155.⟩

[296] Эквивалентности, совпадающие по существу с теми, которые получаются из этих определений-схем, даны Генценом в только что упомянутой статье, стр. 180 и стр. 418. ⟨К стр. 156.⟩

[297] В статье, упомянутой в примечании 274. См. также исследование истинностных функций и формальной эквивалентности во введении к первому тому *Principia Mathematica* (1910). ⟨К стр. 156.⟩

[298] В статье, упомянутой в примечании 259. ⟨К стр. 156.⟩

[299] В *American Journal of Mathematics*, том 3, 1880, стр. 37—39 (или *Collected Papers*, том 3, стр. 133—134).

Бэман (в статье в *Mathematische Annalen*, том 86, 1922, стр. 163—229) называет „disjunktive Normalform" дизъюнкцию термов $\mathbf{C}_i$, в которой каждый терм $\mathbf{C}_i$ имеет форму конъюнкции из отрицаемых или неотрицаемых пропозициональных переменных, и „konjunktive Normalform" —дуальное к нему выражение. Относительно использования этих нормальных форм Бэман ссылается на неопубликованную *Habilitationsschrift* Бернайса, 1918 г.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма соответствует „ausgezeichnete konjunktive Normalform" Гильберта и Аккермана (в *Grundzüge der theoretischen Logik**)) и таким образом является частным случаем „konjunktive Normalform" Бернайса, Бэмана, Гильберта и Аккермана. И — дуально — совершенная дизъюнктивная нормальная форма является частным случаем дизъюнктивной нормальной формы. ⟨К стр. 156.⟩

---

*) Русский перевод: *Основы теоретической логики*, ИЛ, М., 1947. — *Прим. перев.*

Примечания к главе III

[300] Мы требуем, чтобы в число исходных символов либо включались все переменные некоторой категории, либо не включалась ни одна из переменных этой категории, например либо весь бесконечный перечень бинарных функциональных переменных, либо же ни одна из них. Если, однако, включаются индивидные или функциональные константы, то число их может быть и конечным. ⟨К стр. 160.⟩

[301] Правило 30i может, разумеется, оказаться бессодержательным в случае определенных конкретных систем F^1, а именно, если в число исходных символов не включены пропозициональные переменные. Поэтому мы могли бы написать: „Отдельно взятая пропозициональная переменная, если F^1 таковые содержит, является пп-формулой." Добавленное положение (взятое в запятые) повышает ясность, но в остальном не является действительно необходимым. ⟨К стр. 160.⟩

[302] Сравните с первыми четырьмя абзацами § 06 и примечаниями 28, 36, 96. ⟨К стр. 161.⟩

[303] То есть при написании пп-формул мы можем для сокращения просто отбрасывать символ $\forall$.

Сравните с рассмотрением квантора общности в § 06. ⟨К стр. 162.⟩

[304] Сравните с рассмотрением квантора существования в § 06. ⟨К стр. 162.⟩

[305] Сравните с рассмотрением формальной импликации и формальной эквивалентности в § 06.

Определения-схемы D15 и D16, носящие характер чистых сокращений, следует отличать от семантических предложений § 06. Эти последние дают определения формальной эквивалентности и формальной импликации скорее в смысле примечания 168 (2), и они должны применяться к языкам-объектам, в которых рассматриваемые обозначения действительно присутствуют. ⟨К стр. 162.⟩

[306] В этом примере роль **A** играет пп-формула p, роль $\mathbf{a}$ — индивидная переменная x и роль **B** — пп-формула $F(x)$. ⟨К стр. 164⟩.

[307] Чтобы сделать совершенно ясным, каким образом эти пять пп-формул оказываются частными случаями схемы *306, укажем, что в первой из этих пп-формул роль **A** играет $F(x)$, роль $\mathbf{a}$ играет x, роль $\mathbf{b}$ играет y; во второй пп-формуле роль **A** играет $F(x)$, роль $\mathbf{a}$ играет x, роль $\mathbf{b}$ играет x; в третьей пп-формуле

роль **A** играет $F(x) \supset (y)G(y)$, роль **a** играет x, роль **b** играет y; в четвертой пп-формуле роль **A** играет $F(x) \supset (x)G(x)$, роль **a** играет x, роль **b** играет y; в последней пп-формуле роль **A** играет $F(x, y) \supset (z)G(x, z)$, роль **a** играет x, роль **b** играет y. ⟨К стр. 164.⟩

308) Хотя, как мы увидим позднее (упражнение 34.3), первая из них является теоремой. ⟨К стр. 164.⟩

309) Термин „индивид" ⟨individual⟩ был введен Расселом в связи с теорией типов, которая будет рассмотрена ниже в главе VI. Рассел придавал этому термину довольно специальное значение, описывая индивиды как вещи, „лишенные строения" (Рассел, 1908), или как объекты, которые „не являются ни суждениями, ни функциями" (Уайтхед и Рассел, 1910). Однако в свете расселовского признания, что во всяком контексте имеют действительное значение только относительные типы, теперь принято использовать термин „индивид" так, как это делается в тексте. Ср. Карнап, *Abriss der Logistik*, 1929, стр. 19. ⟨К стр. 166.⟩

310) Так как индивидные и функциональные переменные имеют в качестве переменных значения, то может показаться более естественным считать, что каждая из них в отдельности является пп-формулой, и поэтому дать такие семантические правила, которые приписывали бы им значения как формам (аналогично правилу c_0 в случае пропозициональных переменных). Такое же замечание можно считать применимым и к индивидным и функциональным константам в прикладном функциональном исчислении первого порядка. В логистической системе главы X мы действительно примем эту идею. Однако в функциональном исчислении первого (и более высокого) порядка практически более удобно не считать формулу, состоящую из одной отдельно взятой индивидной или функциональной переменной или же из одной отдельно взятой индивидной или функциональной константы, правильно построенной. Принимая такую терминологию, мы, тем не менее, будем считать индивидные и функциональные переменные и индивидные и функциональные константы собственными символами (ср. примечание 80) и будем считать, что, взятые в отдельности, они имеют некоторое содержание. В частности, мы будем говорить, что индивидные и функциональные константы имеют денотаты, а именно те, которые даются семантическими правилами. ⟨К стр. 166.⟩

311) В метаязыке использовано здесь то же самое обозначение для применения функции к ее аргументам, которое было введено нами в языке-объекте. Мы будем систематически пользоваться этим приемом, не считая это нарушением сказанного в предпоследнем абзаце § 08. Для тех редких случаев, когда из-за автонимии это могло бы привести к неясности, мы держим в резерве возможность сделать содержание однозначным с помощью словесных описаний. ⟨К стр. 166.⟩

[312] Это и следующие правила должны пониматься в соответствии с соглашением (введенным в § 10), что: (1) иметь значение для пустого класса переменных — это все равно, что обозначать; (2) значением константы для произвольной системы значений любых переменных является денотат константы; (3) значением формы для произвольной системы значений *любых переменных, среди которых имеются все свободные переменные формы*, является значение формы для данных значений ее свободных переменных (при игнорировании других переменных). ⟨К стр. 166.⟩

[313] В связи с упомянутым в примечании 312 соглашением полезно иметь в виду следующие частные случаи правила f и правила ζ. Пусть единственной свободной переменной пп-формулы **A** является **a**; тогда **(∀a)A** обозначает t, если для каждого значения переменной **a** пп-формула **A** принимает значение t, и **(∀a)A** обозначает f, если формула **A** принимает значение f для хотя бы одного значения переменной **a**. Если **A** не содержит **a** в качестве свободной переменной, то значение **(∀a)A** совпадает со значением пп-формулы **A** для всякой системы значений свободных переменных. Если **A** не содержит свободных переменных и если **a** является какой-либо индивидной переменной, то **(∀a)A** имеет тот же денотат, что и **A**. ⟨К стр. 166.⟩

[314] То есть *в некотором подходящем семантическом метаязыке* эти два бесконечных перечня правил могут быть, как указано, сведены к двум правилам. Чтобы не выходить за рамки настоящего исследования, мы не будем предпринимать детальной формализации (метаязыка), которая была бы необходима для того, чтобы ответить на вопрос, что является подходящим семантическим метаязыком для этой цели. Заметим, однако, употребляя терминологию, которая будет разъяснена в последующих главах, что с помощью некоторых искусственных приемов такой семантический метаязык может быть основан на прикладном функциональном исчислении достаточно высокого (конечного) порядка, в котором для представления определенных синтаксических и семантических понятий введены функциональные константы и содержащие их аксиомы (постулаты). ⟨К стр. 166.⟩

[315] Напомним, что в соответствии с § 04 класс — это то же самое, что и сингулярная пропозициональная функция. ⟨К стр. 168.⟩

[316] Другими словами, некоторое отношение между натуральными числами является отношением $\leqslant$ тогда и только тогда, когда оно обладает этими тремя свойствами. ⟨К стр. 168.⟩

[317] Совершенным числом называется отличное от 0 натуральное число, которое равно сумме своих истинных делителей, т. е. сумме натуральных чисел, которые меньше его и на которые оно делится нацело. ⟨К стр. 168.⟩

[318] Если среди исходных символов имеются пропозициональные переменные, то таким же образом доказывается, что F^1 непротиворечиво в смысле Поста.

(*Добавлено в корректуре.*) Доказательство непротиворечивости проведено здесь в такой форме, которая применима также, с очевидными изменениями, к такой формулировке, как F_2^{1p} (см. § 40), среди исходных правил вывода которой имеется правило подстановки вместо функциональных переменных. Вместе с тем, как указал мне Джон Кемени, рассуждение, ведущее в настоящем параграфе к метатеоремам **321 и **322, может быть значительно упрощено использованием более просто определяемой присоединенной формулы пропозиционального исчисления. А именно, пусть *сингулярная присоединенная формула пропозиционального исчисления* (сокращенно — „сфп") некоторой пп-формулы системы F^1 получается из ее присоединенной бескванторной формулы заменой каждой элементарной части одной пропозициональной переменной p. Из этого следует, например, что формулу $F(x) \supset G(y)$ можно было бы, не внося противоречий, присоединить к F^{1p} в качестве аксиомы, хотя ее и нельзя было бы присоединить таким же образом к F_2^{1p}. ⟨К стр. 173.⟩

[319] По поводу выражения „в силу P" (т. е. в силу пропозиционального исчисления) см. разъяснения, следующие в § 31 за *311. ⟨К стр. 178.⟩

[320] Это заключительное выражение совпадает с *330, т. е. с той теоремной схемой, которая должна была быть доказана (ср. D14). В таких случаях мы не будем ссылаться на использованные определения или определения-схемы, а будем просто предоставлять читателю самому увидеть, что доказательство завершено. ⟨К стр. 178.⟩

[321] Условие, чтобы $\mathfrak{a}$ было индивидной переменной, можно считать очевидным, так как в противном случае формула не была бы правильно построенной. Формулируя в дальнейшем теоремные схемы, мы будем систематически опускать явную формулировку таких условий, если они будут очевидны по указанным соображениям. ⟨К стр. 178.⟩

[322] Специальный случай схемы *306, в котором $\mathfrak{b}$ совпадает с $\mathfrak{a}$, будет часто использоваться. В частности, он дает (совместно с *модус поненс*) в качестве правила вывода инверсию правила обобщения, и в дальнейшем мы будем иметь случай использовать его таким образом. ⟨К стр. 178.⟩

[323] Это частный случай схемы *330, в котором $\mathfrak{b}$ совпадает с $\mathfrak{a}$. ⟨К стр. 178.⟩

[324] Такая ссылка на какую-либо частную тавтологию пропозиционального исчисления будет использоваться в качестве

более подробного эквивалента выражения „в силу P" или „затем используем P" и включает, таким образом, ссылку на *311 (ср. примечание 319).

325) Сравните примечание 322. ⟨К стр. 178.⟩

326) См. разъяснения в § 31. ⟨К стр. 178.⟩

327) То есть применяется правило вывода *301 и *332 в качестве посылки. ⟨К стр. 178.⟩

328) Более подробно, мы берем в качестве большей посылки

$$\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\mathbf{a}} [(\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset \mathbf{B}] \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B} \supset_{\blacksquare} (\mathbf{a})\,\mathbf{A} \supset_{\mathbf{a}} \mathbf{B},$$

что является частным случаем схемы *305, и используем *модус поненс*. ⟨К стр. 178.⟩

329) То есть, более подробно, мы берем

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \supset_{\blacksquare} \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$$

в качестве посылки и обобщаем по $\mathbf{a}$ (*301); затем мы берем полученную пп-формулу в качестве меньшей посылки и подходящий частный случай схемы *333 в качестве большей посылки и используем *модус поненс*. ⟨К стр. 178.⟩

330) Это вновь частный случай схемы *306, в котором $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ совпадают. ⟨К стр. 180.⟩

331) На этом шаге существенно, что $\mathbf{a}$ не является свободной переменной в

$$\mathbf{M} \equiv_{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n} \mathbf{N}.$$

Это обеспечивается предположением, что среди $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ имеются все свободные переменные пп-формул **M** и **N**, имеющие связанные вхождения в **A**. ⟨К стр. 181.⟩

332) Из метатеоремы этого упражнения следует, что изложение теоремы дедукции для системы F^1 в главе II *Introduction to Mathematical Logic*, часть I, издание 1944 г., ошибочно. Исправленное изложение теоремы дедукции дается ниже в § 36. ⟨К стр. 181.⟩

333) То есть для всякой частной пропозициональной переменной $\mathbf{p}$ и любых частных пп-формул **A** и **B** рассматриваемое синтаксическое выражение обозначает пп-формулу **A**, если не выполнено условие (1); если же это условие выполнено, то оно обозначает результат подстановки пп-формулы **B** вместо всех свободных вхождений $\mathbf{p}$ в **A**. ⟨К стр. 183.⟩

334) В случае системы F^1 слово „свободных" является здесь излишним. Оно включено потому, что мы хотим использовать то же обозначение подстановки и в связи с другими системами (не меняя при этом текста формулировки). ⟨К стр. 183.⟩

335) Сравните примечание 333. ⟨К стр. 183.⟩

[336] Ограничение свободными вхождениями **f** излишне в случае системы F^1, так как в пп-формулах системы F^1 всякое вхождение **f** является свободным. Как и раньше, это ограничение включено ради использования того же самого обозначения в связи с другими логистическими системами. ⟨К стр. 183.⟩

[337] Другими словами, условие (2) можно сформулировать так: если $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ имеет в **A** такое вхождение, в котором **f** свободно, и $(\mathbf{a}_1)\mathbf{C}$ является пп-частью формулы **B**, то $(\mathbf{a}_1)\mathbf{C}$ не должно содержать свободных вхождений переменной $\mathbf{x}_1$; если $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ имеет в **A** такое вхождение, в котором **f** свободно, и $(\mathbf{a}_2)\mathbf{C}$ является пп-частью формулы **B**, то $(\mathbf{a}_2)\mathbf{C}$ не должно содержать свободных вхождений переменной $\mathbf{x}_2$; и т. д. ⟨К стр. 183.⟩

[338] В этом месте доказательства видно, зачем введена пп-формула **B′**. Дело в том, что **B′** необходимо использовать вместо **B** для подстановки в **C** и $\mathbf{C} \supset \mathbf{D}$, так как условия (1) или (1) и (2), хотя и выполненные для Š-подстановки пп-формулы **B** в **D**, могут оказаться не выполненными для Š-подстановки пп-формулы **B** в **C** и $\mathbf{C} \supset \mathbf{D}$. ⟨К стр. 184.⟩

[339] В этом месте доказательства вновь видна необходимость использования пп-формулы **B′** вместо **B**, так как **b** может быть свободной переменной в **B**. ⟨К стр. 184.⟩

[340] Условия (1) или (1) и (2) из определения обозначения Š необходимы именно в этом месте доказательства для обеспечения того, что в этой дополнительной серии шагов, образующей заключительную часть доказательства, не потребуется ничего, кроме алфавитных замен связанных индивидных переменных и подстановок вместо свободных индивидных переменных — в согласии с *350 и *351 соответственно. ⟨К стр. 185.⟩

[341] Заметим, что производные правила *350 и *351, так же как и наше доказательство этих правил, сохраняют силу и для системы, полученной из F^1 добавлением произвольных дополнительных аксиом. В то же время правило *352 останется в силе только в том случае, если дополнительные аксиомы сохранят ситуацию, при которой результат Š-подстановки в некоторую аксиому вновь является аксиомой или, по крайней мере, теоремой. ⟨К стр. 185.⟩

[342] Или, точнее, согласно *350, или *351, или *352, переформулированными в виде правил вывода. ⟨К стр. 187.⟩

[343] В контексте, в котором это обозначение будет действительно употреблено, неопределенность его значения не приведет ни к какому недоразумению, так как мы знаем, что $\vdash \mathbf{B}$ в одном смысле тогда и только тогда, когда $\vdash \mathbf{B}$ в другом смысле. Тем не менее можно устранить эту неопределенность, приняв соглашение, что если гипотезы явно выписаны (как, например, в „$p \vdash q \supset p$"

или в „$\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_n$”), то обозначение следует понимать в смысле настоящего параграфа, причем возможность считать $n = 0$ в случае „$\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n \vdash \mathbf{B}_n$” не должна менять положения; если же знак $\vdash$ выписан действительно без предшествующих ему гипотез (как, например, в „$\vdash p \supset . q \supset p$”), то его следует понимать в смысле § 30. ⟨К стр. 187.⟩

344) Обратите здесь внимание на роль требования, чтобы $\mathbf{a}$ не входило в качестве свободной переменной в $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, . . ., $\mathbf{A}_n$ [пункт (4) в определении *доказательства из гипотез* в начале настоящего параграфа]. ⟨К стр. 188.⟩

345) Обратите внимание, в частности, на роль требования, чтобы заменяемая переменная не входила в $\mathbf{A}_n$ в качестве свободной переменной. ⟨К стр. 189.⟩

346) Сравните с рассмотрением производных правил вывода в § 12 и с рассмотрением в конце § 13 использования теоремы дедукции в пропозициональном исчислении. ⟨К стр. 189.⟩

347) Сравните *132—*134. ⟨К стр. 189.⟩

348) Например, в тех случаях, когда *333 используется в доказательстве *365, когда *364 используется в доказательстве *366, когда *365 используется в доказательстве *367, когда *333 и *392 используются в доказательстве *421. ⟨К стр. 189.⟩

349) Сравните с двумя последними абзацами в доказательстве метатеоремы *352. ⟨К стр. 190.⟩

350) В тех случаях, когда обобщение применяется в сочетании с теоремой дедукции, следует следить за тем, чтобы переменная $\mathbf{a}$, по которой проводится обобщение, не входила в качестве свободной переменной в какую-нибудь из гипотез. Читателю предлагается в каждом случае проверять это. ⟨К стр. 190 и 191.⟩

351) В случае $n = 1$ *366 доказано в качестве метатеоремы функционального исчисления первого порядка Гильбертом и Бернайсом, *Grundlagen der Mathematik*, том 1, 1934, стр. 157—158. Этот случай можно также сравнить с теоремами I и III в принадлежащей автору статье „A Set of Postulates for the Foundation of Logic” (*Annals of Mathematics*, том 33, 1932, см. стр. 358, 366), с которыми он, однако, далеко не совпадает, поскольку рассматриваемая в этой статье система значительно отличается от функциональных исчислений первого и более высоких порядков и является, как в дальнейшем показали Клини и Россер (в *Annals of Mathematics*, том 36, 1935, стр. 630—636), противоречивой. ⟨К стр. 191.⟩

352) D13 также можно было бы допустить здесь, однако исключение сокращений этого типа несколько упрощает изложение материала. Для того чтобы допустить D12, D15—17, нам пришлось

бы добавить дуалы этих определений-схем, придумывая подходящие для этой цели обозначения; но так как введенные таким образом обозначения вряд ли были бы использованы где-нибудь, кроме исследования дуальности, то делать этого не имеет смысла.

[353] В *306 условие, что *никакое свободное вхождение* **a** *в* **A** *не находится в такой пп-части формулы* **A**, *которая имеет вид* (**b**)**C**, очевидно, эквивалентно условию, что *никакое свободное вхождение* **a** *в* **A** *не находится в такой пп-части формулы* **A**, *которая имеет вид* (**b**)**C** *или вид* (∃**b**)**C**. Ясно, что во второй форме условие остается неизменным при дуализации. ⟨К стр. 193.⟩

[354] Помимо дуалов теоремных схем, мы будем иногда говорить о *дуалах* и других метатеорем, понимая под этим следствия, вытекающие из них в силу *372, *373, *374. Мы не уточняем этого понятия и будем использовать указанную терминологию только эвристически или в указаниях. ⟨К стр. 194.⟩

[355] Здесь используется тавтология $\sim p \supset r \supset . q \supset r \supset . p \supset q \supset r$. ⟨К стр. 196.⟩

[356] Изменениями, которые должны быть произведены в *305, *306, *330, *364, являются следующие: *330 и *364 должны быть преобразованы из теоремных схем в аксиомные схемы; встречающиеся кванторы существования должны истолковываться не как сокращения в соответствии с D14, а как выражения, включающие исходный символ ∃ системы F^{1_1}; выражения „свободное вхождение" и „свободная переменная" должны быть истолкованы в соответствии с только что данным для F^{1_1} измененным определением; наконец, в *306 и *330 последнее условие формулировки должно быть видоизменено таким образом: „И никакое свободное вхождение **a** в **A** не находится в такой пп-части формулы **A**, которая имеет вид (∀**b**)**C** или вид (∃**b**)**C**". ⟨К стр. 197.⟩

[357] Этот результат получен по существу А. Н. Колмогоровым в статье, цитированной в примечании 210.

(*Добавлено в корректуре.*) Целый ряд результатов, сходных с результатами упражнений 38.12, 38.13, 38.14, но относящихся не к минимальному, а к интуиционистскому функциональному исчислению первого порядка, имеется у Клини в „*Introduction to Metamathematics*"*), 1952, стр. 495. ⟨К стр. 199.⟩

[358] Этот результат, относящийся к минимальному функциональному исчислению первого порядка, следует сравнить с относящимся к интуиционистской арифметике результатом Гёделя из его статьи в *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, № 4, 1933, стр. 34—38. ⟨К стр. 199.⟩

*) Русский перевод: *Введение в метаматематику*, 1957, стр. 437. — *Прим. перев.*

[359] По аналогии с D14 мы используем здесь „(∃a)" как сокращение для „∼ (∀a) ∼", „(∃)" как сокращение для „ ∼ (∀) ∼". Кроме того, говоря о вхождении (∀) или вхождении (∃), мы подразумеваем, что пустое место должно быть заполнено переменной, так что, например, вхождение (∀) состоит из вхождений каждого из трех символов (,∀,), взятых в этом порядке и следующих друг за другом, за исключением того, что между вхождением знака ∀ и вхождением знака) должен стоять некоторый единый символ — переменная.

Строго говоря, вхождением квантора общности является вхождение (∀), и (в F^1) вхождением квантора существования является вхождение ∼ (∀) ∼. Однако нам в некоторых случаях будет удобно выражаться несколько неточно, относя операторную переменную ко вхождению квантора общности или квантора существования. Так, мы говорим здесь о вхождениях (∀a) и (∃a) как о вхождениях кванторов общности и существования. И так же обстоит дело в первом абзаце § 32, в формулировке метатеоремы **391 ниже и в других местах. ⟨К стр. 199.⟩

[360] В случае, если $n = 1$, рассматриваемая пп-часть формулы **B** есть просто $(\forall x)\,\mathbf{D}_1$, т. е. либо $(\forall x)\mathfrak{f}_1(x)$, либо $(\forall x) \sim \mathfrak{f}_1(x)$. ⟨К стр. 204.⟩

[361] Но те же самые функциональные переменные или некоторые из этих функциональных переменных могут входить в две или несколько различных пп-частей формулы **B**. ⟨К стр. 204.⟩

[362] Результат этого упражнения получен Генрихом Бэманом в статье, опубликованной в *Mathematische Annalen*, том 86, 1922, стр. 163—229 (см. особенно стр. 190—191). ⟨К стр. 204.⟩

[363] Частный случай $n = 0$ не исключается, т. е. из $\rightarrow \mathbf{B}$ следует $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. ⟨К стр. 205.⟩

[364] И здесь n может, в частности, равняться нулю. ⟨К стр. 206.⟩

[365] Система этого упражнения является промежуточной между исчислениями *NK* и *LK* Генцена (см. его статью, упомянутую в примечаниях 294—295), с некоторыми изменениями, введенными Бернайсом (*Logical Calculus*, 1935—1936). ⟨К стр. 206.⟩

[366] Это — исчисление *LK* Генцена с незначительными и очевидными упрощениями (которые не были введены Генценом из-за того, что он хотел сохранить как можно более тесное сходство между исчислением *LK* и интуиционистским исчислением *LJ*). Сравните с рассмотрением методов Генцена в § 29. ⟨К стр. 206.⟩

[367] В частности, отдельно взятая стрелка является предложением. ⟨К стр. 206 и 207.⟩

[368] Здесь m, или n, или даже оба вместе могут быть равны нулю. ⟨К стр. 206 и 207.⟩

369) Здесь m может быть равно нулю. ⟨К стр. 206 и 207.⟩

370) Здесь n может быть равно нулю. ⟨К стр. 207.⟩

371) Здесь мы можем иметь в частном случае некоторые или все равенства $k = 0$, $l = 0$, $k = n$, $l = m$. ⟨К стр. 207.⟩

372) Это — генценовский „Hauptsatz" для исчисления LK, видоизмененный для согласования с изменениями, произведенными нами в этом исчислении. Метод Генцена состоит в том, чтобы вначале показать, как элиминировать в доказательстве применение правила VIII, если это применение встречается только один раз в качестве последнего шага доказательства и если $\mathbf{C}$ не совпадает ни с одним из термов $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_l, \mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{A}_{k+2}, \ldots, \mathbf{A}_n$. Это делается не в один шаг; применение правила VIII заменяется одним или двумя применениями правила VIII, которые либо расположены раньше в доказательстве, либо имеют терм $\mathbf{C}$, содержащий меньшее общее число вхождений символов $\supset$, $\sim$, $\forall$, $\exists$. Подробности, включающие математическую индукцию в довольно сложной форме, можно найти в самой статье Генцена. Однако читателю, который заинтересован в тщательном изучении материала, рекомендуется проделать все это самостоятельно и лишь затем просмотреть исследование Генцена. ⟨К стр. 207.⟩

Примечания к главе IV

[400] Эти аксиомы расширенного исчисления приведены в статье из примечания 243, где они приписываются Тарскому. ⟨К стр. 210.⟩

[401] Более подробно: это преобразование переводит всякую бескванторную формулу в нее самоё, и если $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ переводятся в $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{D}'$ соответственно, то $[\mathbf{C} \supset \mathbf{D}]$ переводится в $[\mathbf{C}' \supset \mathbf{D}']$, $\sim \mathbf{C}$ переводится в $\sim \mathbf{C}'$ и $(\forall \mathbf{a})\mathbf{C}$ переводится в $(\forall \mathbf{a}) \sim [\mathbf{C}' \supset \mathbf{C}']$. ⟨К стр. 212.⟩

[402] В §§ 42—47 выражение „пп-формула" будет обозначать „пп-формула чистого функционального исчисления в формулировке F^{1p} или F_2^{1p}", за исключением только тех случаев, когда противное будет явно указано словами „пп-формула такой-то системы". ⟨К стр. 214.⟩

[403] Когда мы говорим о кванторах общности в префиксе, мы имеем в виду только те из них, которые не окаймлены слева и справа знаками $\sim$, т. е. исключаем те кванторы общности, которые являются составными частями квантора существования в соответствии с D14. Это замечание относится к данному месту и к ряду мест в дальнейшем. ⟨К стр. 215.⟩

[404] Для того чтобы убедиться в этом, необходимо принять во внимание характер процесса сведéния к предваренной форме, который был описан в § 39. Так, если префиксом формулы $\mathbf{N}_1$ является $\mathbf{\Pi}_1\mathbf{\Pi}_2 \ldots \mathbf{\Pi}_e$, то в результате шагов сведения (iii) — (v) § 39 префиксом формулы $\mathbf{C}_2$ окажется

$$(\exists \mathbf{a}_1)(\exists \mathbf{a}_2) \ldots (\exists \mathbf{a}_k)(\exists \mathbf{a}_{k+1})\mathbf{\Pi}_1\mathbf{\Pi}_2 \ldots \mathbf{\Pi}_e(\mathbf{b}_{l+1}).$$

(Здесь $e = m + l - k - 1$, а $\mathbf{b}_{l+1}$ является первой в алфавитном порядке после $\mathbf{a}_{k+1}$ индивидной переменной, которая не входит в $\mathbf{C}_1$.) ⟨К стр. 216.⟩

[405] Аксиомные схемы исчисления F^{1p} являются также, с очевидными изменениями формулировок, теоремными схемами исчисления F_2^{1p}. И в дальнейшем, называя их номера, мы будем использовать их в этой двойной роли (так же, как мы используем нумерованные теоремные схемы исчисления F^{1p} одновременно и как теоремные схемы исчисления F_2^{1p}). ⟨К стр. 216.⟩

[406] Отметим, что эта ссылка на истинностные значения сама по себе еще не делает определения семантическими, поскольку при

желании здесь можно использовать любые две другие вещи вместо истинностных значений. Например, в синтаксическом определении „значения" мы можем использовать числа 0 и 1 вместо истинностных значений истина и ложь соответственно и затем определить, что пп-формула „общезначима" в данной области, если она принимает значение 0 для всех возможных значений своих свободных переменных. ⟨К стр. 218.⟩

407) В этом месте следует перечитать §§ 07—09 введения, в особенности данное Тарским синтаксическое определение истины, рассмотренное в § 09, и примечания 142, 143. Мы дали здесь синтаксическое определение общезначимости, а не истины только потому, что в чистом функциональном исчислении первого порядка нет пп-формул без свободных переменных.

Можно также считать, что понятия общезначимости и выполнимости являются в функциональном исчислении первого порядка аналогами таких понятий пропозиционального исчисления, как быть тавтологией и не быть противоречием. Действительно, в том частном случае, когда пп-формула чистого функционального исчисления первого порядка является вместе с тем и пп-формулой пропозиционального исчисления, первые понятия непосредственно сводятся к последним. Очевидно также, что рассуждения этого параграфа, относящиеся к различию между синтаксическим и семантическим понятиями значения, и соответствующие рассуждения в начале § 15 весьма близки друг к другу. Здесь имеется, однако, то существенное различие, что для пп-формул пропозиционального исчисления (скажем, системы P_1 или системы P_2) имеется эффективный метод, позволяющий определять, является ли данная пп-формула тавтологией или нет, и в то же время невозможен никакой эффективный прием, который позволял бы по отношению ко всякой пп-формуле чистого функционального исчисления первого порядка определять, является ли она общезначимой или нет. ⟨К стр. 219.⟩

408) Можно считать, что эта метатеорема является (в чистом функциональном исчислении первого порядка) аналогом метатеорем **150 или **235 (пропозиционального исчисления); метод доказательства у них, действительно, один и тот же. Заметьте что метатеорема **324, а следовательно, и **323, могли бы теперь быть выведены как следствия из **434. Однако в § 32 эти две метатеоремы были получены при значительно более слабых исходных допущениях, нежели те, которые нужны для доказательства метатеоремы **434. ⟨К стр. 220.⟩

409) Это — видоизмененные формы примеров, принадлежащих один — Курту Шютте, а второй — Паулю Бернайсу и Моисею Шёнфинкелю. ⟨К стр. 224.⟩

[410] Это значит, что m-ки $\langle i_1, i_2, \ldots, i_m\rangle$ упорядочены по возрастанию сумм $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, а m-ки, имеющие одну и ту же сумму, упорядочены между собой лексикографически. ⟨К стр. 224.⟩

[411] В данном примере мы взяли $m > 6$ и точками обозначали в каждом случае последовательность единиц. Продолжая пример, мы имеем: m-я m-ка есть $\langle 1, 2, 1, \ldots, 1, 1, 1\rangle$; $(m+1)$-я m-ка есть $\langle 2, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1\rangle$; $(m+2)$-я m-ка есть $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 3\rangle$; $(m+3)$-я m-ка есть $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1, 2, 2\rangle$; $(m+4)$-я m-ка есть $\langle 1, 1, 1, \ldots, 1, 3, 1\rangle$; $(m+5)$-я m-ка есть $\langle 1, 1, 1, \ldots, 2, 1, 2\rangle$. ⟨К стр. 225.⟩

[412] В этом месте доказательства мы пользуемся законом исключенного третьего (в языке синтаксиса). Но так как у нас нет никаких эффективных средств для определения того, какой из двух случаев имеет место по отношению к данной пп-формуле **A**, то наш метод доказательства не дает никакого решения проблемы разрешения чистого функционального исчисления первого порядка. ⟨К стр. 226.⟩

[413] Может случиться, что будет иметься более одного опровергающего распределения истинностных значений по элементарным частям формулы $\mathbf{C}_k$ (хотя для фиксированного $\mathbf{C}_k$ это число всегда конечно). Говоря об „опровергающих распределениях истинностных значений по элементарным частям формул $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, ...", мы для каждого $\mathbf{C}_k$ включаем сюда все различные распределения истинностных значений по элементарным частям формулы $\mathbf{C}_k$.

В частном случае $n = 0$ может также случиться, что опровергающие распределения истинностных значений по элементарным частям формулы $\mathbf{C}_k$ и формулы $\mathbf{C}_l$ совпадут в том смысле, что перечни их элементарных частей окажутся одними и теми же и приписываться в обоих случаях им будут одни и те же истинностные значения; несмотря на это, мы считаем эти распределения различными, если k не равно l. ⟨К стр. 227.⟩

[414] Таким образом, если пп-формула общезначима в области натуральных чисел, то она общезначима и в несчетно-бесконечной области, и если пп-формула выполнима в несчетно-бесконечной области, то она выполнима также и в области натуральных чисел. ⟨К стр. 229.⟩

[415] Ниже мы один раз используем также очевидное распространение определения совместной выполнимости на прикладное функциональное исчисление первого порядка. ⟨К стр. 230.⟩

[416] Мы можем, например, использовать следующую нумерацию пп-формул.

Вначале берем введенную в § 44 нумерацию упорядоченных m-ок положительных целых чисел. Будем говорить о k-й m-ке положительных целых чисел, имея в виду k-ю m-ку положительных чисел в этой их нумерации. (В частности, мы будем в этом смысле говорить о k-й упорядоченной паре положительных целых чисел.)

После этого следующим образом нумеруем введенные в § 30 исходные символы чистого функционального исчисления первого порядка. Вначале идут восемь несобственных символов в том порядке, как они перечислены в § 30. Если, далее, k-я упорядоченная пара положительных целых чисел есть $\langle 1, m\rangle$, то $(k+8)$-м исходным символом нашей нумерации является m-я в алфавитном порядке индивидная переменная; если k-я упорядоченная пара положительных целых чисел есть $\langle 2, m\rangle$, то $(k+8)$-м исходным символом нашей нумерации является m-я в алфавитном порядке пропозициональная переменная; и если k-я упорядоченная пара положительных чисел есть $\langle i+2, m\rangle$, то $(k+8)$-м исходным символом нашей нумерации является m-я в алфавитном порядке i-арная функциональная переменная.

Будем говорить о μ-м исходном символе, имея в виду μ-й исходный символ в указанной их нумерации.

Теперь нумеруем формулы чистого функционального исчисления первого порядка в соответствии со следующим правилом. Если k-й упорядоченной парой положительных целых чисел является $\langle \mu, m\rangle$ и μ-й m-кой положительных целых чисел является $\langle \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\rangle$, то k-й формулой нашей нумерации будет $\mu_1\mu_2\ldots\mu_m$, где μ_1 есть μ_1-й исходный символ, μ_2 есть μ_2-й исходный символ, ..., μ_m есть μ_m-й исходный символ.

Наконец, удаляя из этой нумерации формул те, которые не являются правильно построенными, мы получаем нумерацию пп-формул. ⟨К стр. 231.⟩

417) Это последнее условие является, по-видимому, следствием требования (I) из § 07. ⟨К стр. 232.⟩

418) Это допустимо, так как **x** не входит в качестве свободной переменной ни в один из тех элементов класса Γ_n^m, которые действительно использовались в качестве гипотез в доказательстве формулы $\mathrm{S}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}}\mathbf{A}\,|$. ⟨К стр. 233.⟩

419) Это очевидным образом соответствует следующей нумерации упорядоченных пар натуральных чисел:

$$\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 0, 3\rangle, \ldots;$$

она аналогична нумерации упорядоченных m-ок положительных чисел, введенной в § 44. ⟨К стр. 235.⟩

420) Алонзо Чёрч, *The Journal of Symbolic Logic*, том 1, 1936, стр. 40—41, 101—102. Гильберт и Бернайс, *Grundlagen der Mathematik*, том 2, добавление II. ⟨К стр. 238.⟩

[421] Под решением проблемы разрешения в некотором частном случае мы будем подразумевать задание частного класса пп-формул, задание эффективной процедуры, позволяющей для всякой пп-формулы определять, принадлежит ли она к этому классу или нет (в большинстве рассматриваемых ниже случаев это будет очевидно), и, наконец, задание эффективной процедуры, позволяющей для всякой пп-формулы из этого класса определять, является ли она теоремой или нет. К этому мы всегда стремимся добавить эффективную процедуру нахождения доказательства для тех пп-формул, относительно которых мы убедились в том, что они являются теоремами; однако к этому последнему требованию относятся оговорки, сделанные в примечании 183.

(*Добавлено в корректуре.*) Подробное исследование решений проблемы разрешения в различных частных случаях имеется в монографии Аккермана *Solvable Cases of the Decision Problem* (1954). ⟨К стр. 238.⟩

[422] Порядок, в котором эти m^n различных пп-формул соединяются в дизъюнкции, очевидно, безразличен, ввиду законов ассоциативности и коммутативности дизъюнкции. Для того чтобы сделать разрешающую процедуру однозначно определенной, этот порядок следует фиксировать каким-либо произвольным (и эффективным) образом. ⟨К стр. 240.⟩

[423] При этом, конечно, подразумевается, что в тех случаях, когда некоторая элементарная часть входит в $\mathbf{D}$ более чем один раз, вместо всех ее вхождений должно подставляться одно и то же истинностное значение.

[Как было определено в § 30, *элементарными частями* пп-формулы являются те ее пп-части, которые имеют либо вид отдельной пропозициональной переменной, либо вид $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$.] ⟨К стр. 241.⟩

[424] На практике удобно уже на этой стадии провести все возможные в силу пропозиционального исчисления предварительные упрощения как самой пп-формулы в целом (рассматривая ее Р-составляющие как единства), так и в основе каждой Р-составляющей в отдельности. В частности, если какие-либо из Р-составляющих могут быть сделаны тождественными с помощью таких упрощений в сочетании с алфавитной заменой связанных переменных, то это должно быть сделано; при этом желательно систематически проверять возможность таких отождествлений, применяя для этого метод истинностных таблиц (§ 15). ⟨К стр. 242.⟩

[425] В действительности каждый раз, когда такое сведе́ние к частному случаю I оказывается возможным, возможно также и более прямое сведение к этому частному случаю. А именно, среди различных предваренных нормальных форм, к которым может быть сведена пп-формула **A**, всегда будет одна такая, в префиксе

которой ни один квантор существования не предшествует ни одному квантору общности. Однако, используя *465 описанным образом, всегда легче контролировать вид получающегося префикса и нередко — в частности в случае II — также и иначе сокращать процесс.

Если описываемая в тексте процедура, использующая *465, дает в результате сведение к одному из частных случаев V—IX, перечисленных в конце настоящего параграфа, то из этого еще не следует с необходимостью, что одна из предваренных нормальных форм данной пп-формулы **A** также подпадет под один из этих частных случаев. Таким путем можно получить решения дополнительных частных случаев проблемы разрешения. ⟨К стр. 244.⟩

[426] Процесс сведéния можно сократить, если добавить соответствующие шаги сведения для связок, отличных от импликации и отрицания, и таким образом сделать его применимым непосредственно к пп-формулам, сокращенным средствами D3—11 (так же как и D14), вместо того, чтобы требовать предварительного преобразования формулы к несокращенному виду. Так же, как и в упражнении 39.8, могут оказаться полезными совершенная дизъюнктивная и совершенная нормальная конъюнктивная формы. Вместо совершенной дизъюнктивной нормальной формы может быть использована также импликативная нормальная форма (15.4), а совершенная конъюнктивная нормальная форма может быть использована в модифицированном виде, появляющемся в доказательстве метатеоремы *465. Детали наиболее эффективной организации процесса сведения предоставляются читателю. ⟨К стр. 245.⟩

[427] На практике разрешающая процедура из **466 обычно длиннее и поэтому менее удобна, чем предложенная Куайном. Однако именно процедура Куайна может оказаться устрашающе длинной в сравнительно простых случаях, как в этом можно убедиться, применяя ее, например, к упражнению 46.12(3). ⟨К стр. 245.⟩

[428] С другой стороны, наше доказательство куайновского решения частного случая III проблемы разрешения дает (неявно) такой эффективный метод для нахождения доказательства тех пп-формул, которые успешно проходят проверку. Для того чтобы осуществить это также в связи с принадлежащим Бернайсу и Шейнфинкелю решением случая III, нужно следовать методу, указанному в упражнении 46.1. ⟨К стр. 247.⟩

[429] Сравните с § 55, а также с обсуждением *аксиоматического метода* в конце § 07. ⟨К стр. 247.⟩

[430] См. Вильгельм Аккерман в *Mathematische Annalen*, том 100, 1928, стр. 638—649; Торальф Сколем в *Norsk Matematisk Tidsskrift*, том 10, 1928, стр. 125—142; Жак Эрбран в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 24,

1931, стр. 12—56; Курт Гёдель в *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* Менгера, № 2 (за 1929—1930 гг., опубликовано в 1932 г.), стр. 27—28; Ласло Кальмар в *Mathematische Annalen*, том 108, 1933, стр. 466—484; Гёдель в *Monatschefte für Mathematik und Physik*, том 40, 1933, стр. 433—443; Курт Шютте в *Mathematische Annalen*, том 109, 1934, стр. 572—603, и том 110, 1934, стр. 161—194; Аккерман в *Mathematische Annalen*, том 112, 1936, стр. 419—432.

Всякий раз, когда в указанных статьях результаты даны в форме решений частных случаев проблемы разрешения для выполнимости, они могут быть переформулированы в виде решений соответствующих частных случаев проблемы разрешения для общезначимости, и ради единообразия мы делали это систематически. Проблема разрешения в смысле примечания 421 рассматривалась в явном виде только Эрбраном. ⟨К стр. 247.⟩

431) Этот случай решен Эрбраном, *loc cit*. Эквивалентным является условие, чтобы основа либо имела вид $\mathbf{A}_1 \supset . \mathbf{A}_2 \supset . \ldots \ldots \mathbf{A}_{n-1} \supset \mathbf{A}_n$, где $n \geqslant 1$ и каждое $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть элементарная часть или отрицание элементарной части, либо была в соответствии с законами пропозиционального исчисления эквивалентна основе такого вида. Эквивалентным является также условие, чтобы основа принимала значение f для не более чем одного распределения истинностных значений по элементарным частям. ⟨К стр. 248.⟩

432) Аккерман, Сколем, Эрбран, *loc. cit.* Согласно Аккерману (1928), пп-формула класса VI, которая не содержит ни свободных индивидных переменных, ни более чем бинарных функциональных переменных, общезначима, если она общезначима в области из $m + ((ml + l)^{\nu} - 1)/(ml + l - 1)$ индивидов, где N есть число различных входящих в формулу функциональных переменных, а

$$\nu = 3 \times 2^{N(2m+1)(m+1)^2 l^2} + 1.$$

Или, в случае $m = 0$, $l = 1$, пп-формула общезначима, если она общезначима в области из 3×2^N индивидов. Методом Аккермана можно получить сходный результат для случая, когда в формуле встречаются тернарные или более высокие функциональные переменные.

Это дает чисто теоретическое решение проблемы разрешения для общезначимости и вряд ли пригодно для практического использования. Во всяком случае, в упражнениях в конце этого параграфа указана практически более пригодная разрешающая процедура, которая может быть получена из любой из трех упомянутых статей. ⟨К стр. 248.⟩

433) Гёдель, Кальмар и Шютте, *loc. cit.* Согласно Шютте, пп-формула класса VII, которая не содержит свободных индивидных

переменных, общезначима, если она общезначима в области из $m + 2^{20\nu}$ индивидов, где N есть число различных входящих в пп-формулу функциональных переменных, ни одна из функциональных переменных не более чем h-арна и

$$\nu = Nl^2 2^h (m+1)^{h+4}.$$

И здесь также существует практически более пригодная разрешающая процедура, которая может быть получена из статьи Гёделя или Кальмара. ⟨К стр. 248.⟩

[434] Сколем, *loc. cit.* ⟨К стр. 248.⟩

[435] Решение этого случая имеется в статье Аккермана 1936 г., цитированной в примечании 430. И. М. Жегалкин в *Математическом сборнике*, н. с., том 6, 1939, стр. 185—198, предложил модификацию одной части разрешающей процедуры Аккермана, позволяющую сократить эту процедуру при практическом использовании.

Решение проблемы разрешения в случае X следует сравнить со сведением проблемы разрешения, которое дано в примечании 447.

(*Поправка, присланная автором.*) В связи со случаем X проблемы разрешения следовало бы отметить, что этот случай охватывает лишь конечное число пп-формул, отличающихся друг от друга иначе, нежели алфавитной заменой связанных переменных или же преобразованием основы по правилам пропозиционального исчисления, или же и тем и другим одновременно. Это несколько уменьшает интерес, представляемый данным случаем, так как проблема разрешения для конечного класса пп-формул, разумеется, всегда разрешима. Но в случае X это конечное число велико и нахождение практически применимой разрешающей процедуры все же представляет интерес. ⟨К стр. 248.⟩

[436] Это видоизменение примера, использованного Куайном. ⟨К стр. 249.⟩

[437] Это по существу совпадает с одним из примеров Сколема. ⟨К стр. 252.⟩

[438] Следует отметить тесную связь, существующую между этим методом и методом, который впоследствии был использован Гёделем в его доказательстве полноты функционального исчисления первого порядка. Действительно, дизъюнкции, использованные в упражнениях 46.6—46.8 и 46.11 (1), совпадают с дизъюнкциями $\mathbf{C}_k$ из § 44, каждая для некоторого частного значения k.

При работе над пунктом (1) упражнения 46.11 читателю рекомендуется заменить обозначения

$$\mathbf{S}^{\mathrm{b}\ \mathrm{c}_1\mathrm{c}_2}_{x_1x_2x_3}\mathbf{M}\,\Big|, \quad \mathbf{S}^{\mathrm{b}\ \mathrm{c}_1\mathrm{c}_2}_{x_2x_4x_5}\mathbf{M}\,\Big| \quad \text{и т. д.}$$

на более простые обозначения $\mathbf{M}\, x_1x_2x_3$, $\mathbf{M}\, x_2x_4x_5$ и т. д. Аналогично, в пункте (2) обозначения

$$\mathbf{S}^{\mathrm{abc}}_{xxx_1}\mathbf{M}\,\Big|, \quad \mathbf{S}^{\mathrm{ab}\ \mathrm{c}}_{xx_1x_2}\mathbf{M}\,\Big| \quad \text{и т. д.}$$

следует заменить на $\mathbf{M}xxx_1$, $\mathbf{M}xx_1x_2$ и т. д. соответственно. Это упрощенное обозначение для подстановки, принадлежащее по существу школе Гильберта, с успехом можно использовать в тех контекстах, где подстановки совершаются вместо переменных из некоторого фиксированного перечня, и особенно в тех случаях, когда вместо каждой переменной подставляется переменная (или иной единый символ). Это обозначение будет также полезным в непосредственно следующих упражнениях и во многих других местах. Тем не менее мы сохраним в тексте более подробное обозначение для подстановки. ⟨К стр. 252.⟩

[439] В помощь читателю мы даем на стр. 430—431 таблицу, значение которой будет ясно (по аналогии) из сделанных в 46.6 разъяснений.

Эта таблица составлена для случая, когда встречается только одна функциональная переменная $\mathfrak{f}$ (и Φ является пропозициональной функцией, которая должна быть значением переменной $\mathfrak{f}$). Читатель, может быть, сочтет полезным составить аналогичные таблицы для одного или двух других случаев, скажем для случая двух бинарных функциональных переменных и для случая одной тернарной функциональной переменной.

Для пункта (3) настоящего упражнения от таблицы должны быть отброшены два первых столбца, озаглавленных $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1)$ и $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2)$. Для пункта (2) должны быть отброшены первые четыре столбца. Для пункта (4) читателю следует построить новую таблицу, сходную с таблицей для пункта (3), но включающую большее число индивидных переменных (в качестве примера можно взять случай $n = 3$, $l = 2$).

Во всякой такой таблице будем называть две строки связанными, если хотя бы один их элемент, состоящий из Φ (или Ψ и т. д.) с конкретными числами в качестве аргументов, входит как в одну строку, так и в другую. Например, в таблице, используемой для пункта (1), связанными являются строки первая и пятая, так же как пятая и девятая, но первая и девятая строки не связаны. В таблице, используемой для пункта (3), строки первая, вторая и третья взаимно связаны, также связаны первая и четвертая строки, но вторая и четвертая или первая и пятая строки не связаны.

В таблицах для пунктов (3) и (4) можно заметить, что каждая строка связана с теми строками, которые получаются перестановкой значений, приписанных переменным $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$, и что, *помимо этого, каждая строка связана с не более чем одной предшествующей ей строкой таблицы*. Это может быть использовано при доказательстве существования числа K или при нахождении верхней грани для K. ⟨К стр. 254.⟩

440) К решению случая $\mathrm{VIII}_0^{2,1}$ можно подойти следующим образом. (Мы ведем изложение для данного частного подслучая, но, как это будет видно, та же самая идея применима и к случаю VIII_0, и даже к случаю VIII вообще.)

В таблице, построенной так, как это описано в предыдущем примечании, назовем строку *одиночной*, если переменным $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ приписано одно и то же значение (например, первая, четвертая и девятая строки таблицы являются одиночными). Сопоставим, далее, каждую строку, не являющуюся одиночной, с такой строкой, которая получается из нее взаимной заменой значений, приписанных переменным $\mathfrak{b}_1$, и $\mathfrak{b}_2$, и будем такую пару сопоставленных строк называть *строчной парой* (например, вторая и третья строки таблицы образуют строчную пару, так же как пятая и шестая строки, и т. д.). Для всякой отдельно взятой одиночной строки существует конечный класс C_1 возможных распределений истинностных значений, которые, во-первых, обращают основу **M** в ложь (т. е. при которых основа **M** принимает значение f) и которые, во-вторых, приписывают одно и тоже истинностное значение двум элементарным частям, становящимся тождественными при замене переменных $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{b}_2$ на одну и ту же переменную $\mathfrak{b}$. Аналогично, для всякой строчной пары существует конечный класс C_2 пар возможных распределений истинностных значений (по одному распределению для каждой строки), которые, во-первых, обращают **M** в ложь и, во-вторых, приписывают одно и то же истинностное значение всяким двум элементарным частям, по одной в каждой строке, которые могут быть получены друг из друга взаимной заменой переменных $\mathfrak{b}_1$, и $\mathfrak{b}_2$. Пусть S_1 — непустой подкласс класса C_1, а S_2 — непустой подкласс класса C_2.

Необходимо рассмотреть пять различных типов отношений, которые встречаются между одиночной строкой или строчной парой таблицы и предшествующей (связанной) одиночной строкой или строчной парой. Этими типами отношений являются те, которые проявляются: (i) в отношении между четвертой и первой строками таблицы (или между двадцать пятой и четвертой строками, или между сотой и девятой строками и т. д.); (ii) в отношении между строчной парой, состоящей из второй и третьей строк, с одной стороны, и первой строкой, с другой стороны; (iii) между строчной парой, состоящей из пятой и шестой строк, с одной стороны, и парой, состоящей из второй и третьей, с другой; (iv) между строчной парой, состоящей из седьмой и восьмой строк, с одной стороны, и строчной парой, состоящей из второй и третьей, с другой; (v) между девятой строкой и строчной парой, состоящей из второй и третьей строк.

В случае (i) мы должны удостовериться в том, что для произвольного элемента из S_1, использованного в качестве распределения истинностных значений в предыдущей одиночной строке,

b_1 b_2 c	$f(b_1, b_1)$	$f(b_2, b_2)$	$f(b_1, b_2)$	$f(b_2, b_1)$	$f(b_1, c)$	$f(c, b_1)$	$f(b_2, c)$	$f(c, b_2)$	$f(c, c)$
1 1 2	$\Phi(1,1)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(1,2)$	$\Phi(2,1)$	$\Phi(1,2)$	$\Phi(2,1)$	$\Phi(2,2)$
1 2 3	$\Phi(1,1)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(1,2)$	$\Phi(2,1)$	$\Phi(1,3)$	$\Phi(3,1)$	$\Phi(2,3)$	$\Phi(3,2)$	$\Phi(3,3)$
2 1 4	$\Phi(2,2)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(2,1)$	$\Phi(1,2)$	$\Phi(2,4)$	$\Phi(4,2)$	$\Phi(1,4)$	$\Phi(4,1)$	$\Phi(4,4)$
2 2 5	$\Phi(2,2)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(2,5)$	$\Phi(5,2)$	$\Phi(2,5)$	$\Phi(5,2)$	$\Phi(5,5)$
1 3 6	$\Phi(1,1)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(1,3)$	$\Phi(3,1)$	$\Phi(1,6)$	$\Phi(6,1)$	$\Phi(3,6)$	$\Phi(6,3)$	$\Phi(6,6)$
3 1 7	$\Phi(3,3)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(3,1)$	$\Phi(1,3)$	$\Phi(3,7)$	$\Phi(7,3)$	$\Phi(1,7)$	$\Phi(7,1)$	$\Phi(7,7)$
2 3 8	$\Phi(2,2)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(2,3)$	$\Phi(3,2)$	$\Phi(2,8)$	$\Phi(8,2)$	$\Phi(3,8)$	$\Phi(8,3)$	$\Phi(8,8)$
3 2 9	$\Phi(3,3)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(3,2)$	$\Phi(2,3)$	$\Phi(3,9)$	$\Phi(9,3)$	$\Phi(2,9)$	$\Phi(9,2)$	$\Phi(9,9)$
3 3 10	$\Phi(3,3)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(3,10)$	$\Phi(10,3)$	$\Phi(3,10)$	$\Phi(10,3)$	$\Phi(10,10)$
1 4 11	$\Phi(1,1)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(1,4)$	$\Phi(4,1)$	$\Phi(1,11)$	$\Phi(11,1)$	$\Phi(4,11)$	$\Phi(11,4)$	$\Phi(11,11)$
4 1 12	$\Phi(4,4)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(4,1)$	$\Phi(1,4)$	$\Phi(4,12)$	$\Phi(12,4)$	$\Phi(1,12)$	$\Phi(12,1)$	$\Phi(12,12)$
2 4 13	$\Phi(2,2)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(2,4)$	$\Phi(4,2)$	$\Phi(2,13)$	$\Phi(13,2)$	$\Phi(4,13)$	$\Phi(13,4)$	$\Phi(13,13)$
4 2 14	$\Phi(4,4)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(4,2)$	$\Phi(2,4)$	$\Phi(4,14)$	$\Phi(14,4)$	$\Phi(2,14)$	$\Phi(14,2)$	$\Phi(14,14)$
3 4 15	$\Phi(3,3)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(3,4)$	$\Phi(4,3)$	$\Phi(3,15)$	$\Phi(15,3)$	$\Phi(4,15)$	$\Phi(15,4)$	$\Phi(15,15)$

4 3 16	$\Phi(4,4)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(4,3)$	$\Phi(3,4)$	$\Phi(4,16)$	$\Phi(16,4)$	$\Phi(3,16)$	$\Phi(16,3)$	$\Phi(16,16)$
4 4 17	$\Phi(4,4)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(4,17)$	$\Phi(17,4)$	$\Phi(4,17)$	$\Phi(17,4)$	$(\Phi17,17)$
1 5 18	$\Phi(1,1)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(1,5)$	$\Phi(5,1)$	$\Phi(1,18)$	$\Phi(18,1)$	$\Phi(5,18)$	$\Phi(18,5)$	$\Phi(18,18)$
5 1 19	$\Phi(5,5)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(5,1)$	$\Phi(1,5)$	$\Phi(5,19)$	$\Phi(19,5)$	$\Phi(1,19)$	$\Phi(19,1)$	$\Phi(19,19)$
2 5 20	$\Phi(2,2)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(2,5)$	$\Phi(5,2)$	$\Phi(2,20)$	$\Phi(20,2)$	$\Phi(5,20)$	$\Phi(20,5)$	$\Phi(20,20)$
5 2 21	$\Phi(5,5)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(5,2)$	$\Phi(2,5)$	$\Phi(5,21)$	$\Phi(21,5)$	$\Phi(2,21)$	$\Phi(21,2)$	$\Phi(21,21)$
3 5 22	$\Phi(3,3)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(3,5)$	$\Phi(5,3)$	$\Phi(3,22)$	$\Phi(22,3)$	$\Phi(5,22)$	$\Phi(22,5)$	$\Phi(22,22)$
5 3 23	$\Phi(5,5)$	$\Phi(3,3)$	$\Phi(5,3)$	$\Phi(3,5)$	$\Phi(5,23)$	$\Phi(23,5)$	$\Phi(3,23)$	$\Phi(23,3)$	$\Phi(23,23)$
4 5 24	$\Phi(4,4)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(4,5)$	$\Phi(5,4)$	$\Phi(4,24)$	$\Phi(24,4)$	$\Phi(5,24)$	$\Phi(24,5)$	$\Phi(24,24)$
5 4 25	$\Phi(5,5)$	$\Phi(4,4)$	$\Phi(5,4)$	$\Phi(4,5)$	$\Phi(5,25)$	$\Phi(25,5)$	$\Phi(4,25)$	$\Phi(25,4)$	$\Phi(25,25)$
5 5 26	$\Phi(5,5)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(5,5)$	$\Phi(5,26)$	$\Phi(26,5)$	$\Phi(5,26)$	$\Phi(26,5)$	$\Phi(26,26)$
1 6 27	$\Phi(1,1)$	$\Phi(6,6)$	$\Phi(1,6)$	$\Phi(6,1)$	$\Phi(1,27)$	$\Phi(27,1)$	$\Phi(6,27)$	$\Phi(27,6)$	$\Phi(27,27)$
6 1 28	$\Phi(6,6)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(6,1)$	$\Phi(1,6)$	$\Phi(6,28)$	$\Phi(28,6)$	$\Phi(1,28)$	$\Phi(28,1)$	$\Phi(28,28)$
2 6 29	$\Phi(2,2)$	$\Phi(6,6)$	$\Phi(2,6)$	$\Phi(6,2)$	$\Phi(2,29)$	$\Phi(29,2)$	$\Phi(6,29)$	$\Phi(29,6)$	$\Phi(29,29)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

существует такой соответствующий элемент из S_1, который может одновременно быть использован в качестве распределения истинностных значений в последующей одиночной строке. В случае (ii) мы должны удостовериться в том, что для произвольного элемента из S_1, использованного в качестве распределения истинностных значений в одиночной строке, существует такой соответствующий элемент из S_2, который может одновременно быть использован в качестве распределения истинностных значений в строчной паре. В каждом из случаев (iii) и (iv) мы должны удостовериться в том, что для произвольного элемента из S_2, использованного для распределения истинностных значений в предыдущей строчной паре, существует такой соответствующий элемент из S_2, который может одновременно быть использован в качестве распределения истинностных значений во второй строчной паре. В случае (v) мы должны удостовериться в том, что для произвольного элемента из S_2, использованного в качестве распределения истинностных значений в строчной паре, существует такой соответствующий элемент из S_1, который может быть одновременно использован в качестве распределения истинностных значений в одиночной строке.

Так как классы C_1 и C_2 конечны, то конечно и число различных пар S_1, S_2 непустых подклассов из C_1 и C_2. Для всякой конкретной пп-формулы **A** можно выписать полный перечень пар S_1, S_2, и для каждой такой пары можно определить, выполнены ли только что сформулированные условия. Если найдется одна такая пара, для которой эти условия выполнены, то данная пп-формула **A** не общезначима; в противном случае **A** общезначима. ⟨К стр. 255 и 257.⟩

441) Традиционными названиями этих четырех форм являются A, E, I, O соответственно, а их формулировками — следующие: все F суть G, ни одно F не есть G, некоторые F суть G, некоторые F не суть G. Заметим, однако, что указанная здесь версия традиционного учения о категорических суждениях и категорическом силлогизме не выдается за *единственно верную* ⟨*the correct*⟩ интерпретацию, а лишь за некотороую возможную или правдоподобную интерпретацию.

В действительности традиционное учение недостаточно определенно и ясно, а различные авторы недостаточно согласны между собой, чтобы можно было выяснить, что является лучшим или наиболее точным воспроизведением его в логистической системе. Это объясняется, с одной стороны, трудностями, связанными с так называемым „предположением существования” ⟨„existential import”⟩ (некоторые аспекты традиционного учения как будто бы передаются лучше, если за A и E взять

$$(\exists x)\,\mathbf{f}(x)\,.\,\mathbf{f}(x) \supset_x \mathbf{g}(x) \quad \text{и} \quad (\exists x)\,\mathbf{f}(x)\,.\,\mathbf{f}(x) \supset_x \sim \mathbf{g}(x)$$

соответственно вместо того, что указано в упражнении). С другой стороны, встает вопрос, не следует ли традиционные „термины" ⟨terms⟩ истолковывать скорее как общие имена ⟨common names⟩ (см. примечания 4, 6) или как переменные, а не как имена классов ⟨class names⟩ или функциональные константы. ⟨К стр. 259.⟩

442) *Recherches sur la Théorie de la Démonstration*, Варшава, 1930. Это представленная Парижскому университету диссертация Эрбрана. (*Добавлено в корректуре*. См. в этой связи также статью Дребена в *Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA*, том, 38, 1952, стр. 1047—1052.) ⟨К стр. 260.⟩

443) В статье, упомянутой в примечании 430. ⟨К стр. 262.⟩

444) Для того чтобы сделать процесс сведения эффективным, этот выбор должен быть каким-либо образом определен, например тем, что в каждом случае берутся первые в алфавитном порядке переменных подходящие переменные. ⟨К стр. 262 и 263.⟩

445) Впервые это доказано Кальмаром в *Compositio Mathematica*, том 4, 1936, стр. 137—144. ⟨К стр. 263.⟩

446) Сведение к пп-формулам, имеющим такой префикс и содержащим только бинарные функциональные переменные, дано Гёделем в *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 40, 1933, стр. 433—443 (другое доказательство дано Сколемом в *Acta Scientiarum Mathematicarum*, том 7, 1935, стр. 193—199). Дальнейшее сведение к единственной бинарной функциональной переменной дано Ласло Кальмаром и Яношем Шураньи в *The Journal of Symbolic Logic*, том 12, 1947, стр. 65—73. Доказательство метатеоремы **472, описанное выше в общих чертах, следует методу Гёделя. ⟨К стр. 269.⟩

447) Сведение к пп-формулам с таким префиксом дано Аккерманом в статье, цитированной в примечаниях 430, 435, а дальнейшее сведение к единственной бинарной функциональной переменной дано Кальмаром в *The Journal of Symbolic Logic*, том 4, 1939, стр. 1—9. Результат, доказанный Аккерманом, может быть высказан в несколько более сильной форме, а именно, что классом сведения является класс пп-формул вида

$$(\exists \mathbf{a})(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_n)\mathbf{M} \supset (\exists \mathbf{b})(\mathbf{c})\mathbf{f}(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

где $\mathbf{M}$ не содержит ни кванторов, ни отличных от $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ индивидных переменных, а $\mathbf{f}$ есть входящая в $\mathbf{M}$ функциональная переменная. ⟨К стр. 269.⟩

448) Сведение к пп-формулам с таким префиксом дано Джозефом Пеписом в *Fundamenta Mathematicae*, том 30, 1938, стр. 257—348. Более подробно, в этой статье доказано, что класс пп-формул вида

$$(\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_2)\ldots(\mathbf{a}_n)\mathbf{M} \supset (\exists \mathbf{b}_1)(\exists \mathbf{b}_2)(\mathbf{c})\mathbf{f}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}),$$

где $\mathfrak{M}$ не содержит ни кванторов, ни отличных от $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ индивидных переменных и содержит наряду с тернарной функциональной переменной $\mathfrak{f}$ только одну сингулярную функциональную переменную, является классом сведения. Выражение $\mathfrak{f}(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c})$ можно также заменить на дизъюнкцию $\mathfrak{f}_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}) \vee \mathfrak{f}_2(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{c})$, и в этом случае $\mathfrak{M}$ содержит две бинарные функциональные переменные $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ и одну сингулярную функциональную переменную. Сведение к префиксу $(\exists\mathfrak{b}_1)(\exists\mathfrak{b}_2)(\mathfrak{c})(\exists\mathfrak{d}_1)(\exists\mathfrak{d}_2)\ldots(\exists\mathfrak{d}_n)$ и одной-единственной бинарной функциональной переменной дано Кальмаром и Шураньи в *The Journal of Symbolic Logic*, том 15, 1950, стр. 161—173. ⟨К стр. 269.⟩

[449] Сведение к пп-формулам с этим префиксом также принадлежит Пепису, являясь следствием из более полного результата, указанного в предыдущем примечании. Дальнейшее сведение к одной-единственной бинарной функциональной переменной дано Шураньи в *Matematikai és Fizikai Lapok*, том 50, 1943, стр. 51—74 (см. также цитированную в предыдущем примечании статью Кальмара и Шураньи).

Та же самая статья Пеписа содержит еще целый ряд других результатов относительно уменьшения числа функциональных переменных, необходимых в связи с различными префиксами. Некоторые из этих результатов оказались с тех пор перекрытыми более сильными результатами, но следующий как будто достоин упоминания. В нормальной форме Аккермана, указанной в примечании 447, можно ограничиться такими $\mathfrak{M}$, которые содержат, помимо бинарной функциональной переменной $\mathfrak{f}$, либо только одну сингулярную и одну тернарную функциональные переменные, либо же одну сингулярную и две бинарные функциональные переменные (по желанию). ⟨К стр. 269.⟩

[450] Эти сведения даны Шураньи в статье, цитированной в предыдущем примечании.

(*Добавлено в корректуре.*) Эти же сведения получены Шураньи также в статье, опубликованной в *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, том 1, 1950, стр. 261—271. Другая статья Шураньи, опубликованная там же, том 2, 1951, стр. 325—335, добавляет к перечню классов сведения два следующих: пп-формулы с префиксом $(\mathfrak{a})(\exists\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\exists\mathfrak{d})(\exists\mathfrak{e})$, которые содержат только сингулярные и бинарные функциональные переменные, в том числе не более семи бинарных функциональных переменных, и пп-формулы с префиксом $(\exists\mathfrak{a})(\mathfrak{b})(\mathfrak{c})(\exists\mathfrak{d})(\exists\mathfrak{e})$, которые содержат только сингулярные и бинарные функциональные переменные, в том числе не более семи бинарных функциональных переменных. Две статьи Кальмара, там же, том 1, 1950, стр. 64—73, и том 2, 1951, стр. 19—38, добавляют три следующих класса сведения: пп-формулы с префиксом $(\exists\mathfrak{a}_1)(\exists\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n)(\exists\mathfrak{c})$, которые содержат одну-единственную бинарную функциональную переменную; пп-формулы с префиксом $(\exists \mathfrak{a})(\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{b}_2)\ldots(\mathfrak{b}_n)(\exists \mathfrak{c}_1)(\exists \mathfrak{c}_2)$, которые содержат одну-единственную бинарную функциональную переменную; пп-формулы с префиксом $(\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_2)\ldots(\mathfrak{a}_n)(\exists \mathfrak{b})(\mathfrak{c}_1)(\mathfrak{c}_2)\ldots$ $\ldots(\mathfrak{c}_{48})(\exists \mathfrak{d}_1)(\exists \mathfrak{d}_2)$, которые содержат одну-единственную бинарную функциональную переменную. Сведение проблемы разрешения для выполнимости к проблеме разрешения для общезначимости в каждой конечной области и, следовательно, сведение проблемы разрешения для общезначимости к проблеме разрешения для выполнимости в некоторой конечной области содержится в другой статье Кальмара, там же, том 2, 1951, стр. 125—141 (неразрешимость проблемы разрешения для общезначимости в каждой области была уже доказана Трахтенбротом в статье, цитированной в примечании 567). ⟨К стр. 269.⟩

[451] Ссылка на частные области положительных целых чисел и целых чисел, конечно, несущественна, так как суть этой метатеоремы состоит в том, что счетно-бесконечная *модель* класса Γ (т. е. счетно-бесконечная область вместе с такой системой значений свободных переменных, при которой класс Γ совместно выполним в этой области) всегда может быть расширена счетно-бесконечным образом. Этот результат получен по существу А. И. Мальцевым в статье, опубликованной в *Математическом сборнике*, том 43 (новая серия, том 1), 1936, стр. 323—336, и указанное выше доказательство использует некоторые из идей Мальцева. Хотя данное Мальцевым доказательство и не безупречно в отношении того, как там используется сколемовская нормальная форма для выполнимости, этот дефект можно, как будто, легко устранить, добавив соответствующее рассуждение о связи между моделью класса Γ и моделью класса Γ_{S}, который получается из Γ, если сперва произвести подходящим образом подобранную алфавитную замену функциональных переменных, а затем таким образом свести каждую пп-формулу к сколемовской нормальной форме для выполнимости, чтобы вновь вводимые функциональные переменные были бы все отличны как друг от друга, так и от ранее имевшихся функциональных переменных. Однако кажется более предпочтительным отказаться от использования сколемовской нормальной формы для выполнимости за счет обращения к доказательству, аналогичному указанному выше.

Следует добавить, что Мальцев доказывает лишь, что всякая бесконечная модель класса Γ имеет расширение (которое может оказаться и бесконечным расширением). Однако метод его может быть использован для получения более сильного результата о существовании счетно-бесконечного расширения.

С другой стороны, Мальцев рассматривает наряду со счетно-бесконечными моделями также и несчетно-бесконечные модели, чем мы здесь не занимаемся. ⟨К стр. 277.⟩

452) Из этого тотчас получается результат Сколема, в соответствии с которым в терминах какого-либо простого прикладного функционального исчисления первого порядка с равенством невозможно выразить никакую категорическую систему постулатов для положительных целых чисел (независимо от того, конечно ли число постулатов или бесконечно). См. упражнение 55.18 и примечание 547.

453) См. *American Journal of Mathematics*, том 7, 1885, стр. 194. Пирс, возможно, имеет в виду статью Митчелла в *Studies in Logic* (1883); однако весьма существенный элемент — использование в связи с кванторами операторных переменных — был введен самим Пирсом в качестве модификации обозначений Митчелла. ⟨К стр. 278.⟩

454) Бертран Рассел, „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", опубликовано в *American Journal of Mathematics*, том 30, 1908, стр. 222—262. ⟨К стр. 279.⟩

455) В *Mathematische Annalen*, том 76, 1915, стр. 447—470. ⟨К стр. 279.⟩

456) В статьях, опубликованных в *Skrifter Utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse, 1919 и 1920 гг. ⟨К стр. 279.⟩

457) В *Mathematische Annalen*, том 86, 1922, стр. 163—229. ⟨К стр. 279.⟩

458) У Гильберта и Аккермана и у Гильберта и Бернайса имя „Prädikat" применяется по отношению к тем же самым вещам, которые мы здесь называем „пропозициональными функциями" и которые Гильберт и Бернайс называют также „logische Funktionen" (см. их *Grundlagen der Mathematik*, том 1, 1934, стр. 7, 126, 190). Мы предпочитаем здесь следовать Карнапу (*Logische Syntax der Sprache*, 1934), который называет именем „Prädikat" то, что у Гильберта и Бернайса носит название „Prädikatensymbol". Терминология Карнапа действительно ближе к обычному использованию термина „predicate" ⟨предикат⟩ в качестве грамматического термина в связи с обычными языками, и поэтому с ней связан, как будто, меньший риск смешать на практике понятия „употребление" и „упоминание" (см. § 08). ⟨К стр. 279.⟩

459) Измененная формулировка этого правила дана также во втором издании книги Гильберта и Аккермана (1938, см. стр. 56—57), однако и она может вызвать некоторые возражения. В третьем издании правило сформулировано корректно (1949, см. стр. 60—61). ⟨К стр. 279.⟩

460) Это противоречит идее, подразумеваемой в изложении § 02 и кажущейся автору естественной, — идее о том, что константа, бу-

дучи отлична от формы, может быть использована с одним и тем же содержанием в любом контексте (независимо от встречающихся переменных). Кроме того, что еще важнее, это повлекло бы за собой практически неприемлемое требование упоминать в связи с каждым определением сокращения в определяемом все частные связанные переменные, входящие в определяющее. Это последнее затруднение, однако, не встает перед Гильбертом и Бернайсом, так как они, как уже говорилось, не используют определений сокращений. ⟨К стр. 280.⟩

461) В таких логистических системах, которые содержат отличные от кванторов операторы, например оператор абстракции λ или оператор дескрипции ι (см. § 06), корректная формулировка правила подстановки вместо функциональных переменных становится еще более тягостной и громоздкой. В качестве примера формулировки правила для одного из таких случаев мы можем сослаться на *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems* Гёделя (мимеографированные записи лекций 1934 г.), куда полная формулировка была включена по предложению С. К. Клини, а также на воспроизведение этой формулировки с некоторыми изменениями, имеющими целью включить ее в другую систему, в рецензии автора настоящей книги на вышеупомянутую книгу Куайна, см. *Bulletin of the American Mathematical Society*, том 41, 1935, стр. 598—603. (Формулировка, приведенная в записях Гёделя, не вполне корректна и должна быть исправлена путем добавления к 4b на странице 10 дополнительного требования, чтобы никакая связанная переменная из $\mathfrak{G}(x)$ не была свободной в A.)

Однако в том случае, когда система содержит оператор абстракции λ, имеется возможность заменить правило подстановки вместо функциональных переменных целым рядом более простых исходных правил, которые, как мы увидим в главе X, можно считать образующими анализ этого правила. Ввиду сложностей, связанных с правилом подстановки вместо функциональных переменных даже в сравнительно простом случае функционального исчисления первого порядка, имеются, как будто, некоторые основания для того, чтобы отдать предпочтение системам (аналогичным системе из главы X), которые содержат оператор λ. Тем не менее функциональные исчисления, не содержащие этого оператора, изучались более широко, и к их достоинствам относится, по-видимому, экономичность, связанная с обнаруженной Расселом возможностью во многих случаях обойтись без операторов дескрипции и абстракции. ⟨К стр. 279.⟩

462) В его диссертации, цитированной в примечании 442, — Варшава, 1930, см. стр. 51 и стр. 57—60. Независимо от Эрбрана и друг от друга это доказательство непротиворечивости позднее

нашли Тарский и затем Генцен, а также Бет. Бет добавил замечание (в *Nieuw Archief voor Wiskunde*, ser. 2, том 19, № 1—2, 1936, стр. 59—62) о том, что тем же методом может быть доказана непротиворечивость предикативного и разветвленного функционального исчислений с добавлением при желании аксиом сводимости, так же как и аксиом выбора и объемности, но, конечно, не какой-либо аксиомы бесконечности. ⟨К стр. 280.⟩

[463] Терминология будет разъяснена в главах V и VI. ⟨К стр. 280.⟩

[464] *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 37, 1930, стр. 349—360. Существенные моменты доказательства полноты, проводимого методом, сходным с методом Гёделя, имеются также в диссертации Эрбрана от 1930 г. — ср. с упражнениями 46.23, 46.24. Зачатки использованного Эрбраном и Гёделем метода можно найти уже в статье Сколема от 1928 г. (упомянутой в примечании 430). ⟨К стр. 280.⟩

[465] В его диссертации (Princeton University, 1947) и в статье, опубликованной в *The Journal of Symbolic Logic*, том 14, 1949, стр. 159—166. ⟨К стр. 280.⟩

[466] В статье, упомянутой в примечании 464. Ср. упражнение 41.1. ⟨К стр. 280.⟩

[467] *American Journal of Mathematics*, том 58, 1936, стр. 336—344. ⟨К стр. 281.⟩

[468] Как указано в § 41 при обсуждении правил $*404_n$ $(n > 1)$, более слабое понятие независимости также не лишено интереса. Однако представляется желательным доказывать по возможности независимость в более сильном смысле. (Вопрос о раздельной независимости различных правил $*404_n$ не возникает у Мак-Кинси или у Гильберта и Аккермана, так как они рассматривают как одно правило все эти правила совместно или, в случае Гильберта и Аккермана, все эти правила, кроме $*404_0$.) ⟨К стр. 281.⟩

[469] См. статью в *The Monist*, том 7, 1897, стр. 161—217; см. также уже упоминавшуюся его статью в *American Journal of Mathematics*, том 7, 1885, стр. 180—202, а также добавление к последней работе, впервые опубликованное в его *Collected Papers*, том 3, 1933, стр. 239—249. ⟨К стр. 281.⟩

[470] В данном отношении, разумеется, несущественно, что в *Principia* за исходные связки берутся дизъюнкция и отрицание, а не импликация и отрицание, как у нас, ибо процесс сведе́ния к предваренной нормальной форме, приспособленный к одной системе исходных сентенциональных связок, очень легко может быть изменен таким образом, чтобы годиться и для другой. И действительно, во введении ко второму изданию *Principia* указаны

изменения, которые должны быть сделаны в случае штриха Шеффера, взятого за единственную исходную сентенциональную связку. ⟨К стр. 281.⟩

[471] В *Bulletin of the American Mathematical Society*, том 32, 1926, см. стр. 701. ⟨К стр. 281.⟩

[472] *Acta Scientarum Mathematicarum*, том 4, № 4, 1929, стр. 248—252. ⟨К стр. 281.⟩

[473] В статье, цитированной в примечании 464. ⟨К стр. 281.⟩

[474] В его *Metaphysik als Strenge Wissenschaft*, 1941. ⟨К стр. 281.⟩

[475] Упомянута в примечании 455. ⟨К стр. 282.⟩

[476] Упомянута в примечании 456. ⟨К стр. 282.⟩

[477] Упомянута в примечании 457. ⟨К стр. 282.⟩

[478] См. статью Куайна в *The Journal of Symbolic Logic*, том 10, 1945, стр. 1—12. Ср. также модифицированный метод Бэмана, который дан Гильбертом и Бернайсом, *Grundlagen der Mathematik*, том 1, 1934, стр. 193—195. ⟨К стр. 282.⟩

[479] В его диссертации, цитированной в примечании 442, гл. 2, § 9.2. ⟨К стр. 283.⟩

[480] В его *O Sentido da Nova Lógica*, São Paulo, Brazil, 1944. ⟨К стр. 283.⟩

[481] *Mathematische Annalen*, том 99, 1928, стр. 342—372. ⟨К стр. 283.⟩

[482] *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, том 30, 1930, стр. 264—286. Перепечатано в *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* Рамсея, стр. 82—111. ⟨К стр. 283.⟩

[483] *Skrifter utgitt av det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo*, I. Matematisk-naturvidenskapelig Klasse, 1929. ⟨К стр. 283.⟩

[484] То есть в языке синтаксиса не используется аксиома выбора. (См. обсуждение аксиомы выбора в главе VI.) ⟨К стр. 283.⟩

[485] В статье, цитированной в примечании 464. ⟨К стр. 283.⟩

[486] В его диссертации и в статье, цитированной в примечании 465. ⟨К стр. 283.⟩

Примечания к главе V

[500] Содержание синтаксических обозначений „S" и „Š" разъяснено в §§ 30, 35. ⟨К стр. 286.⟩

[501] В выражении, которое должно быть дуализировано, можно, кроме сокращений по схемам D3—11 и D14, допускать также и сокращения по схемам D20—23. В этом случае при дуализации должны взаимно заменяться *f* и *t*, а также $\equiv$ и $\not\equiv$. ⟨К стр. 289.⟩

[502] Это определение дано Лейбницем в следующей форме: „Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate"*). См. изданные Эрдманом *God. Guil. Leibnitii Opera Philosophica*, том 1, 1840, стр. 94, и изданные Герхартом *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, том 7, 1890, стр. 228, 236 (также в английском переводе в приложении к *A Survey of Symbolic Logic* Льюиса). Однако в этой форме наблюдается известное смешение употребления и упоминания: *вещи* тождественны, если *имя* одной из них может быть подставлено вместо *имени* другого без нарушения истинности. Тем не менее важная идея этого определения должна быть приписана Лейбницу.

Фреге в *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) принимает определение Лейбница без каких-либо изменений. В его же *Grundgesetze der Arithmetik* (см. том 1, 1893) устранено смешение употребления и упоминания, но сам принцип выступает не в виде определения, а в виде аксиомы: $\varphi(x = y) \supset \varphi((F)[F(x) \supset F(y)])$. Первая формулировка этого принципа в форме определения тождественности без смешения употребления и упоминания дана как будто бы Пирсом в 1885 г. (*American Journal of Mathematics*, том 7, см. стр. 199). В *The Principles of Mathematics* (1903) Рассела это определение выступает в форме „*x* тождественно с *y*, если *y* принадлежит к каждому классу, к которому принадлежит *x*, или, иными словами, если '*x* есть *u*' влечет '*y* есть *u*' для всех значений *u*". В *Principia Mathematica*, том 1, 1910, мы находим знак $\equiv$, введенный с помощью определения сокращения, которое по существу совпадает с нашей схемой D22. ⟨К стр. 290.⟩

*) „Все объекты при подстановке сохраняют свою силу без изменения смысла". — *Прим. перев.*

[503] Проблема элиминирования восходит к Шрёдеру. См. изложение этого вопроса Аккерманом в статье в *Mathematische Annalen*, том 110, 1934, стр. 390—413. ⟨К стр. 294.⟩

[504] Это решение дано Сколемом и Бэманом в их статьях 1919 и 1922 гг., упомянутых в § 49. Имеется также набросок решения в статье Лёвенгейма 1915 г. ⟨К стр. 294.⟩

[505] Этот пример взят из статьи Аккермана, цитированной в примечании 503. ⟨К стр. 294.⟩

[506] Другими словами, основу **M** можно свести к такой дизъюнктивной нормальной форме (в смысле примечания 299), в которой нигде $\mathfrak{f}$ не встречается со знаком отрицания перед ней. ⟨К стр. 295.⟩

[507] Решение как этого частного случая проблемы элиминирования, так и частных случаев из упражнений 52.8—52.10, а также решение примеров 52.7 (2) и 52.7 (3) даны Аккерманом в статье, цитированной в примечании 503.

В статье Аккермана содержится, кроме того, доказательство неразрешимости общей проблемы элиминирования для функционального исчисления второго порядка, в том смысле, что для некоторых пп-формул не существует результантов; рассматривается также обобщение проблемы элиминирования, в которой результантом пп-формулы функционального исчисления второго порядка должен быть класс пп-формул функционального исчисления первого порядка.

Заметка Аккермана в *Mathematische Annalen*, том 111, 1935, стр. 61—63, содержит решения нескольких других частных случаев проблемы элиминирования — правда, не совсем для функционального исчисления второго порядка, а для системы, которая получается добавлением к функциональному исчислению второго порядка в качестве дополнительных аксиом, суммированных в аксиомную схему, известных частных случаев аксиомы выбора, выразимых в обозначениях функционального исчисления второго порядка (см. § 56 и примечание 555). ⟨К стр. 295.⟩

[508] То есть основа **M** имеет такую дизъюнктивную нормальную форму, в которой $\mathfrak{f}$ нигде не встречается без предшествующего знака отрицания. Мы можем также следующим образом определить *четность* каждого вхождения некоторой элементарной части в **M**: если элементарная часть стоит одна, то это четное вхождение данной элементарной части; в $\sim$ **K** четность каждого вхождения некоторой элементарной части противоположна ее четности относительно **K**; в **K** $\supset$ **L** четность противоположна для каждого вхождения некоторой элементарной части в **K**, но остается той же самой в **L**. Тогда выставленное здесь требование состоит в том, что $\mathfrak{f}$ должно встречаться в **M** лишь на нечетных местах, а в 52.7 (1) требуется, чтобы $\mathfrak{f}$ встречалось лишь на четных местах. ⟨К стр. 295.⟩

[509] См. § 49 и примечание 462. Для сингулярного функционального исчисления порядка ω доказательство особенно подробно проведено Генценом в *Mathematische Zeitschrift*, том 41, 1936, стр. 357—366, хотя и в несколько иной форме, чем указанная нами. ⟨К стр. 297.⟩

[510] Метод, использованный в этом параграфе для доказательства теоремы слабой полноты для функционального исчисления второго порядка, указан Леоном Хенкиным (в его диссертации, Princeton University, 1947). Это по существу тот же метод, что и использованный в § 45 (также принадлежащий Хенкину, ср. примечание 465) для доказательства теоремы Гёделя о полноте функционального исчисления первого порядка. Он может быть распространен на функциональные исчисления более высоких порядков, хотя для систем, содержащих подходящую форму аксиомы выбора, видоизмененный метод, использованный Хенкиным в статье в *The Journal of Symbolic Logic*, том 15, 1950, стр. 81—91, может оказаться более предпочтительным. ⟨К стр. 297.⟩

[511] Как обычно, если свободных переменных нет, то под „принимает значение t при всех возможных значениях своих свободных переменных" мы понимаем просто „обозначает t". (Ср. примечание 312.) ⟨К стр. 298.⟩

[512] Если в качестве области индивидов фиксирована некоторая частная непустая область, то мы можем замкнутую пп-формулу называть истинной, когда она общезначима в этой области. Так как предложения (чистого) функционального исчисления второго порядка — то же самое, что замкнутые пп-формулы, то это можно считать синтаксическим эквивалентом семантического свойства быть истинным предложением, как это описано в § 09. ⟨К стр. 298.⟩

[513] Используемый здесь прием был в июле 1950 г. указан автору Хенкиным. По сравнению с процедурой, использованной в соответствующем месте § 45 или в диссертации Хенкина, он имеет то преимущество, что позволяет заменить бесконечную последовательность прикладных функциональных исчислений S_1, S_2, S_3, ... на одно прикладное функциональное исчисление S. Такое же упрощение можно было бы внести в доказательство **453 в § 45; но так как разница в длине доказательства незначительна, то мы сохранили там старую форму доказательства (которая, как нам кажется, может быть поучительной). ⟨К стр. 301.⟩

[514] Если **a** не встречается в **A** в качестве связанной переменной, то достаточно однократное применение *515. В противном случае требуемый результат может быть получен тремя или более последовательными применениями *515. ⟨К стр. 302.⟩

515) Возможность того, что все области $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$ конечны, реализуется, если, например, в качестве **H** взять пп-формулу $(\exists x)(\exists y)(\exists F) \centerdot F(x) \sim F(y)$, которая имеет не общезначимую пфрпи и которая поэтому не является теоремой (**530). Если, с другой стороны, мы возьмем в качестве **H** отрицание одной из аксиом бесконечности (см. § 57), то все эти области должны быть счетно-бесконечны. ⟨К стр. 303.⟩

516) Как разъяснено в § 04, мы считаем классы сингулярными пропозициональными функциями, а отношения — бинарными пропозициональными функциями. ⟨К стр. 306.⟩

517) *Областью* отношения называется класс вещей (индивидов), которые находятся в этом отношении хотя бы к одной какой-либо вещи, а *конверсная область* отношения — это класс вещей, к которым хотя бы одна вещь находится в данном отношении. (Таким образом, конверсная область некоторого отношения — то же самое, что область конверсии этого отношения, где „конверсия" понимается так, как это разъяснено в § 03.) ⟨К стр. 306.⟩

518) *Относительным произведением* двух отношений Φ и Ψ является отношение, которое имеет место между двумя вещами (индивидами) a и b тогда и только тогда, когда существует по меньшей мере одна вещь c, такая, что a находится к c в отношении Φ, а c находится к b в отношении Ψ.

Если, например, в качестве индивидов взять людей, то относительным произведением отношений *супруг* и *дочь* является отношение *зять* (т. е. *супруг дочери*), а относительным произведением отношения *родитель* и *родитель* является отношение *прародитель*. ⟨К стр. 306.⟩

519) Другие исследования теории постулатов с логистической точки зрения см., например, у Карнапа в *Abriss der Logistik* (Wien, 1929) и *The Logical Syntax of Language* (New York and London, 1937), а также у Гильберта и Бернайса в *Grundlagen der Mathematik* (Berlin, 1934, 1939). Хотя читатель и должен иметь в виду некоторое отличие в подходе и терминологии, тем не менее мы считаем, что наше изложение вопроса находится по существу в соответствии с точкой зрения указанных авторов. ⟨К стр. 307.⟩

520) Этот момент может быть проиллюстрирован на примере элементарной теории чисел и анализа, так как эти две отрасли математики могут строиться при желании на одной и той же системе постулатов, но с различными положенными в основу логиками. А именно, элементарная теория чисел может быть определена добавлением постулатов (A_1), данных ниже, к прикладному функциональному исчислению первого порядка, содержащему все пропозициональные и функциональные переменные, а также те функциональные константы, которые встречаются

в постулатах. А анализ может быть определен добавлением тех же постулатов к прикладному функциональному исчислению четвертого порядка, так как в получающейся системе рациональные, действительные и комплексные числа могут быть определены одним из известных методов определения этих чисел в терминах натуральных чисел.

Сделанные выше утверждения могут вызвать некоторые сомнения из-за неясности того, что именно следует понимать под „элементарной теорией чисел" и „анализом" при употреблении этих терминов в обычном (неформальном) математическом языке. Однако, по мнению автора, „элементарную теорию чисел" желательно понимать таким образом, чтобы не исключать выражения известных общих утверждений, относящихся к классам и функциям натуральных чисел, как, например, суждение, что в каждом классе натуральных чисел имеется наименьшее число.

С другой стороны, в системе, получаемой добавлением постулатов (A_1) к некоторому прикладному функциональному исчислению второго порядка, в некотором смысле может быть получена значительная часть анализа, хотя и с помощью искусственных приемов, выходящих за пределы нашего настоящего рассмотрения. Таким образом, решение подняться в определении лежащей в основе математического анализа логики до функционального исчисления четвертого порядка может показаться сомнительным, однако и в данном случае автору кажется, что при этом достигается наилучшее соответствие с неформальным словоупотреблением.

В тех случаях, когда лежащей в основе логикой является функциональное исчисление второго или более высокого порядка, принято, как указано ниже, заменять постулаты (A_1) более экономной системой постулатов (A_2). Этим, однако, не разрушается приведенная иллюстрация, так как при желании всегда можно сохранить постулаты (A_1). ⟨К стр. 307.⟩

521) При неформальной формулировке этих постулатов к неопределяемым терминам часто добавляют термины 0, 1 и $=$ (некоторых из них или все). Логистический метод, однако, дает возможность установить, что эти дополнительные неопределяемые термины излишни. Правда, определениями, которые мы даем, не вводятся константы 0 и 1, но обозначения Z_0 и Z_1 дают по существу тот же эффект, который получался бы при действительном включении констант 0 и 1 в качестве неопределяемых терминов.

Кроме того, при неформальной формулировке этих постулатов к неопределяемым терминам часто причисляют „натуральное число". Этот дополнительный неопределяемый термин не столько элиминируется применяемым нами методом, сколько включается в неопределяемые термины Σ и Π, так как мы считаем, что область определения функции определяется этой функцией и что область определения задана, коль скоро задана сама функция. (Изменить область определения — это значит заменить саму функцию на другую функцию.) Или же, если это больше нравится читателю, он может считать, что используемый при неформальной формулировке неопределяемый термин „натуральное число" представлен индивидными переменными, область значений которых составляют индивиды, т. е. натуральные числа. 〈К стр. 308.〉

[522)] Вводя этот термин в смысле, отличном от того, в котором мы употребляем „элементарная теория чисел". 〈К стр. 308.〉

[523)] *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 38, 1931; см. стр. 191—193. 〈К стр. 309.〉

[524)] Ср. примечание 520. К логистическим формулировкам как элементарной арифметики, так и арифметики первого порядка часто применяют название *арифметика Гильберта*, так как системы такого рода были введены Гильбертом и его школой. См. статью Гильберта в *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, том 6, 1928, стр. 65—85 (перепечатано в седьмом издании *Grundlagen der Geometrie* Гильберта*); см. также статью Аккермана в *Mathematische Annalen*, том 117, 1940, стр. 162—194, а также исследование систем Z, Z^*, Z^{**}, Z' и т. д. Гильбертом и Бернайсом в *Grundlagen der Mathematik*. 〈К стр. 310.〉

[525)] *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, Turin, 1889; *Formulaire de Mathématiques*, том II, § 2, Turin, 1898. Как указывает Пеано, его постулаты имеются в трактате Дедекинда *Was Sind und was Sollen die Zahlen*, 1888**), хотя и не в форме постулатов. Некоторые существенные элементы, во всяком случае, содержатся уже в статье Пирса в *American Journal of Mathematics*, том 4, 1881, стр. 85—95. 〈К стр. 310.〉

[526)] Эти два определения-схемы иллюстрируют общий метод, позволяющий находить в рассматриваемой системе выражения, представляющие такие числовые функции, которые в неформальном изложении были бы введены с помощью рекурсивных равенств. Например, первая схема соответствует следующим рекурсивным равенствам для сложения:

$$a + 0 = a,$$
$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

*) Русский перевод — в книге Д. Гильберт, *Основания геометрии*, Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 491. — *Прим. перев.*

**) Есть русский перевод: Дедекинд, Что такое числа и для чего они служат, *Известия Физ.-мат. о-ва Казанского университета*, том 15, 1906, стр. 25—104. — *Прим. перев.*

А вторая схема таким же образом соответствует следующим рекурсивным равенствам для умножения:

$$a \times 0 = 0,$$

$$a \times (b + 1) = a + (a \times b).$$

Этот метод, иллюстрируемый двумя определениями-схемами в тексте, был введен Гильбертом и Бернайсом в *Grundlagen der Mathematik*, том 2, 1939, добавление IVG, и Паулем Лоренценом в статье в *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 47, 1938—1939, стр. 356—358. Другие методы, служащие тем же целям, принадлежат Дедекинду (1888) и Кальмару (1930, 1940) и также могли бы быть приняты в данной связи. Неформальное изложение вопроса и краткие сведения по его истории имеются в статье Кальмара в *Acta Scientiarum Mathematicarum*, том 9, № 4, 1940, стр. 227—232.

Сами рекурсивные равенства для сложения и умножения (неформально сформулированные) даны Пирсом в статье, цитированной в предыдущем примечании. ⟨К стр. 311.⟩

[527] Это будет следовать из нашего дальнейшего подробного рассмотрения системы A^2, так как все постулаты системы A^0 и A^1 могут быть доказаны в системе A^2 как теоремы, если модифицировать их указанным образом (т. е. заменить обозначения Σ (**a**, **b**, **c**) и Π(**a**, **b**, **c**) из A^0 и A^1 на соответствующие обозначения из A^2).

[528] Одним из аспектов этого удобства является процесс подстановки вместо функциональных переменных. Например, простая замена тернарной функциональной переменной F повсюду на букву Σ превратилась бы при несокращенных обозначениях в значительно более сложную операцию подстановки (разрешенную правилом подстановки вместо функциональных переменных). ⟨К стр. 312.⟩

[529] Вторая точка зрения, описываемая ниже, длительное время оставалась неявной при использовании постулатов математиками и в неформальных изложениях теории постулатов, хотя логистический метод делает возможной более тщательную ее формулировку. Эта точка зрения, в частности, особенно подчеркивалась Кейсером, который в этой связи говорит о „доктринальной функции" ⟨„doctrinal function"⟩, — см. его статью в *The Journal of Philosophy*, том 15, 1918, стр. 262—267. „Абстрактное" рассмотрение системы постулатов („допущений"), описанное Вебленом и Юнгом в *Introduction* к их *Projective Geometry* (впервые опубликовано в 1910 г.), представляет собой, по сути дела, ту же идею, хотя термин „пропозициональная функция" и не употребляется.

Ни Веблен и Юнг, ни Кейсер не проводят вводимого ниже различения теорем и следствий системы постулатов. В действительности это едва ли было возможно до появления работ Тарского и Карнапа. ⟨К стр. 312.⟩

530) Мы здесь рассматриваем только тот случай, когда лежащая в основе логика является одним из функциональных исчислений не выше второго порядка, хотя распространение на другие случаи, и в частности на одно из функциональных исчислений более высокого порядка, может быть проведено по аналогии. Метод распространения на функциональные исчисления более высоких порядков станет ясным после подробного изложения этих исчислений, которое будет дано в следующей главе. ⟨К стр. 312.⟩

531) В случае одного из функциональных исчислений — любой пп-формулы. ⟨К стр. 313.⟩

532) Для этой цели чистое функциональное исчисление первого порядка с равенством следует считать имеющим порядок, промежуточный между первым и вторым.

533) Это есть понятие „логистического следствия", введенное Тарским, *Przegląd Filozoficzny*, том 39, 1936, стр. 58—68, и *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique* (Париж, 1936), часть VII, стр. 1—11. ⟨К стр. 314.⟩

534) Утверждая это, мы предполагаем, что число неопределяемых терминов конечно. Видоизменения, которые необходимы для того, чтобы охватить противоположный случай, могли бы быть сделаны, если рассмотреть бинарную пропозициональную функцию, одним аргументом которой была бы область индивидов, а другим — полная система значений свободных переменных представляющих форм постулатов. ⟨К стр. 314.⟩

535) Сопоставьте это с прежней точкой зрения, согласно которой математическая теория состоит из теорем.

Против этой новой точки зрения можно было бы выставить возражения, относящиеся к *абсолютизму*, предполагаемому этой теорией, или *платонизму*, как говорит Бернайс (*L'Enseignement Mathématique*, том 34, № 1—2, 1935, стр. 52—69; ср. также Френкель, ibid., стр. 18—32). Однако следует заметить, что этот платонизм присущ всей классической математике вообще, и от того, что он применяется в теоретическом синтаксисе, он не становится ни более резким, ни более сомнительным, а лишь больше бросается в глаза. Ибо наше определение следствий из некоторой системы постулатов может быть сформулировано для формализованного метаязыка (и рассмотрено в его пределах), который мы здесь не описываем подробно, но который, как можно заметить, лишь несущественно отличается от формализованных языков, необходимых для логистического изложения классической математики.

Имелись бы, конечно, убедительные возражения (ср. § 07) против намерения ввести формализованный язык при помощи неэффективного понятия следствия и заменить таким образом первоначальную конструкцию языка в пределах того, что мы назвали элементарным синтаксисом (§ 08). Но после того, как такая формализация языка завершена (или по крайней мере после того, как завершена такая формализация как языка-объекта, так и метаязыка), использование в теоретическом синтаксисе языка-объекта неэффективного понятия следствия является уже другим вопросом и возражения против него уже относятся к другому уровню.

Верно, что определенное нами в теоретическом синтаксисе неэффективное понятие следствия предполагает некоторое абсолютное понятие ВСЕХ пропозициональных функций от индивидов. Однако то же самое предполагается и в классической математике, особенно в классическом анализе, и возражения против этого ведут к таким модификациям классической математики, как математический интуиционизм (который будет рассмотрен в одной из дальнейших глав) или частичный интуиционизм вейлевского *Das Kontinuum* (Leipzig, 1918).

(В этой последней книге возражения Вейля против абсолютного понятия *все* и против порочного круга, который, по мнению Вейля, содержится в этом понятии, приводят его к позиции, которая, грубо говоря, заключается в том, что простые функциональные исчисления заменяются либо соответствующими предикативными функциональными исчислениями, либо же разветвленными функциональными исчислениями (ср. § 58 и примечание 583), причем аксиомы сводимости Рассела (§ 59) отвергаются. Как хорошо известно, Вейль, хотя он и оказался в состоянии осуществить частичную перестройку анализа, пришел к выводу, что существенная часть классической теории является домом, построенным на песке.) ⟨К стр. 314.⟩

[536] Под интерпретацией математической теории мы понимаем интерпретацию той логистической системы, которая получается добавлением постулатов в качестве дополнительных аксиом к лежащей в основе логике. В этом же смысле мы говорили об интерпретации постулатов в последнем абзаце § 07.

Преимущества аксиоматического метода, заключающиеся в том, что полученные с его помощью результаты сохраняют силу для различных интерпретаций, слишком часто подчеркивались другими авторами и не нуждаются в повторении. (Ср. с соответствующим замечанием о логистическом методе вообще в § 07.) ⟨К стр. 314.⟩

[537] Это — упоминавшаяся в примечании 529 *доктринальная функция* Кейсера. Точное изложение этого понятия с точки зрения различия между смыслом и денотатом связано с некоторыми трудностями, и мы не будем здесь заниматься этим. ⟨К стр. 314.⟩

[538] Такое понятие непротиворечивости, включающее частный символ $\sim$, достаточно здесь, так как мы рассматриваем в качестве лежащей в основе логики только обычные (прикладные) функциональные исчисления различных уровней в частных формулировках, принятых в главах III—VI. Для того чтобы ввести в рассмотрение в качестве лежащих в основе логик и другие системы, необходимо в каждом случае уточнять знак (исходный или определяемый), который отождествляется с $\sim$. Если же этого сделать нельзя, то можно использовать какое-либо из других введенных в § 17 понятий непротиворечивости. ⟨К стр. 315.⟩

[539] Этот метод доказательства независимости постулатов был использован Пеано (*Rivista di Matematica*, том 1, 1891, см. стр. 93—94) и Гильбертом в его *Grundlagen der Geometrie*, первое издание (1899). Однако истоки этого метода можно обнаружить еще ранее в связи с неэвклидовой геометрией Больаи и Лобачевского, так как модели постулатов этой геометрии, найденные Бельтрами (1868) и Клейном (1871), являются в действительности независимостными примерами эвклидова постулата о параллельных. ⟨К стр. 316.⟩

[540] Ср. первое издание *Grundlagen der Geometrie* Гильберта, стр. 19—21. ⟨К стр. 316.⟩

[541] Хантингтон, *Transactions of the American Mathematical Society*, том 3, 1902, см. стр. 264, 277—278, 281, 283—284; Веблен, *ibid.*, том 5, 1904, см. стр. 346—347. Ср., далее, замечания Хантингтона, там же, том 6, 1905, стр. 209—210. Ныне общепринятый термин „категорический" появляется впервые в статье Веблена, где утверждается, что он указан Джоном Дьюи.

Хотя идея о категоричности, как о понятии, применимом к системам постулатов вообще, впервые сформулирована, как будто, Хантингтоном и Вебленом, в литературе можно найти более ранние результаты, равносильные категоричности тех или иных систем постулатов. Так, в *Was Sind und was Sollen die Zahlen*? Дедекинда (ср. примечание 525) в 134-м абзаце содержатся существенные элементы обычного доказательства категоричности постулатов Пеано, сходного с тем, которое описано ниже в упражнении 55.15. А результат, доказанный Георгом Кантором в *Mathematische Annalen*, том 46, 1895, стр. 510—512, заключается фактически в том, что определенная система постулатов — его широко известное определение континуума — является категорической. (Дедекинд говорит о „Bedingungen", а Кантор — о „Merkmale", а не о постулатах или аксиомах.) ⟨К стр. 316.⟩

[542] Не исключен, конечно, тот частный случай, когда обе области индивидов совпадают, и в этом случае требуемым одно-однозначным соответствием является некоторое одно-однозначное

отображение этой области индивидов на себя. (Мы предполагаем, что термин „одно-однозначное соответствие" знаком читателю, но в случае нужды разъяснение его можно найти в примечаниях 556, 564.) ⟨К стр. 317.⟩

543) Определяющее имеет очевидное сходство с представляющей формой конъюнкции постулатов (ID), хотя и отличается от нее в разных отношениях, в частности оно содержит одной свободной функциональной переменной больше. В той форме, в которой оно приведено здесь, определяющее упрощено по сравнению с постулатами с помощью очевидных применений P и F^1. ⟨К стр. 318.⟩

544) До тех пор, пока мы ставим себе только задачу воспроизводить (в этом смысле) в F_2^{2p} теоремы из A^1, нам не нужны никакие дополнительные аксиомы. Точно так же и для теоремы, что *существует не более одной арифметики* (с точностью до одно-однозначного соответствия), не требуется никаких дополнительных аксиом. Однако для некоторых других теорем, и в частности для теоремы, что *существует по меньшей мере одна арифметика*, нужна будет аксиома бесконечности и, возможно, также аксиома вполне-упорядочиваемости индивидов. ⟨К стр. 319.⟩

545) Часто говорят, что математика сводима к логике и в другом смысле (в смысле Фреге и Рассела). Об этом мы будем говорить в другом параграфе. Однако уже сейчас необходимо заметить, что решение, хотя бы частично, является вопросом терминологии. Можно также считать, что аксиома бесконечности находится вне области логики и что логика кончается, а математика начинается с добавлением такой аксиомы. ⟨К стр. 319.⟩

546) Ср. с примечанием 528. ⟨К стр. 322.⟩

Это определение-схему можно считать модифицированной формой специального случая расселовского контекстуального определения *дескрипций*, т. е. его схемы для контекстуального определения обозначения $(\iota x)\mathbf{A}$; см. *American Journal of Mathematics*, том 30, 1908, стр. 253. В этом специальном случае мы можем, следуя замечанию, сделанному Эрбраном в *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 24, 1931, стр. 33, упростить определения (содержащиеся в схеме), используя для этого теоремы $Z_0(x) \supset_{\blacksquare} Z_0(y) \supset x = y$ и $Z_1(x) \supset_{\blacksquare} Z_1(y) \supset x = y$ логистической системы A^1. ⟨К стр. 322.⟩

547) Это частный случай сформулированного в примечании 452 результата Сколема. Его доказательство, отличное по методу от указанного здесь, приведено в *Fundamenta Mathematicae*, том 23, 1934, стр. 150—161. ⟨К стр. 323.⟩

548) Это адаптация примера, принадлежащего Тарскому, см. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, том 40, 1933, стр. 97—112.

С помощью теорем Гёделя о неполноте (которые будут рассмотрены в одной из дальнейших глав) можно также найти конечную систему постулатов, которая непротиворечива относительно доказуемости, не будучи непротиворечивой относительно следования. ⟨К стр. 324.⟩

549) Выражение „частично упорядоченный класс" является переводом немецкого выражения „teilweise geordnete Menge", использованного Феликсом Хаусдорфом в *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914), стр. 139, где общее понятие частичного порядка (отличаемое от рассмотрений его частных случаев) вводится, как будто бы, впервые. ⟨К стр. 324.⟩

550) Это определение простого порядка следует, по-видимому, приписать Пирсу, который в *American Journal of Mathematics*, том 4, 1881, стр. 86 дает в терминах отношения $\leqslant$ (а не отношения $<$, как в упражнении выше) весьма близкое определение.

Определение простого порядка в терминах отношения *предшествует* (аналогичного отношению $<$)дано Гутберлетом в *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik*, н. с., том 88, 1886, стр. 183—184. То же самое определение использовано также Георгом Кантором, см. *Mathematische Annalen*, том 46, 1895, стр. 496 (или же его *Gesammelte Abhandlungen*, стр. 296); возможно, что Гутберлет мог взять это определение из рукописи Кантора (см. *Gesammelte Abhandlungen*, стр. 388, 482—483), хотя его собственная формулировка этого вопроса не совсем ясна. Как Гутберлет, так и Кантор явно формулируют только два последних постулата из трех приведенных выше, но дополнительное условие, что никакой элемент не предшествует себе самому, молчаливо предполагается, по крайней мере Кантором, как это видно из *Mathematische Annalen*, том 49, 1897, стр. 216 (или *Gesammelte Abhandlungen*, стр. 321).

Условие, что никакой элемент не предшествует самому себе, конечно, может быть заменено условием, что не может одновременно x предшествовать y и y предшествовать x. В такой форме три постулата явно приводятся Джилмэном (учеником Пирса) в *Mind*, н. с., том 1, 1892, стр. 518—526; Джиовани Вайлати в *Rivista di Matematica*, том 2, 1892, стр. 73. ⟨К стр. 324.⟩

551) Понятие вполне-упорядоченного класса дано Кантором в *Grundlagen einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883, стр. 4, или *Mathematische Annalen*, том 21, 1883, стр. 548, или *Acta Mathematica*, том 2, 1883, стр. 393 (или *Gesammelte Abhandlungen*, стр. 168). Канторовское определение вполне-упорядоченности несколько отлично, но эквивалентно тому, что сейчас общепринято в качестве такого определения, выражаемого приведенным выше четвертым постулатом. Кроме того, вначале, давая определение вполне-упорядоченности, Кантор предполагал понятие про-

стого порядка. Однако в 1895 г., как разъяснено в предыдущем примечании, определение простого порядка было дано. ⟨К стр. 324.⟩

[552] Как и в случае (1), наличие бесконечной последовательности индивидов, участвующих в этих постулатах, может быть обеспечено использованием соответствующим образом модифицированных постулатов (A_2). (Сравните используемую в тексте процедуру преобразования постулатов (ID) для области целостности с единицей в пропозициональную форму с тремя переменными, выражающими, что некоторый класс является областью целостности с единицей относительно двух тернарных отношений.) ⟨К стр. 325.⟩

[553] Понятия метрического пространства и полного (или полного метрического) пространства введены Морисом Фреше, хотя и в других терминах. См. его тезисы в *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, том 22, 1906, стр. 1—74, и его статью в *Transactions of the American Mathematical Society*, том 19, 1918, стр. 53—65. ⟨К стр. 325.⟩

[554] См. статью Арнольда Шмидта в *Mathematische Annalen*, том 115, 1938, стр. 485—506. (*Добавлено в корректуре*: см. также улучшенные изложения этого же предмета Арнольдом Шмидтом в *Mathematische Annalen*, том 123, 1951, стр. 187—200, и Хао Ваном в *The Journal of Symbolic Logic*, том 17, 1952, стр. 105—116.) ⟨К стр. 326.⟩

[555] Имеется в виду следующая аксиомная схема:

$$(\mathbf{x})\,(\exists \mathbf{f})\,\mathbf{A} \supset (\exists \mathbf{g})\,(\mathbf{x})\check{S}^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \ldots,\, \mathbf{x}_n)}_{\mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2,\, \ldots,\, \mathbf{x}_n)}\, \mathbf{A}\,|,$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — отличные друг от друга индивидные переменные, $\mathbf{f}$ есть n-арная функциональная переменная, $\mathbf{g}$ есть $(n+1)$-арная функциональная переменная, а **A** есть пп-формула, не содержащая никаких связанных вхождений ни $\mathbf{g}$, ни $\mathbf{x}$. Она приводится у Гильберта и Аккермана в *Grundzüge der theoretischen Logik*, второе издание (1938), стр. 104, и третье издание (1949), стр. 111*), а также в статье Аккермана, упомянутой в последнем абзаце примечания 507. ⟨К стр. 327.⟩

[556] Мы говорим, что некоторое отношение является подотношением другого отношения, если первое отношение формально имплицирует второе в смысле формальной импликации, разъясненной в § 06. Отношение R называется *много-однозначным*, если для всякого элемента a из области отношения R существует единственный элемент b из конверсной области отношения R, такой, что a находится к b в отношении R. Далее, отношение называется *одно-многозначным*, если его конверсия является много-однозначным отношением; наконец, отношение называется *одно-однозначным*,

*) Русский перевод: *Основания теоретической логики*, ГИИТЛ, М.–Л., 1947, стр. 168. — *Прим. перев.*

если и оно само, и его конверсия являются много-однозначными отношениями. (См. также разъяснение терминологии в примечании 517.) 〈К стр. 328.〉

557) Ср. Гильберт и Аккерман, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, второе издание (1938), формула g на стр. 104, и третье издание (1949), формула g на стр. 111*). 〈К стр. 328.〉

558) Для аксиомы бесконечности, которая была бы общезначима в счетно-бесконечной области индивидов, это является следствием упражнения 48.24. Тот же результат может быть получен для аксиомы бесконечности, общезначимой только в несчетно-бесконечной области индивидов, если в метаязыке воспользоваться аксиомой выбора и следовать методу упражнения 48.22, что и было проделано Хенкиным в его диссертации 1947 г. и статье, цитированной в примечании 465. (Ср., далее, примечание 451.) 〈К стр. 329.〉

559) Существуют аксиомы бесконечности, которые являются пп-формулами только функциональных исчислений еще более высоких порядков, в частности „Infin ax" из *Principia Mathematica*, как она выглядела бы в наших обозначениях, а также три аксиомы бесконечности, которые соответствуют определениям конечности I, II, III Тарского из *Fundamenta Mathematicae*, том 6, 1924, стр. 46, 93.

560) Сейчас же напрашивается мысль о введении более ограниченного понятия *аксиомы бесконечности*, как такой пп-формулы, которая общезначима во всякой бесконечной области, но не общезначима ни в какой конечной области. Это действительно может быть сделано в подходящем метаязыке. Однако с точки зрения оправдания или объяснения предпочтения, отдаваемого одной какой-нибудь аксиоме бесконечности перед другой, результат оказывается менее удовлетворительным, чем можно было предполагать. Ибо при более ограниченном понятии аксиомы бесконечности решение вопроса о том, какая из приведенных ниже пп-формул (∞1)—(∞5) действительно должна считаться аксиомой бесконечности, зависит от того, что принимается за определение „конечного" и „бесконечного" в метаязыке, а также от аксиом (в конечном счете формализованного) метаязыка, в частности от наличия и вида аксиом, играющих роль аксиом бесконечности и выбора. (Ср. аналогичное замечание Мостовского в *Comptes rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 31, 1938, стр. 16.) 〈К стр. 329.〉

561) Из статьи, цитированной в примечании 481. Ср. также с упражнением 43.5 (2). 〈К стр. 329.〉

562) Из его статьи, цитированной в примечании 430. Ср. также с упражнением 43.5 (1). 〈К стр. 329.〉

---

*) Русский перевод — стр. 167. — *Прим. перев.*

563) Аксиома (∞5) из монографии автора 1944 г. упрощена здесь в соответствии с указаниями, сделанными Бернайсом в письме от 31 августа 1945 г. Идея аксиомы, утверждающей, что индивиды не могут быть приведены в замкнутый циклический порядок, взята из второго определения конечности Дедекинда, которое приведено в предисловии ко второму изданию (1893) его *Was Sind und was Sollen die Zahlen*? По этому поводу см., далее, § 7 статьи Тарского в *Fundamenta Mathematicae*, том 6, 1924, стр. 83—93 и статью Кавайе, там же, том 19, 1932, стр. 143—148. ⟨К стр. 329.⟩

564) Класс называется *подклассом* некоторого другого класса, если все элементы первого класса являются также элементами второго (ср. с примечанием 556); если же в дополнение к этому второй класс содержит хотя бы один элемент, не являющийся элементом первого класса, то первый класс называется *собственным подклассом* второго. Под *одно-однозначным* соответствием между двумя классами подразумевается одно-однозначное отношение в смысле примечания 556, областью которого является один класс, а конверсной областью — другой. (Все это термины, обычные в общематематической литературе, и относительно них мы уже неоднократно предполагали, что они известны читателю без каких-либо специальных разъяснений. В частности, понятие одно-однозначного соответствия было использовано в метатеореме **439 и в ее доказательстве, а также в определении категоричности § 55, а понятия много-однозначного и одно-многозначного соответствия — в § 23 и в упражнении 55.18.) ⟨К стр. 330.⟩

565) Пирс, *American Journal of Mathematics*, том 7, 1885, стр. 202; Дедекинд, *Was Sind und was Sollen die Zahlen*? (1888), абзац 64. Как отмечает Дедекинд в своем введении ко второму изданию, одно-однозначное соответствие между бесконечным классом и его собственным подклассом впервые было указано Больцано в его *Paradoxien des Unendlichen* (1851) и было известно Кантору в 1878 г., но ни тот, ни другой автор не намеревались сделать это определением бесконечного класса. ⟨К стр. 330.⟩

566) *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, том 31, 1938, стр. 13—20. ⟨К стр. 330.⟩

567) *Доклады Академии Наук СССР*, том 70, 1950, стр. 569—572. ⟨К стр. 330.⟩

568) Как Мостовский, так и Трахтенброт рассматривают логистические системы, отличные от F^{2p}_2; кроме того, они рассматривают непосредственно не проблему наиболее слабой аксиомы бесконечности, а проблему наиболее сильного определения конечности (класса). Таким образом, результат, сформулированный в тексте, не содержится в явном виде в их статьях, а должен быть выведен из них. Сверх того, обе статьи представляют собой резюме, не

содержащие доказательств сформулированных результатов; однако указания, достаточные, по-видимому, для восстановления доказательства, содержатся в статье Трахтенброта и в рецензии на нее Мостовского в *The Journal of Symbolic Logic*, том 15, 1950, стр. 229. ⟨К стр. 330.⟩

[569] Эта аксиома бесконечности подсказана определением конечности, которое было дано Вебером и несколько упрощено Кюршаком. См. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, том 15, 1906, стр. 177 и том 16, 1907, стр. 425. Следует отметить также связь с (∞1), которая утверждает существование частичного порядка индивидов, в котором нет последнего индивида. ⟨К стр. 331.⟩

[570] Подсказана определением конечности Пауля Штеккеля, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, том 16, 1907, стр. 425. ⟨К стр. 331.⟩

[571] Подсказана принадлежащим Тарскому определением конечности *E* в *Fundamenta Mathematicae*, том 30, 1938, стр. 162. Однако в той форме, в которой эта аксиома приведена здесь, она модифицирована использованием одно-многозначного соответствия вместо одно-однозначного соответствия, использованного Тарским в определении *E*. ⟨К стр. 331.⟩

[572] То что это не может быть сделано без использования аксиомы (w), следует из результата, полученного Мостовским в его диссертации *O Niezależności Definicji Skończoności w Systemie Logiki*, которая опубликована в качестве приложения к *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, том 11, 1938, стр. 1—54. ⟨К стр. 331.⟩

[573] Эта цитата взята из статьи Пуанкаре в „*Scientia*", том 12, 1912, см. стр. 7. Более ранние формулировки возражений Пуанкаре против непредикативных определений („définitions non prédicatives") см. в *Revue de Métaphysique et de Morale*, том 14, 1906, стр. 307. ⟨К стр. 332.⟩

[574] Однако нельзя быть уверенным, что принцип порочного круга Рассела совпадает с тем, что имел в виду Пуанкаре, так как Пуанкаре никогда не развивал своих идей систематически в этом направлении, а (неформально) приводимые им примеры непредикативных определений не дают возможности выяснить, каков бы был его приговор относительно других примеров того, что также можно было бы считать непредикативными определениями.

В статье в *Revue de Métaphysique et de Morale*, том 17, 1909, стр. 461—482 [впоследствии перепечатанной в качестве главы IV в *Dernières Pensées* (1913)], Пуанкаре обсуждает расселовскую „иерархию типов", т. е. разветвленное функциональное исчисление (высшего порядка), которая вводится Расселом как основанная на принципе порочного круга. Из этого обсуждения можно, по-видимому, заключить, что Пуанкаре считал принцип порочного круга в общем и целом соответствующим его собственным идеям, но не соглашался без возражений принять функциональное исчисление, которое Рассел предлагал в качестве воплощения этого принципа, — даже в случае отказа от расселовских аксиом сводимости, которые будут рассмотрены в следующей главе.

По-видимому, Пуанкаре (в отличие от Вейля) верил или надеялся на то, что всю классическую математику удастся построить, не прибегая к непредикативным определениям, коль скоро допущены постулаты арифметики, включая постулат математической индукции. Ср. его статью в *Acta Mathematica*, том 32, 1909, стр. 195—200, особенно § 5, стр. 198—200. 〈К стр. 332.〉

[575] См. *American Journal of Mathematics*, том 30, 1908, стр. 237. Термин „apparent variable" 〈фиктивная переменная〉 использован Расселом в том смысле, в котором мы используем термин „связанная переменная" (ср. примечание 28), поэтому вторая из двух цитированных формулировок принципа порочного круга должна в нашей терминологии звучать следующим образом: пп-формула, содержащая связанную переменную, не должна обозначать одно из значений, принадлежащих к области значений этой переменной. 〈К стр. 332.〉

[576] Разъяснение см. в его статье „Der Circulus Vitiosus in der Heutigen Begründung der Analysis" в *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, том 28, 1919, стр. 85—92. 〈К стр. 332.〉

[577] Мы здесь не будем пытаться решить вопрос о семантических правилах главной интерпретации какого-либо из предикативных или разветвленных функциональных исчислений второго порядка или формулировать эти правила. Заметим, однако, что для согласованности с только что описанными мотивами необходимо отказаться от идеи, что предложение обозначает одно из истинностных значений t или f, и, следовательно, не считать эти два истинностных значения значениями пропозициональных переменных, а классы и отношения в объемном (экстенциональном) понимании — значениями функциональных переменных. Точка зрения, которой Рассел придерживался в 1908 г., а Уайтхед и Рассел в первом издании *Principia Mathematica*, будет, по-видимому, лучше всего передана, если предположить, что предложения обозначают суждения, считать суждения значениями пропозициональных переменных, а свойства и отношения в интенциональном понимании — значениями функциональных переменных. Что касается более экстенциональной точки зрения, защищаемой Расселом в его *Introduction to the Second Edition of Principia Mathematica* (ср. примечание 590), то ее можно, видимо, представить

с помощью бесконечного перечня истинностных значений, а именно двух истинностных значений $\mathfrak{t}_m$ и $\mathfrak{f}_m$ для каждого уровня m, считая $\mathfrak{t}_m$ и $\mathfrak{f}_m$ значениями пропозициональных переменных m-го уровня и считая значениями n-арных функциональных переменных m-го уровня функции (в экстенциональном понимании), имеющие упорядоченные n-ки областью своего определения и имеющие $\mathfrak{t}_m$ и $\mathfrak{f}_m$ (одно или оба) своими значениями.

Следует тут же заметить, что сказанное выше не является воспроизведением точки зрения самого Рассела по семантическим вопросам, особенно в том виде, как она изложена во введении и добавлениях ко второму изданию *Principia Mathematica.* Это скорее первый шаг предполагаемой попытки включить разветвленные функциональные исчисления в нашу собственную семантическую программу и дать для них „семантические правила" такого рода, с которыми сам Рассел, наверное, не согласился бы. ⟨К стр. 332.⟩

[578] Употребление здесь слова „уровень" ⟨„level"⟩ является отклонением от терминологии Рассела и *Principia Mathematica.* То что мы в функциональных исчислениях второго порядка называем уровнем функциональной или пропозициональной переменной, совпадает с тем, что Уайтхед и Рассел называют порядком. Однако в общем случае, и особенно в связи с разветвленными функциональными исчислениями высших порядков, мы понимаем под *уровнем* функциональной переменной то, что в терминологии Уайтхеда и Рассела называлось бы величиной ⟨the amount⟩, на которую порядок ⟨the order⟩ этой функциональной переменной превосходит наивысший порядок переменной из числа тех, которые могут стоять на одном из *аргументных мест* (т. е. на одном из мест между скобками, следующими за рассматриваемой функциональной переменной).

Мы не будем использовать в этой связи слово „порядок" в каком-либо смысле, отличном от того, в котором мы говорим о функциональных исчислениях первого *порядка*, второго *порядка* и т. д. (употребление этого слова значительно отличается от принятого Уайтхедом и Расселом). Мы будем, кроме того, использовать слово „тип" совершенно иначе, чем это делают Уайтхед и Рассел, приноравливая это употребление скорее к простым функциональным исчислениям, чем к разветвленным функциональным исчислениям. А именно, как будет более подробно разъяснено в главе VI, все встречающиеся в функциональных исчислениях первого (или второго) порядка функциональные переменные относятся, как мы говорим, к *первому типо-классу*, новые функциональные переменные, которые вводятся в функциональном исчислении третьего порядка, относятся, как мы говорим, ко второму типо-классу, и т. д., вводя новый типо-класс функциональных переменных с каждым последовательным функциональным исчислением нечетного порядка. В нашей терминологии пропозициональные переменные не разбиваются на типы, а относятся к одному и тому же типу, хотя в разветвленных функциональных исчислениях имеются пропозициональные переменные различных уровней. Точно так же все индивидные переменные относятся к одному типу (отличному от типов пропозициональных и функциональных переменных). Две функциональные переменные, из которых одна m-арна, а другая n-арна, относятся к одному и тому же типу, если обе они принадлежат первому типо-классу и $m = n$ или если обе они принадлежат одному и тому же более высокому типо-классу, $m = n$ и всякая переменная, которая может стоять на некотором аргументном месте за одной из них, относится к тому же типу, что и переменная, которая может стоять за другой на том же (по порядку) аргументном месте. ⟨К стр. 333.⟩

579) Эту формулировку следует сравнить не только с собственной формулировкой Рассела (в статье, цитированной в примечании 454) и формулировкой в *Principia Mathematica*, но также с формулировкой Гильберта и Аккермана в *Grundzüge der Theoretischen Logik*, первое издание (1928), и с формулировкой Фитча в *The Journal of Symbolic Logic*, том 3, 1938, стр. 140—149. Все они отличаются от нашей настоящей формулировки (скажем) исчисления $F_2^{2/\omega}$, не будучи ограничены тем, что мы называем вторым порядком. Формулировка Фитча, кроме того, содержит обозначения и аксиомы, предназначенные для включения в систему в некотором смысле формулировки, или частичной формулировки, арифметики, так что его систему можно скорее сравнить с нашей $A^{2/\omega}$ (см. ниже) нежели с $F_2^{2/\omega}$. ⟨К стр. 334.⟩

580) При желании мы могли бы также ввести обозначения $\equiv_2$ и $\not\equiv_2$, заменяя в D22 и D23 переменную F на $F^{1/2}$. Аналогично $\equiv_3$ и $\not\equiv_3$ и т. д. ⟨К стр. 335.⟩

581) Та часть системы из *Principia Mathematica*, которая не выходит за пределы функционального исчисления второго порядка, приблизительно представлена чистым разветвленным функциональным исчислением второго порядка уровня ω, к которому добавлены некоторая аксиома бесконечности, бесконечный перечень аксиом, получаемых из (w) вышеописанным способом, а также (по крайней мере в первом издании *Principia*) аксиом сводимости, которые приводятся ниже в § 59. Для полной системы *Principia* добавляются функциональные переменные более высоких типо-классов (ср. примечание 578), но по-прежнему разветвленные, т. е. разделенные на уровни; аксиома бесконечности формулируется в ином виде (упомянутая в примечании 559 „Infin ax"), требующем функциональных переменных более высоких порядков; аксиомы, получаемые из (w), как это описано в тексте, заменяются

расселовскими *мультипликативными аксиомами* (эквивалентными аксиомам выбора); и (по крайней мере в первом издании) в дополнение к аксиомам сводимости, данным в § 59, включаются аксиомы сводимости, содержащие функциональные переменные более высоких типо-классов. ⟨К стр. 336.⟩

582) Сформулированные в § 55 системы A^0 и A^1 остаются незатронутыми принятием точки зрения разветвления, т. е. разделения на уровни. ⟨К стр. 336.⟩

583) Ср. с примечанием 535.

Вейль описывает формулировку разветвленной арифметики второго порядка, а также более высокого порядка, и считает эту систему приемлемой. Однако фактические построения книги лежат в значительной степени в пределах предикативной арифметики второго порядка и как будто бы по существу эквивалентны системе $A^{2!}$ (см. ниже), хотя и отличаются деталями формулировки. В некоторых местах эта система должна быть расширена до предикативной арифметики третьего порядка путем добавления переменных следующего более высокого типо-класса, которые, однако, допускаются только в качестве свободных переменных. ⟨К стр. 336.⟩

584) То есть, точнее говоря, F^1 заменяется на $F^{1/1}$ для получения первого постулата из указанного бесконечного перечня, на $F^{1/2}$ для получения второго постулата из этого перечня и т. д. ⟨К стр. 337.⟩

585) Таким образом, „F" становится в действительности синтаксической переменной с $F^{1/1}$, $F^{1/2}$, $F^{1/3}$, ... в качестве значений; тем самым оказывается установленной теоремная схема, суммирующая бесконечный перечень аксиом. Это пример того, что авторы *Principia Mathematica* называют *типовой неопределенностью* ⟨*typical ambiguity*⟩.

Бесконечный перечень постулатов математической индукции из $A^{2/\omega}$ также может быть удобным образом суммирован в единственной постулатной схеме с помощью типовой неопределенности. (Ср. примечание 584.) ⟨К стр. 337.⟩

586) Конечно, имеется в виду дать не главную интерпретацию, а лишь некоторую специальную интерпретацию, служащую целям данного конкретного доказательства независимости. ⟨К стр. 338.⟩

587) В статье, цитированной в примечании 454. ⟨К стр. 338.⟩

588) В частности со стороны Леона Хвистека в *Przegląd Filozoficzny*, том 24, 1921, стр. 164—171; со стороны Гильберта и Аккермана, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, первое издание (1928), стр. 114—115; со стороны Адольфа Френкеля, *Einleitung in die Mengenlehre*, третье издание (1928), стр. 259—263; со стороны

У. В. Куайна в *Mind*, н. с., том 45, 1936, стр. 498—500, и в статье в *The Philosophy of Alfred North Whitehead*, 1941, см. стр. 151—152. ⟨К стр. 338.⟩

[589] Хвистек в статье, цитированной в предыдущем примечании; Рамсей в статье в *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, том 25, 1926, стр. 338—384, перепечатанной в его *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, 1931, стр. 1—61; Карнап в *Abriss der Logistik*, 1929, § 9. См. также отдельные замечания Карнапа и Хана в *Erkenntnis*, том 2, 1931, стр. 73, 97, 145. ⟨К стр. 338.⟩

[590] Указывая, что их место могли бы частично занять аксиомы объемности, которые в терминах разветвленных функциональных исчислений высших порядков выражают, что формально эквивалентные пропозициональные функции одного и того же типа и одного и того же уровня тождественны. (Ср. примечание 577.)

Сравните также *The theory of constructive types*— статью в *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, том 2, 1924, стр. 9—48, и том 3, 1925, стр. 92—141, в которой Хвистек берет, по словам Рассела, героический курс на отказ от аксиом сводимости без принятия какой-либо замены для них и предпринимает таким образом попытку основать логистическое построение математики на системе из *Principia Mathematica* без этих аксиом. ⟨К стр. 338.⟩

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Настоящий указатель содержит ссылки на все места, где вводятся новые термины и где путем определения или как-нибудь иначе разъясняется содержание или употребление новых терминов. При этом охвачены как термины, употребляемые в метаязыке, так и символы, используемые в различных языках-объектах (за исключением букв, используемых в качестве переменных, скобок различных видов и запятых), а также ссылки на терминологию, употребляемую другими авторами, но не используемую в настоящей книге. Пронумерованные определения D1—D25, принадлежащие к языкам-объектам, размещены в соответствии с их номерами и включены в общий алфавитный порядок под буквой D. В указатель также включены и расположены в соответствующих местах алфавитного порядка обозначения логистических систем, состоящие из заглавной буквы с верхними или нижними индексами или же с тем и другим вместе.

Для того чтобы фиксировать алфавитный порядок, принимается следующее соглашение. Русские буквы предшествуют всем остальным и упорядочиваются между собой в их естественном порядке. За русскими следуют латинские буквы. Греческие буквы считаются следующими за латинскими и упорядочиваются между собой в их собственном алфавитном порядке. Арабские цифры считаются следующими за русскими, латинскими и греческими буквами и упорядочиваются между собой в порядке возрастания (т. е. сначала идет 0, затем 1, затем **2** и т. д.). Специальные символы (включая перевернутые символы, рассматриваемые как специальные символы) следуют за арабскими цифрами и упорядочены между собой в некотором произвольном порядке. Обычно при упорядочивании не обращается внимание на различие между прописными и строчными буквами, а также между прямым шрифтом и курсивом, штрихованными и нештрихованными буквами. Однако в тех случаях, когда это привело бы к тому, что два элемента должны были бы занять в алфавитном порядке одно и то же место, мы уславливаемся располагать прописные буквы прежде строчных, прямой шрифт прежде курсива, и, наконец, нештрихованные буквы прежде штрихованных. Точно так же мы, как правило, игнорируем скобки, дефис, жирный шрифт, знак восклицания, запятую и другие знаки препинания; однако в тех случаях, когда это привело бы (несмотря на предыдущие соглашения) к тому, что два элемента должны были бы занять в алфавитном порядке одно и то же место, мы располагаем прежде тот элемент, в котором нет скобок или других знаков препинания. Наконец, мы учитываем верхние и нижние индексы только в тех случаях, когда (несмотря на все предыдущие соглашения) два или более элементов должны были бы занять одно и то же место в алфавитном порядке; в таких случаях элементы упорядочиваются в алфавитном порядке их верхних индексов; если же верхние индексы идентичны или отсутствуют, то — в алфавитном порядке их нижних индексов.

Ссылки даются либо на параграф (это указывается с помощью знака „§"), либо на номер аксиомы, правила вывода, теоремы или метатеоремы (это указывается с помощью знаков „†", „*", „**", составляющих часть номера), или на занумерованное примечание (указывается с помощью буквы „п"), или на занумерованное упражнение (указывается с помощью точки, составляющей часть номера). За разъяснением системы нумерации, используемой в книге, следует обратиться к примечанию 152 из § 10. В частности, следует обратить внимание на то, каким образом номер параграфа указывает главу, в которой его следует искать, а номера аксиом, правил, теорем или метатеорем указывают параграфы, в которых они находятся. Как разъяснено в примечании 152, упражнения помещены непосредственно за параграфом, указанным в номере упражнения, так что, например, 46.0 есть первое упражнение из упражнений к § 46, а 46.19 — двадцатое.

При отыскивании ссылок следует игнорировать номера страниц и вместо них пользоваться номерами глав, параграфов и собраний упражнений, указанными в верхней части страниц. Если ссылка делается на примечание, то следует иметь в виду, что примечания 1—149 находятся во введении, а номера остальных примечаний прямо указывают главу, в которой они находятся, так что номера первой сотни находятся в главе I, номера второй сотни — в главе II и т. д.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДПОЛАГАЕМОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТОМА II